*Comunicaciones a la Academia*

presentadas en las Sesiones Científicas celebradas en las fechas que se indican

# *Espacios de funciones continuas vectoriales con la propiedad de Dunford-Pettis**

Por FERNANDO BOMBAL

**Abstract**

The Dunford-Pettis Property (D.P.P. in short) was introduced by A. Grothendieck in [4] and it has been intensively studied since then (see [3]). A long time posed question was answered by M. Talagrand in [6], building a Banach space $T$ with the D.P.P., such that $C([0, 1], T)$ does not have it. However, if $K$ is a compact dispersed space, P. Cembranos has proved in [1] that $C(K, E)$ has the D.P.P. if $E$ has. In this note, we prove that this last property characterizes the dispersed spaces.

Un espacio de Banach $E$ tiene la *Propiedad de Dunford-Pettis* (P.D.P.) si para cada par de sucesiones $(x_n) \subset E$, $(x'_n) \subset E'$, que converjan débilmente a 0, se tiene que $(x'_n(x_n))$ converge a 0. Esta propiedad fue introducida por A. Grothendieck en su importante trabajo [4] y ha sido ampliamente estudiada (véase, por ejemplo, [3]). Si $K$ es un espacio compacto Hausdorff y $E$ es un Banach con la P.D.P., durante largo tiempo estuvo abierto el problema de saber si el espacio $C(K, E)$ de las funciones continuas de $K$ en $E$, dotado de la norma del supremo tiene necesariamente la P.D.P. Así, por ejemplo, J. Bourgain ha probado que $C(K, L^1(\mu))$ y todos sus duales tienen la P.D.P. ([3]). M. Talagrand resolvió el problema, construyendo en [6] un espacio de Banach $T$ tal que:

1. $T$ y $T'$ tienen base de Schauder incondicional.
2. $T'$ tiene la propiedad de Schur; en particular, $T$ tiene la P.D.P.
3. $C([0, 1], T)$ no tiene la P.D.P.

A la vista de este ejemplo, no parece sencillo caracterizar clases de espacios $E$ no triviales tales que $C(K, E)$ tenga la P.D.P. Sin embargo, P. Cembranos ha probado en [1] que si $K$ es un compacto disperso, entonces $C(K, E)$ tiene la P.D.P. si $E$ la tiene. En esta nota se prueba que esta propiedad caracteriza a los compactos dispersos, es decir, los que no contienen ningún subconjunto perfecto ([5]).

Sean $K$ y $S$ dos compactos Hausforff y $\theta$: $K \to S$ una aplicación continua y sobre. Entonces, para cualquier espacio de Banach $E$, la aplicación $C(S, E) f \to J_\theta(f)$

---

* Presentada en la Sesión Científica del 4 de diciembre de 1984.

$= f \cdot \theta \in C(K, E)$ es una isometría, que permite identificar $C(S, E)$ con un subespacio de $C(K, E)$. Con estas notaciones, se verifica el siguiente

LEMA. *Si $E'$ verifica la propiedad de Radon-Nikodým, y $(x'_n)$ es una sucesión débilmente convergente a 0 en $C(S, E)'$, existe una sucesión débilmente convergente a 0, $(y'_n)$, en $C(K, E)'$ tal que $J'_\theta(y'_n) = x'_n$ para cada $n$.*

Como consecuencia, resulta fácilmente el siguiente

TEOREMA. *Sea $K$ un compacto Hausdorff. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$K$ es disperso.*
2. *$C(K, E)$ tiene la* P.D.P. *si $E$ la tiene.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2) está probado en [1], th. 4.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $K$ no es disperso, por ([5], 2.4.2), existe una aplicación continua y sobre $\theta$: $K \to [0, 1]$. Sea $T$ espacio de Talagrand y $J_\theta$ la isometría de $C([0, 1], T)$ en $C(K, T)$ asociada a $\theta$. Como $C([0, 1], T)$ no tiene la P.D.P., existe $\varepsilon > 0$ y un par de sucesiones $(f_n) \subset C([0, 1], T)$, $(x'_n) \subset C([0, 1], T)'$ que convergen débilmente a 0, tales que $x'_n(f_n) > \varepsilon$ para todo $n$. Por el lema, existe una sucesión $(y'_n) \subset C(K, T)'$ débimente convergente a 0, tal que $J'_\theta(y'_n) = x'_n$ para cada $n$. Pero entonces

$$y'_n(J_\theta f_n) = x'_n(f_n) > \varepsilon, \qquad \forall n \in IN,$$

lo que prueba que $C(K, T)$ no tiene la P.D.P.

## BIBLIOGRAFIA


[1] P. CEMBRANOS: «On Banach spaces of vector valued continuous functions», *Bull. Aust. Math. Soc.*, **28**, 175-186 (1983).

[2] J. DIESTEL: «Vector measures», *American Math. Soc.*, Providence, R.I. (1977).

[3] J. DIESTEL: «A survey of results related to the Dunford-Pettis property», en «Proceedings of the conference on Integration, Topology and Geometry in Linear spaces», *Amer. Math. Soc.*, Providence, R. I. (1979).

[4] A. GROTHENDIECK: «Sur les aplications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$», *Canad. J. Math.*, **5**, 129-173 (1953).

[5] H. E. LACEY: *The isometric theory of classical Banach spaces*, Springer, Berlín (1974).

[6] M. TALAGRAND: «La proprieté de Dunford-Pettis dans $C(K, E)$ et $L^1$ $(E)$», *Israel J. of Math.*, **44**, 317-321 (1983).



Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense. Madrid