Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las mareas y predicción de las mismas en un cierto lugar

por

Baltasar Rodríguez-Salinas

(Trabajo presentado por el Académico D. Pedro Puig Adam en sesión de 4 de enero de 1953)

1. En ciertas cuestiones de Geodesia, Astronomía y Meteorología se presenta el problema de determinar los coeficientes a_k, b_k y los períodos $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$ de un fenómeno regido por una ley teórica

$$h = h(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \operatorname{sen} \omega_k t). \qquad [1]$$

suponiendo que se han efectuado N mediciones u observaciones en los tiempos $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}$ de la magnitud h, con objeto de predecir ésta con una cierta aproximación en el tiempo t.

Para fijar ideas nos referiremos a un problema concreto, por ejempla al de las mareas, pero conviene advertir, antes de pasar adelante, que en esta nota vamos a determinar con el solo conocimiento de dichas mediciones de la altura h, no solamente los coeficientes a_k, b_k, sino también los períodos T_k [1].

---

[1] Para un estudio sobre las mareas, véase: *Manual of harmonic analysis and prediction of tides*. U. S. Department of Commerce. «Coast and Geodetic Survey». Special publication. N.º 93. Revised (1940) edition.

2. *Aplicación del método de los mínimos cuadrados.*—Supongamos, pues, que se han efectuado N mediciones en los tiempos $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}$ de las alturas del mar en un cierto lugar y a partir de un cierto origen, resultando ser iguales ellas a $h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}$. Entonces nos proponemos representar h mediante una suma

$$a_0 + \sum_{r=1}^{m} (a_k \cos \omega_k t + b_k \operatorname{sen} \omega_k t), \qquad [2]$$

para lo cual determinaremos los coeficientes a_k, b_k y las pulsaciones ω_k por la condición de que la expresión

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{N-1} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos \omega_k t + b_k \operatorname{sen} \omega_k t) - h_r \right]^2 \qquad [3]$$

sea mínima, lo cual nos llevará a resolver el sistema de las $3m + 1$ ecuaciones:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_\mu} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_\mu} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_\mu} = 0; \quad \mu = 1, 2, \ldots, m \qquad [4]$$

en las $3m + 1$ incógnitas

$$a_0, a_1, b_1, \omega_1, \ldots, a_m, b_m, \omega_m.$$

Si las mediciones han sido realizadas en intervalos iguales de tiempo τ, de modo que $t_n = n \tau$ ($t_0 = 0$), tendremos, teniendo presente que

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=0}^{N-1} \cos \omega t_r &= \frac{\operatorname{sen} \frac{N \tau \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau \omega}{2}} \cos \frac{(N-1) \tau \omega}{2} \\ \sum_{r=0}^{N-1} \operatorname{sen} \omega t_r &= \frac{\operatorname{sen} \frac{N \tau \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau \omega}{2}} \operatorname{sen} \frac{(N-1) \tau \omega}{2} \end{aligned} \right\} \qquad [5]$$

y las conocidas fórmulas

$$2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega' t = \operatorname{sen} (\omega - \omega') t + \operatorname{sen} (\omega + \omega') t$$

$$2 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \omega' t = \cos (\omega - \omega') t - \cos (\omega + \omega') t$$

$$2 \cos \omega t \cos \omega' t = \cos (\omega - \omega') t + \cos (\omega + \omega') t$$

que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = \mathrm{N}\, a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sen} \frac{\mathrm{N} \tau \omega_k}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau \omega_k}{2}} \left[a_k \cos \frac{(\mathrm{N}-1) \tau \omega_k}{2} + \right.$$
$$\left. + b_k \operatorname{sen} \frac{(\mathrm{N}-1) \tau \omega_k}{2} \right] - \sum_{r=0}^{\mathrm{N}-1} h_r \qquad [6]$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a_\mu} = & \frac{\operatorname{sen} \frac{\mathrm{N} \tau \omega_\mu}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau \omega_\mu}{2}} a_0 \cos \frac{(\mathrm{N}-1) \tau \omega_\mu}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sen} \frac{\mathrm{N} \tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2}} \left[a_k \cos \frac{(\mathrm{N}-1) \tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2} + \right. \\ & \left. + b_k \operatorname{sen} \frac{(\mathrm{N}-1) \tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sen} \frac{\mathrm{N} \tau (\omega_k + \omega_\mu)}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau (\omega_k + \omega_\mu)}{2}} \left[a_k \cos \frac{(\mathrm{N}-1) \tau (\omega_k + \omega_\mu)}{2} + \right. \\ & \left. + b_k \operatorname{sen} \frac{(\mathrm{N}-1) \tau (\omega_k + \omega_\mu)}{2} \right] - \sum_{r=0}^{\mathrm{N}-1} h_r \cos \omega_\mu t_r = 0, \end{aligned}\right\} (^2) \qquad [7_\mu]$$

---

(2) Los términos correspondientes a $k = \mu$ de esta fórmula, $[8_\mu]$, $[7'_\mu]$, y $[8'_\mu]$ se sustituirán por sus verdaderos valores, por ejemplo:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{\mathrm{N} \tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2}}$$

para $k = \mu$ se sustituirá por N.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial b_\mu} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{N \tau \omega_\mu}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau \omega_\mu}{2}} a_0 \operatorname{sen} \frac{(N-1) \tau \omega_\mu}{2} + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sen} \frac{N \tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2}} \left[- a_k \operatorname{sen} \frac{(N-1) \tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2} + \right. \\
&\left. + b_k \cos \frac{(N-1) \tau (\omega_k - \omega_\mu)}{2} \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sen} \frac{N \tau (\omega_k + \omega_\mu)}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau (\omega_k + \omega_\mu)}{2}} \left[a_k \operatorname{sen} \frac{(N-1) \tau (\omega_k + \omega_\mu)}{2} - \right. \\
&\left. - b_k \cos \frac{(N-1) \tau (\omega_k + \omega_\mu)}{2} \right] - \sum_{r=0}^{N-1} h_r \cos \omega_\mu t_r = 0 .
\end{aligned}\right\} \quad [8_\mu]$$

las cuales admiten las siguientes simplificaciones, cuando N es muy grande y, por consiguiente $\tau = \frac{T}{N-1}$ muy pequeño:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sen} T \omega_k}{T \omega_k} a_0 + \frac{1 - \cos T \omega_k}{T \omega_k} b_k = \frac{1}{T} \int_0^T h(t)\, dt \sim \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} h_r \quad [6']$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} T \omega_\mu}{T \omega_\mu} a_0 &+ \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k \operatorname{sen} T (\omega_k - \omega_\mu) + b_k [1 - \cos T (\omega_k - \omega_\mu)]}{\omega_k - \omega_\mu} + \\
&+ \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k \operatorname{sen} T (\omega_k + \omega_\mu) + b_k [1 - \cos T (\omega_k + \omega_\mu)]}{\omega_\mu + \omega_\mu} = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T h(t) \cos \omega_\mu t\, dt \sim \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_r \cos \omega_\mu t_r
\end{aligned}\right\} \quad [7'_\mu]$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1 - \cos T \omega_\mu}{T \omega_\mu} a_0 &+ \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k [\cos T (\omega_k - \omega_\mu) - 1] + b_k \operatorname{sen} T (\omega_k - \omega_\mu)}{T (\omega_k - \omega_\mu)} + \\
&+ \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k [1 - \cos T (\omega_k + \omega_\mu)] - b_k \operatorname{sen} T (\omega_k + \omega_\mu)}{T (\omega_k + \omega_\mu)} = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T h(t) \operatorname{sen} \omega_\mu t\, dt \sim \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} h_r \operatorname{sen} \omega_\mu t_r
\end{aligned}\right\} \quad [8'_\mu]$$

que se puede simplificar todavía, si además de ser N muy grande lo es también T, pero de forma que $\frac{T}{N}$ sea muy pequeño, pues entonces de [6′], [$7'_\mu$] y [$8'_\mu$], se deduce:

$$a_0 = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(t)\, dt \sim \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} h_r \qquad [6'']$$

$$a_\mu = \lim_{T \to +\infty} \frac{2}{T} \int_0^T h(t) \cos \omega_\mu t\, dt \sim \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} h_r \cos \omega_\mu t_r \qquad [7''_\mu]$$

$$b_\mu = \lim_{T \to +\infty} \frac{2}{T} \int_0^T h(t) \operatorname{sen} \omega_\mu t\, dt \sim \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} h_r \operatorname{sen} \omega_\mu t_r \qquad [8''_\mu]$$

Finalmente, escribiendo en forma explícita las ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_\mu} = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m,$$

tendremos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_\mu} = \sum_{r=0}^{N-1} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos \omega_k t_r + b_k \operatorname{sen} \omega_k t_r \right) - h_r \right] t_r \left[- a_\mu \operatorname{sen} \omega_\mu t_r + \right.$$
$$\left. + b_\mu \cos \omega_\mu t_r \right] = 0, \qquad [9]$$

que se puede simplificar igualmente como hemos hecho anteriormente, teniendo presente que:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r=0}^{N-1} t_r \operatorname{sen} \omega t_r &= - \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{N \tau \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau \omega}{2}} \cos \frac{(N-1) \tau \omega}{2} \right] \\ \sum_{r=0}^{N-1} t_r \cos \omega t_r &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{N \tau \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau \omega}{2}} \operatorname{sen} \frac{(N-1) \tau \omega}{2} \right] \end{aligned} \right\} \qquad [5']$$

Ahora bien, si examinamos el sistema de ecuaciones en

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$$

que se obtiene eliminando los coeficientes

$$a_0, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$$

entre [6], [7], [8] y [9], resulta que es trascendente; por ello es conveniente obtener por un procedimiento cualquiera un valor aproximado $T_1^{(0)}, \ldots, T_m^{(0)}$ de los períodos, y después, con el sistema de ecuaciones lineales [6], [7] y [8], calcular un valor aproximado

$$a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, b_1^{(0)}, \ldots, a_m^{(0)}, b_m^{(0)}$$

de los coeficientes

$$a_0, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m.$$

Si todavía se desea una mayor aproximación en la determinación de los coeficientes y períodos, bastará hacer que

$$\omega_k = \omega_k^{(1)} = \omega_k^{(0)} + \delta\,\omega_k^{(0)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

verifique las ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2} = 0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_m} = 0$$

con los coeficientes $a_k = a_k^{(0)}$ y $b_k = b_k^{(0)}$. Con lo cual resulta, prescindiendo de los términos de orden superior al primero, el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las variaciones $\delta\,\omega_1^{(0)}, \ldots, \delta\,\omega_m^{(0)}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_\mu^{(1)}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_\mu^{(0)}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_\mu^{(0)}\,\partial \omega_k^{(0)}}\,\delta\,\omega_k^{(0)}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m, \qquad [10]$$

que resuelto nos permite calcular las aproximaciones

$$\omega_k^{(1)} = \omega_k^{(0)} + \delta\,\omega_k^{(0)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

de las pulsaciones, con lo cual se podrá obtener igualmente, mediante el sistema de ecuaciones [6], [7] y [8], unas nuevas aproximaciones $a_k^{(1)}$ y $b_k^{(1)}$ de los coeficientes a_k y b_k, estando en las mismas condiciones que anteriormente para obtener una nueva aproximación. Una forma sencilla de ver cuándo no es necesario continuar este método de iteración, consiste en comparar dos o más aproximaciones consecutivas de los coeficientes y de las pulsaciones y darle por terminado cuando las diferencias entre las aproximaciones correspondientes a un mismo coeficiente o pulsación sea inferior al orden de aproximación que se desee en resolver el sistema [6], [7], [8] y [9].

3. *Procedimiento aproximado para la determinación de los períodos* (3).—Ahora vamos a exponer un procedimiento aproximado que puede seguirse para la determinación de los períodos T_k, con lo cual se podrá proceder en la forma indicada anteriormente. Escribamos, pues:

$$h(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos \omega_k t + b_k \operatorname{sen} \omega_k t) + \delta(t). \qquad [11]$$

donde $\delta(t)$ es, por consiguiente, la corrección que hay que sumar a la expresión trigonométrica [2] para obtener $h(t)$. Entonces, tomando para simplificar como unidad de tiempo el intervalo transcurrido entre dos mediciones consecutivas, e. d. $\tau = 1$, y llamando

$$H(t) = \sum_{r=0}^{n-1} h(t + rp),\ \Delta(t) = \sum_{r=0}^{n-1} \delta(t + rp); \quad t = 0, 1, \ldots, p-1, \qquad [12]$$

donde p es un número entero, $n = E\left(\frac{N}{P}\right)$ $\left(= \text{parte entera de } \frac{N}{P}\right)$ tendremos:

$$H(t) = n a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{r=0}^{N-1} \cos \omega_k (t + rp) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{r=0}^{N-1} \operatorname{sen} \omega_k (t + rp) + \Delta(t),$$

y por tanto:

$$H(t) = n a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sen} \frac{n p \omega_k}{2}}{\operatorname{sen} \frac{p \omega_k}{2}} \left[a_k \cos \omega_k \left(t + \frac{N-1}{2} p\right) + \right.$$

$$\left. + b_k \operatorname{sen} \omega_k \left(t + \frac{N-1}{2} p\right)\right] + \Delta(t). \qquad [13]$$

---

(3) Véase E. T. Whittaker and G. Robinson: *The Calculus of Observations* (London, 1926), págs. 345-360.

De [11] y [13] se deducen si llamamos, respectivamente σ, σ_0, Σ, Σ_M, las desviaciones típicas (o errores medios cuadráticos) de h, δ, H y $M = \frac{H}{n}$, que

$$\sigma^2 = a_0{}^2 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k{}^2 + b_k{}^2}{2} + \sigma_0{}^2 \qquad [14]$$

$$\Sigma^2 = n^2\, a_0{}^2 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k{}^2 + b_k{}^2}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \dfrac{n\,p\,\pi}{T_k}}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{p\,\pi}{T_k}} + n\,\sigma_0{}^2 \qquad [15]$$

y

$$\Sigma_M^2 = \frac{\Sigma^2}{n^2} = a^2{}_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k{}^2 + b_k{}^2}{2\,n^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \dfrac{n\,p\,\pi}{T_k}}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{p\,\pi}{T_k}} + \frac{\sigma_0^2}{n} \qquad [16]$$

con lo cual el cuadrado de la razón de correlación η vale

$$\eta^2 = \frac{\Sigma_M^2}{\sigma^2} = \frac{a_0{}^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k{}^2 + b_k{}^2}{2\,n^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \dfrac{n\,p\,\pi}{T_k}}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{p\,\pi}{T_k}} + \frac{\sigma_0^2}{n}}{a_0^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k{}^2 + b_k{}^2}{2} + \sigma_0{}^2}$$

de donde resulta para $p = T_\mu$, supuesto $T_\mu : T_k$ no entero para $\mu \pm k$, que

$$\eta^2 = \frac{a_0^2}{\sigma^2} + \frac{a_\mu^2 + b_\mu^2}{2\,\sigma^2} + \frac{\sigma_0^2}{n\,\sigma^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

y para $p = T_\mu \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)$

$$\eta^2 = \frac{a_0^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma_0^2}{n\,\sigma^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Por consiguiente, para n muy grande será

$$\left.\begin{aligned} \eta^2 &\sim \frac{a_0^2}{\sigma^2} + \frac{a_\mu^2 + b_\mu^2}{2\,\sigma^2} &\quad \text{para} \quad p &= T_\mu \\ \eta^2 &\sim \frac{a_0^2}{\sigma^2} &\quad \text{para} \quad p &= T_\mu\left(1 \pm \frac{1}{n}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [17]$$

lo cual expresa que η presenta un máximo relativo entre

$$p = T_\mu\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad p = T_\mu\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

siendo tanto mayor la oscilación en este intervalo cuando mayor sea la amplitud $\sqrt{a^2_\mu{}' + b^2_\mu}$ del término

$$a_\mu \cos \omega_\mu\, t + b_\mu \operatorname{sen} \omega_\mu\, t.$$

De aquí se deduce el siguiente método práctico para obtener los períodos T_k.

Elegido un número p, se colocan los números

$$h_0, h_1, \ldots, h_{N+1} \qquad h_r = h\,(t_r)$$

en la siguiente forma:

h_0	h_1	...	h_{p-1}
h_p	h_{p+1}	...	h_{2p-1}
....	....	....	....
$h_{(n-1)p}$	$h_{(n-1)p+1}$	...	h_{np-1}

de este modo, sumando por columnas, se calcularán $H_0, H_1, \ldots, H_{p-1}$, y dividiendo por n los valores medios

$$M_0, M_1, \ldots M_{p-1} \quad \text{y} \quad M = \frac{M_0 + \ldots + M_{p-1}}{p}$$

y a continuación σ y Σ_M mediante las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{np} \sum_{r=0}^{np-1} (h_r - M)^2 \\ \Sigma_M^2 &= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{p-1} (M_r - M)^2 \end{aligned}\right\} \qquad [18]$$

y, finalmente, η por medio de

$$\eta = \frac{\Sigma_M}{\sigma} \tag{19}$$

Con lo cual, dibujando en un sistema de coordenadas cartesianas la curva lugar de los puntos (p, η) mediante un gran número de puntos calculados como acabamos de exponer, se obtendrán los períodos T_k en forma aproximada como los valores de p, para los cuales η sea un máximo relativo. La curva así dibujada se llama por esta razón periodograma.

4. *Aplicación de la transformación de Laplace para determinación de los coeficientes* a_k, b_k *y de los períodos* T_k.—En primer lugar, veamos cómo se puede resolver utilizando la transformación de Laplace [4] el sistema de ecuaciones:

$$h(t_r) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos \omega_k t_r + b_k \operatorname{sen} \omega_k t_r), t_r = r\tau, \qquad r = 0, 1, \ldots, N-1 \ (\geqslant 3m),$$

para lo cual, aplicando dicha transformación, tendremos:

$$\overline{h}(x) = \int_0^\infty e^{-xt} h(t)\, dt = \frac{a_0}{x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k x + b_k \omega_k}{x^2 + \omega_k^2} \tag{20}$$

por lo que, por consiguiente, llamando

$$\frac{\alpha_0 x^{2m} + \alpha_1 x^{2m-1} + \ldots + \alpha_{2m}}{x(x^{2m} + \beta_1 x^{2m-2} + \ldots + \beta_m)} = \frac{a_0}{x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k x + b_k \omega_k}{x^2 + \omega_k^2} \tag{21}$$

y calculando $f(x)$ para $x = x_0, x_1, \ldots, x_{3m}$, resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left(x_r^{2m} + \beta_1 x_r^{2m-2} + \ldots + \beta_m\right) x_r f(x_r) = \alpha_0 x_r^{2m} + \alpha_1 x_r^{2m-1} + \ldots + \alpha_{2m}$$

---

(4) G. Doetsch: *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. (Berlin, 1937), pág. 27.

F. Bernstein: *Ueber die numerische Ermittlung verborgener Periodizitäten*. «Zeitschrift für angew. math. und mechanik» (1927) Bd. 7, S. 441-444.

$r = 0, 1, 2, \ldots, 3\,m$, en las incógnitas

$$\beta_1, \ldots, \beta_m, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m},$$

que una vez resuelto nos permite calcular

$$a_0, a_1, b_1, \omega_1, \ldots, a_m, b_m, \omega_m$$

efectuando la descomposición [21]. Para lo cual se calcularán previamente $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ resolviendo la ecuación algebraica

$$\omega^{2m} - \beta_1\, \omega^{2m-2} + \ldots + (-1)^m \beta_m = 0. \qquad [23]$$

Ahora bien, existe un inconveniente para que se pueda aplicar este método, y es que si, como hemos supuesto anteriormente, sólo se conocen los valores

$$h_r = h\,(t_r), \qquad r = 0, 1, \ldots, N-1$$

no se puede calcular exactamente

$$\int_0^\infty e^{-xt}\, h\,(t)\, d\, t\,;$$

sin embargo, se puede calcular aproximadamente esta integral con cualquier método de integración numérica o sencillamente aplicando la definición de integral, sustituyendo

$$\int_0^\infty e^{-xt}\, h\,(t)\, d\, t \quad \text{por} \quad \sum_{r=0}^{N-1} e^{-x t_r}\, h_r,$$

una vez tomado τ suficientemente pequeño. En nuestro caso se presenta además otro inconveniente, y es que realmente el sistema de ecuaciones que hay que considerar es el:

$$h\,(t_r) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos \omega_k\, t_r + b_k \operatorname{sen} \omega_k\, t_r) + \delta\,(t_r)\,; \quad r = 0, 1, \ldots, N-1 \quad [24]$$

y aunque sea supuesta válida [1] con la convergencia uniforme y, por consiguiente, que para m suficientemente grande $|\,\delta\,(t)\,| < \varepsilon$, y por tanto:

$$|\bar{\delta}(x)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-xt}\,\delta(t)\,dt \right| < \varepsilon \int_0^{\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{\varepsilon}{x},$$

pudiera muy bien ocurrir que aunque se verifique [20], salvo un error de $\pm \frac{\varepsilon}{x}$ el error producido en los coeficientes a_k, b_k y en las pulsaciones ω_k, al resolver el sistema [22] creciese con m a partir de un cierto valor de m. Sin embargo, se puede suponer $\delta(t) = 0$ y hacer una interpolación, reservándose el derecho de comprobar si al aumentar m desde un cierto lugar a_k, b_k y ω_k van acercándose a ciertos valores.

5. *Utilización del método de los mínimos cuadrados una vez efectuada la transformación de Laplace.*—Vamos a terminar esta nota exponiendo un método que aunque da lugar a un sistema de ecuaciones más complicado que el [22], sin embargo, es de mayor garantía que aquél.

Llamando igualmente que en el núm. 4:

$$\bar{h}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\,h(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \bar{\delta}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\,\delta(t)\,dt,$$

tendremos

$$\bar{h}(x) = \frac{a_0}{x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k x + c_k}{x^2 + \omega_k^2} + \bar{\delta}(x), \qquad c_k = b_k\,\omega_k. \tag{25}$$

Pues bien, ahora vamos a determinar los números a_k, b_k y ω_k, dado un peso $p(x)$, por la condición de que

$$\Psi = \frac{1}{2}\int_{X_0}^{X_1} p(x)\,\bar{\delta}(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{X_0}^{X_1} p(x) \left[\frac{a_0}{x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k x + c_k}{x^2 + \omega_k^2} - \bar{h}(x) \right]^2 dx,$$

sea mínimo. Para escribir abreviadamente las ecuaciones

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a_0} = 0; \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial a_\mu} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial c_\mu} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \omega_\mu} = 0; \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m$$

a que tal condición da lugar, tomemos $p(x) = x^\alpha$ y llamemos

$$S^{(\alpha)} = \int_{X_0}^{X_1} x^{\alpha-2}\, dx = \frac{X_1^{\alpha-1} - X_0^{\alpha-1}}{\alpha - 1}, \qquad I_k^{(\alpha)} = \int_{X_0}^{X_1} \frac{x^{\alpha-1}}{x^2 + \omega_k^2}\, dx$$

$$A_{\mu,k}^{(\alpha)} = \int_{X_0}^{X_1} \frac{x^\alpha\, dx}{(x^2 + \omega_\mu^2)(x^2 + \omega_k^2)}, \qquad B_{\mu,k}^{(\alpha)} = \int_{X_0}^{X_1} \frac{x^\alpha\, dx}{(x^2 + \omega_\mu^2)^2 (x^2 + \omega_k^2)},$$

resultando entonces

$$S^\alpha a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(I_k^{(\alpha+1)} a_k + I_k^{(\alpha)} c_k\right) = \int_{X_0}^{X_1} x^{\alpha-1}\, \bar{h}(x)\, dx \qquad [26]$$

$$I_\mu^{(\alpha+1)} a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(A_{\mu,k}^{(\alpha+2)} a_k + A_{\mu,k}^{(\alpha+1)} c_k\right) = \int_{X_0}^{X_1} \frac{x^{\alpha+1}}{x^2 + \omega_\mu^2}\, h(x)\, dx \qquad [27_\mu]$$

$$I_\mu^{(\alpha)} a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(A_{\mu,k}^{(\alpha+1)} a_k + A_{\mu,k}^{(\alpha)} c_k\right) = \int_{X_0}^{X_1} \frac{x^\alpha}{x^2 + \omega_\mu^2}\, \bar{h}(x)\, dx \qquad [28_\mu]$$

$$\left(A_{\mu,\mu}^{\alpha} a_\mu + A_{\mu,\mu}^{(\alpha-1)} c_\mu\right) a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(B_{\mu,k}^{(\alpha+2)} a_\mu a_k + B_{\mu,k}^{(\alpha+1)} (a_\mu c_k + a_k c_\mu) +\right.$$

$$\left. + B_{\mu,k}^{(\alpha)} c_\mu c_k\right) = \int_{X_0}^{X_1} \frac{a_\mu x + c_\mu}{(x^2 + \omega_\mu^2)^2}\, x^\alpha\, \bar{h}(x)\, dx. \qquad [29_\mu]$$

Es fácil ver que se pueden expresar $A_{\mu,k}^{(\alpha)}$ y $B_{\mu,k}^{(\alpha)}$ en función de las integrales $I_k^{(\alpha)}$ en la forma siguiente:

$$A_{\mu,k}^{(\alpha)} = \frac{\omega_k^2 I_k^{(\alpha-1)} - \omega_\mu^2 I_\mu^{(\alpha-1)}}{\omega_k^2 - \omega_\mu^2} = \frac{I_\mu^{(\alpha+1)} - I_k^{(\alpha+1)}}{\omega_k^2 - \omega_\mu^2}, \qquad A_{\mu,\mu}^{(\alpha)} = -\frac{1}{2\omega_\mu} \frac{\partial I_\mu^{(\alpha+1)}}{\partial \omega_\mu}$$

$$B_{\mu,k}^{(\alpha)} = \frac{\omega_k^2 A_{\mu,k}^{(\alpha-2)} - \omega_\mu^2 A_{\mu,\mu}^{(\alpha-2)}}{\omega_k^2 - \omega_\mu^2} = \frac{A_{\mu,\mu}^{(\alpha)} - A_{\mu,k}^{(\alpha)}}{\omega_k^2 - \omega_\mu^2}, \qquad B_{\mu,k}^{(\alpha)} = -\frac{1}{2\omega_\mu} \frac{\partial A_{\mu,k}^{(\alpha)}}{\partial \omega_\mu}$$

Si se ha tomado el origen de las alturas h de forma que se sepa de antemano que $a_0 = 0$, entonces, prescindiendo de la ecuación [26], tomando $X_0 = 0$ y X muy grande, tendremos:

$$I_k^{(\alpha+2)} + \omega_k^2 I_k^{(\alpha)} = \int_0^X x^{\alpha-1}\, dx = \frac{X^\alpha}{\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

e. d.

$$I_k^{(\alpha+2)} = \frac{X^\alpha}{\alpha} - \omega_k^2 I_k^{(\alpha)} \qquad \text{para} \qquad \alpha > 0,$$

y como además

$$I_k^{(2)} = \int_0^X \frac{x\,d\,x}{x^2 + \omega_k^2} = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{X^2}{\omega_k^2}\right),$$

y

$$I_k^{(\alpha)} \sim \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,d\,x}{x^2+\omega_k^2} = \frac{\omega_k^{\alpha-2}}{2} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t+1}\,d\,t = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi\alpha}{2}}\,\omega_k^{\alpha-2}$$

para $0 < \alpha < 2$, se podrán expresar asintóticamente todas las $I_k^{(\alpha)}$ para X muy grande y, por consiguiente, simplificar el sistema formado por las ecuaciones [27_μ], [28_μ] y [29_μ], $\mu = 1, 2, \ldots, m$, siendo conveniente para mayor sencillez tomar α, de modo que $0 < \alpha < 1$.

Para la resolución práctica del sistema de ecuaciones ahora obtenido se sustituirán en las integrales que aparecen en las ecuaciones [26], [27_μ], [28_μ] y [29_μ], de forma análoga que hemos indicado en el núm. 4, $h(x)$ por

$$\sum_{r=0}^{N-1} e^{-x t_r} h_r.$$

Naturalmente, con este sistema de ecuaciones se puede proceder en la forma que ya indicamos con el sistema [6], [7], [8] y [9].

Finalmente, supuesto $\alpha > 1$, vamos a establecer una relación entre

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \delta(t)^2\,d\,t \qquad \text{y} \qquad \bar{\sigma}_x^2 = \frac{\int_0^X x^\alpha\,\bar{\delta}(x)^2\,d\,x}{\int_0^X x^\alpha\,d\,x}.$$

para lo cual tengamos presente que $\delta(t)$ es acotada, e. d. $|\delta(t)| < K$ ó $\delta(t) = 0(1)$, pues entonces, aplicando la desigualdad de Schwarz, resulta:

$$|\bar{\delta}(x)| = \left|\int_0^\infty e^{-xt}\,\delta(t)\,dt\right| \leq \int_0^T e^{-xt}\,|\delta(t)|\,dt + O\left(\int_T^\infty e^{-xt}\,dt\right) \leq$$

$$\leq \left(\int_0^T e^{-2xt}\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \delta(t)^2\,dt,\right)^{1/2} + O\left(\frac{e^{-xT}}{x}\right) = \sqrt{\frac{T}{2x}}\;\sigma_T + O\left(\frac{e^{-xT}}{x}\right),$$

de lo cual se deduce elevando al cuadrado y teniendo presente

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \delta(t)^2\,dt < K^2,$$

que

$$\bar{\delta}(x)^2 \leq \frac{T}{2x}\,\sigma_T^2 + O\left(\frac{T^{1/2}}{x^{3/2}}\,e^{-xT}\right) + O\left(\frac{e^{-xT}}{x^2}\right),$$

y, por consiguiente:

$$\int_0^X x^\alpha\,\bar{\delta}(x)^2\,dx \leq \frac{T\,\sigma_T^2}{2}\,\frac{X^\alpha}{\alpha} + O\,(T^{1-\alpha}).$$

pues

$$\int_0^X x^{\alpha-\frac{3}{2}}\,e^{-xT}\,dx < \int_0^\infty e^{-xT}\,x^{\alpha-\frac{3}{2}}\,dx = \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\,T^{\frac{1}{2}-\alpha}$$

y

$$\int_0^X x^{\alpha-2}\,e^{-xT}\,dx < \int_0^\infty e^{-xT}\,x^{\alpha-2}\,dx = \Gamma\,(\alpha-1)\,(2\,T)^{1-\alpha}$$

y, finalmente:

$$\bar{\sigma}_x^2 \leq \frac{\alpha+1}{2\alpha}\,\frac{T}{X}\,\sigma_T^2 + O\left(\frac{T^{1-\alpha}}{X^{1+\alpha}}\right) \tag{30}$$

y en particular para $X = T$:

$$\bar{\sigma}_T^2 \leq \frac{\alpha+1}{2\alpha}\,\sigma_T^2 + O\left(\frac{1}{T^{2\alpha}}\right)$$

6. De forma análoga que hemos utilizado la transformación de Laplace

$$\mathrm{L}\,[h] = \int_0^\infty e^{-xt}\, h\,(t)\, d\,t$$

en los números 4 y 5, se puede utilizar la transformación:

$$h^*(x) = \wedge\,[h] = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-xt}\, h\,(t), \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots).$$

Obteniéndose entonces, por ejemplo, en lugar de la ecuación [20] la

$$h^*\,(x) = \frac{a_0}{1 - e^{-x}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k\,(e^x - \cos\omega_k) + b_k \operatorname{sen}\omega_k}{2\,(\mathrm{C}\,h\,x - \cos\omega_k)} \tag{20*}$$

con lo cual si $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, poniendo

$$\mathrm{X} = 2\,\mathrm{S}\,h\,\frac{x}{2} = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}, \quad \Omega_k = 2 \operatorname{sen}\frac{\omega_k}{2}$$

$$\mathrm{C}_k = b_k \operatorname{sen}\omega_k - a_k \cos\omega_k, \qquad \mathrm{B}_k = \frac{\mathrm{C}_k}{\Omega_k}$$

y

$$\mathrm{H}\,(\mathrm{X}) = \mathrm{H}\left(2\,\mathrm{S}\,h\,\frac{x}{2}\right) = h^*\,(x),$$

se obtiene

$$\mathrm{H}\,(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{X}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{C}_k}{\mathrm{X}^2 + \Omega_x^2}$$

que es del mismo tipo que la ecuación [20], para $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

SUMMARY

In some questions of Geodesy and Astronomy, i. e. in tides and in the determination of orbits of photometric double stars, it is found several phenomena ruled by a theoretic law

$$h(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \operatorname{sen} \omega_k t). \qquad [1]$$

In this paper, supposing known N values of $h(t)$, at the times $t_0, \ldots, t_{N-1}$ a study is made on the fitting of $h(t)$ by the use of a trigonometrical polynomial

$$a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos \omega_k t + b_k \operatorname{sen} \omega_k t) \qquad [2]$$

using the method of least squares, and following Laplace's transformation, and likewise a combination of both methods.