REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XXXIV

(Publicado en agosto de 1940)

CUADERNO SEGUNDO

MADRID

Domicilio de la Academia: VALVERDE, 24

TELEFONO 12529

1940

Artículo 39 de los Estatutos de la Academia:

«*La Academia no se hace solidaria de las opiniones cuestionables, en materia científica, de sus individuos. Cada autor es responsable de las proposiciones y asertos que contengan los escritos del mismo que la Academia publique.*»

C. BERMEJO, IMPRESOR.—FERNANDO VI, 13. TELEFONO 31199.—MADRID

Sobre el problema de la hiperconvergencia de las series de Dirichlet cuyas sucesiones de exponentes poseen densidad máxima infinita

por

Sixto Ríos

1.—Un teorema fundamental de V. Bernstein (1) demuestra que en las series de Dirichlet:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuya sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}$ tiene densidad máxima finita, las abscisas de holomorfía e hiperconvergencia son iguales, resultado que ha sido generalizado a algunas clases de series de Dirichlet, cuyos exponentes forman sucesiones de densidad máxima infinita (2). «En el caso general no se sabe si la abscisa de hiperconvergencia (estrecha o no) debe ser necesariamente igual a la abscisa de holomorfía, o puede suceder que aquélla sea superior a ésta. Del mismo modo, no se sabe si al menos una cierta parte de la banda comprendida entre las rectas de convergencia y holomorfía (cuando dicha banda no es nula) es seguramente un dominio de hiperconvergencia de la serie, o puede suceder que ninguna parte de dicha banda sea un dominio de hiperconvergencia de la serie» (3).

El objeto de la primera parte de esta Memoria es resolver este problema de V. Bernstein, demostrando que *en las series de Dirichlet*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

(1) Lecons sur les progrés récents de la théorie des de Dirichlet (París, 1933, Colección Borel), pág. 141.

(2) Libro citado, pág. 176.

(3) Esta cuestión se encuentra así planteada en el libro de V. Bernstein citado, págs. 193-194.

cuya sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}$ *tiene densidad máxima infinita, la abscisa de hiperconvergencia (estrecha o no) puede ser mayor o igual que la de holomorfía.*

Demostraremos que hay tres tipos distintos de series de Dirichlet, cuyas sucesiones de exponentes poseen densidad máxima infinita: *a)* No hay hiperconvergencia en ninguna porción del semiplano de holomorfía, *b)* hay hiperconvergencia en todo el semiplano de holomorfía y *c)* hiperconvergencia en una banda parcial del semiplano de holomorfía.

El caso *b)* es el único caso que se presenta en las series de sucesión de exponentes de densidad máxima finita estudiadas por Bernstein.

En la segunda parte de esta Memoria demostramos algunos teoremas que determinan las abscisas de holomorfía e hiperconvergencia de estas series.

2.—Siguiendo la notación de Bernstein, designaremos por H, O, S, C, las abscisas de holomorfía, hiperconvergencia, hiperconvergencia estrecha y convergencia, respectivamente (4). Además, para abreviar el lenguaje, diremos serie (D) cuando queramos decir serie de Dirichlet, serie (D*) en lugar de serie de Dirichlet, cuyos exponentes forman una sucesión de densidad máxima finita, y serie (D**) en vez de serie de Dirichlet, cuya sucesión de exponentes es de densidad máxima infinita.

Vamos a demostrar que para la serie

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-s \log n} \qquad [1]$$

cuyos exponentes $\lambda_n = \log n$ forman una suc esión de densidad máxima finita se verifica:

$$-\infty = H < O = S = C = 0$$

La clásica fórmula de Cahen (5) nos da

$$C \leq \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n+1} \right|}{\log m} = 0$$

y como para s = 0 la serie [1] se reduce a la

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

que no es convergente, podemos afirmar que $C = 0$.

(4) Loc. cit., págs. 32-33.

(5) Véase, p. e., el libro de Bernstein citado, pág. 5.

La abscisa de holomorfía es $H = -\infty$ porque $f(s)$ es una función entera (6).

Para demostrar que $S = O = 0$ bastará probar que cualquier sucesión parcial de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{\alpha}$$

obtenida haciendo en [1] $s = -\alpha$ es divergente cualquiera que sea el número α real y positivo.

Más aún, basta considerar los valores de α tales que $0 < \alpha < 1$, puesto que en el razonamiento precedente no intervienen más que los valores de α próximos a cero.

En efecto, para las sumas de orden par se tiene, si suponemos $0 < \alpha < 1$:

$$s_{2m} = -\sum_{n=1}^{m} \left[(2n)^{\alpha} - (2n-1)^{\alpha}\right] = -\sum_{n=1}^{m} (2n)^{\alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{\alpha}\right] =$$

$$= -\sum_{n=1}^{m} (2n)^{\alpha} \left[\frac{\alpha}{2n} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!(2n)^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!(2n)^3} - \cdots\cdots\right] <$$

$$< -\sum_{n=1}^{m} (2n)^{\alpha} \frac{\alpha}{2n} = -\alpha\, 2^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

luego $\lim\limits_{m \to \infty} s_{2m} = -\infty$.

Para las sumas impares tenemos:

$$s_{2m+1} = 1 + \sum_{n=1}^{m} \left[(2n+1)^{\alpha} - (2n)\right] = 1 + \sum_{n=1}^{m} (2n)^{\alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\alpha} - 1\right] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{m} (2n)^{\alpha} \left[1 + \binom{\alpha}{1} \frac{1}{2n} + \binom{\alpha}{2} \frac{1}{(2n)^2} + \cdots\cdots\right] >$$

$$> 1 + \sum_{n=1}^{m} (2n)^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\alpha}{(2n)^{1-\alpha}}$$

luego $\lim\limits_{m \to \infty} s_{m+1} = +\infty$.

(6) La demostración se funda en la relación $f(s) = (1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)$ (Hardy-Riesz, The general Theory of Dirichlet series, pág. 10). Más sencillo es observar que la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-ns}$$

es la función $\dfrac{1}{1+e^{-s}}$ holomorfa en el origen y aplicar el teorema C) de Hardy, recordado en el párrafo 3 de esta Memoria. Así se prueba también inmediatamente que la función $\zeta(s)$ es regular en todo el plano, salvo un polo simple en el punto $s = 1$.

Resulta, pues, que una sucesión parcial de s_n tiene límite $+\infty$ si consta sólo de sumas pares; límite $-\infty$ si sólo tiene sumas impares y carece de límite en el caso general.

De aquí resulta que la serie [1] no puede tener ninguna sucesión parcial convergente en los puntos considerados, luego $S = \dot{O} = 0$.

Como vimos que $H = -\infty$, $C = 0$ resulta que la serie [1] es una serie (D**) que pertenece a la clase *a)*, es decir, tal que no presenta hiperconvergencia en ninguna porción del semiplano de holomorfía.

Vamos a demostrar que para la serie (D**)

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\lambda_n s} \qquad [2]$$

cuya sucesión de exponentes es:

$$\lambda_{2n-1} = ln, \quad \lambda_{2n} = ln + \left[e^{-n} - e^{-n-1}\right]$$

se verifica:

$$-\infty = H = O = S < C = 0.$$

La fórmula de Çahen nos da:

$$C \leq \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n+1} \right|}{\lambda_n} = 0$$

y como para $s = 0$ se obtiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

que no es convergente, podemos concluir que $C = 0$.

Si en la serie [2] se agrupan dos términos de lugares $2n-1$ y $2n$, resulta la serie de polinomios exponenciales,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-s\,ln} - e^{-s(ln + e^{-n} - e^{-n-1})}\right] \qquad [3]$$

que, según vamos a demostrar, converge uniformemente en todo círculo $/ s / < R$ cualquiera que sea R finito.

En efecto, se verifica:

$$\left|P_n(s)\right| = \left|e^{-s\,l\,n}\right| . \left|1 - e^{-s\,(e^{-n} - e^{-n-1})}\right| \leq \left|e^{-s\,l\,n}\right| .$$
$$\left|s\,(e^{-n} - e^{-n-1})\right| . e^{|s|\,(e^{-n} - e^{-n-1})}$$

luego si suponemos $/ s / < R$, se verifica desde un valor de $n = N$ en adelante:

$$e^{|s|\,.\,(e^{-n} - e^{-n-1})} < 2$$

desde dicho valor N, es decir, los términoos de la serie de polinomios [3] toman en el círculo $/ s / < R$ valores menores que los de la serie de Dirichlet:

$$\sum_{n=N}^{\infty} 2\,R\,(e^{-n} - e^{-n-1})\,e^{-s\,l\,n}$$

cuya abscisa de convergencia dada por la fórmula de Pincherle (7) es:

$$C = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{l\left|\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} (e^{-u} - e^{-n-1})\right|}{l\,(m+1)} = -\infty$$

Resulta, pues, que la serie de polinomios [3] converge absoluta y uniformemente en todo círculo $/ s / < R$, cualquiera que sea R, y, por tanto, para la serie de Dirichlet [2] se verifica que el semiplano de hiperconvergencia es todo el plano s, es decir:

$$H = O = S = -\infty$$

como se quería demostrar.

Tenemos, pues, un ejemplo de serie (D**) de clase *b)*, es decir, tal que los semiplanos de hiperconvergencia y holomorfía coinciden.

Consideremos, finalmente, la serie (D**)

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,e^{-\lambda_n\,s} \qquad [4]$$

cuyos exponentes son

$$\lambda_{2n-1} = l\,n \quad , \quad \lambda_{2n} = l\,n + e^{-n} - e^{-n-1}$$

(7) Véase Hardy-Riesz, nota al pie de la pág. 170.

y los coeficientes

$$a_{2n-1} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad , \quad a_{2n} = 1$$

La serie [4] se ha obtenido sumando la serie [2] con la serie que resulta de la [1] mediante el cambio de variable $s / s+1$, es decir, con la serie

$$f^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-sn} \qquad [1^*]$$

Desde luego, para esta serie [1*] se verifica que

$$-\infty = H < S = O = C = -1$$

lo que resulta como consecuencia inmediata de lo establecido para la serie [1].

Debemos observar que la serie [4] no se ha obtenido sumando término a término, como ordinariamente se hace, las series [1*] y [2], pues así no resultaría una serie de Dirichlet, sino del siguiente modo: Si designamos por $f_n(s)$ las sumas parciales de la serie [1*] y por $\varphi_n(s)$ las de [2], las sumas parciales de [4] son:

$$\psi_1 = f_1^* + \varphi_1 \, , \, \psi_2 = f_1 + \varphi_2 \, , \, \psi_3 = f_2^* + \varphi_3 \, , \, \psi_4 = f_2 + \varphi_4 \, , \, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots , \psi_{2n-1} = f_n + \varphi_{2n-1} \, , \, \psi_{2n} = f_n^* + \varphi_{2n} \, , \, \ldots\ldots$$

Ahora bien; en los puntes del segmento $-1 < R(s) < 0$, $I(s) = 0$, es divergente, según hemos visto la serie [2] y la [1*] convergente, luego la sucesión total $\psi_n(s)$ es divergente. En el semiplano $R(s) > 0$ son ambas convergentes y, por tanto, también la [4], luego la abscisa de convergencia de [4] es $C = 0$.

Vimos que la sucesión $\varphi_{2n}(s)$ converge, uniformemente, en todo recinto finito del plano, y la $f_n^*(s)$ en todo recinto finito interior al semiplano $R(s) > -1$, luego la sucesión $\psi_{2n}(s) = f_n^*(s) + \varphi_{2n}(s)$ parcial de $\psi_n(s)$ convergerá en todo recinto finito contenido en el semiplano $R(s) > -1$. Como cualquier sucesión parcial de $f_n^*(s)$, según se vió al estudiar el ejemplo primero, es divergente en el segmento $R(s) < -1$, $I(s) = 0$, resulta que $0 = S = -1$.

Por ser $f^*(s)$ y $\varphi(s)$ holomorfas, en todo el plano es $H = -\infty$ para la serie que define $\psi(s) = f^*(s) + \varphi(s)$.

Tenemos, pues, un ejemplo de serie (D**) del tipo *c;* es decir, tal que posee hiperconvergencia solamente en una parte del semiplano de holomorfía.

3.—Recordamos a continuación algunos teoremas conocidos que se utilizan en el § 4 de esta Memoria.

Los teoremas I, III y VII de la tesis de Berstein (8), se pueden resumir en el siguiente, que se deduce de aquéllos mediante sencillas modificaciones.

A) Sea la serie (D*)

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

de abscisa de convergencia cero y cuya sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}$ es medible y de densidad d. Una condición necesaria y suficiente para que $f(s)$ sea holomorfa en el interior del triángulo isósceles, cuya base es el segmento $|t| < l$ del eje imaginario, vértice situado en el eje real negativo y ángulos en la base iguales a α, es que exista una función $\varphi(z)$ de la variable compleja z, tal que, 1.° sea holomorfa en el sector $|\arg z| \leq \alpha <$ y satisfaga en él, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ y para $|z|$ suficientemente grande la condición

$$|\varphi(r e^{i\theta})| < e^{r[(\pi d - l)\operatorname{sen}|\theta| + \varepsilon]}$$

y 2.° para todo n sea: $\varphi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n)$, en que

$$C(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

Además, si la abscisa de convergencia es cero y $l > \pi d$ las condiciones anteriores son necesarias y suficientes para la holomorfía de la función $f(s)$ en el semiplano

$$R(s) > -(l - \pi d)\, tg\, \alpha .$$

Los teoremas I y II de una Memoria de V. Bernstein (9) se resumen en el siguiente

B) Para toda serie (D*):

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

se verifica $H = S = \theta$. Si es $H < C$ se puede poner la serie en forma de serie de Dirichlet de coeficientes variables

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(s) e^{-\lambda'_k s}$$

---

(8) Sur les singularites des séries de Dirichlet (Rend. R. Inst. Lombardo, t. 63, 1930, p. 321-413).

(9) Sur l'ultraconvergence d'une classe de séries de Dirichlet (Comm. Math. Helv., t. 4, 1932).

cuyos exponentes λ'_k son tales que $\lambda'_{k+1} - \lambda'_k > q > 0$, mientras los coeficientes variables $A_k(s)$ verifican para k suficientemente grande y por pequeño que sea ω la condición

$$| A_k(s) | < e^{(H+\omega)\lambda'_k}$$

cuando $s = \sigma + it$ es interior a cualquier semibanda $\sigma > -\sigma_0$, $|\pi| < h$.

Enunciemos, finalmente, el siguiente teorema de Hardy (10):

C) Si la serie (D)

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

posee un dominio de convergencia, y si la función:

$$F(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

es holomorfa en el origen, $f(s)$ es una función entera de s.

4.—Vamos a demostrar ahora algunos teoremas que determinan las abscisas de hiperconvergencia y de holomorfía (11) de las series (D**).

I.—*Sea*

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad [5]$$

*una serie (D**), tal que la sucesión* $\{ e^{\lambda_n} \}$ *sea medible y de densidad* d *y tal que*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log | a_n |}{e^{\lambda_n}} = 0$$

Es condición suficiente para que la serie [5] *admita una sucesión parcial hiperconvergente en todo el plano que exista una función* $\psi(z)$ *holomorfa en un sector:*

$$| \arg z | \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \quad ,$$

(10) The application to Dirichlet series of Borel'y exponentials method of summation (Proc. London Math. Soc., t. 8, 1910, pág. 277).

(11) Una fórmula general para la determinación de la abscisa de holomorfía ha sido dada en mi tesis «Problemas de hiperconvergencia» (Rev. de la R. Academia de Ciencias, 1936, pág. 27). Dos años después ha encontrado, independientemente, Dvoretzsky, una fórmula análoga. Véase su nota Sur l'abscisse d'holomorphie... Comptes rendos, t. 206, pág. 970).

y tal que se verifique en este sector para $|z| = r$ *suficientemente grande y por pequeño que sea* $\varepsilon > 0$ *la condición*

$$|\psi(r e^{i\theta})| < e^{-r[(l-\pi d)\operatorname{sen}|\theta| - \varepsilon]}$$

y que además para todo valor de n *sea:*

$$\psi(e^{\lambda_n}) = a_n C'(e^{\lambda_n})$$

siendo

$$C(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{e^{2\lambda_n}}\right)$$

El teorema A aplicado a la serie (D*):

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-e^{\lambda_n} s} \qquad [6]$$

nos dice que ésta posee una sucesión parcial.

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(s) = \sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{n=n_{k-1}}^{n_k} a_n e^{-e^{\lambda_n} s}\right]$$

hiperconvergente en el semiplano

$$R(s) > -h \quad , \quad \left[h = (l - \pi d)\, tg\, \alpha > 0\right]$$

El teorema B) permite poner la serie [6] en la forma de serie de Dirichlet de coeficientes variables:

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(s)\, e^{-e^{\lambda'_k} s}$$

Si en la serie [5] hacemos la agrupación de términos con los mismos índices que en la [6], obtenemos la serie de polinomios exponenciales:

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=n_{k-1}}^{n_k} a_n e^{-\lambda_n s}\right] \qquad [7]$$

La función definida por la integral

$$F(s) = \int_c e^{-t} (-t)^{s-1}\, dt$$

en que el contorno de integración C, parte del punto del ∞ y recorre el eje real positivo, da una vuelta en sentido positivo alrededor del origen y vuelve al infinito por el eje real positivo, es una función entera de s; porque esta integral es uniformemente convergente en cada dominio finito (12). Para la función multiforme $(-t)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-t)}$ se toma la determinación de log $(-t)$ que es real para t real y negativo.

Si hacemos $t = e^{\lambda} x$, resulta

$$F(s) = e^{\lambda s} \int_{c'} e^{-e^{\lambda} x} (-x)^{s-1} dx$$

pero como el integrando es regular, salvo en el punto $x = 0$, se puede poner C en vez de C′, en virtud del teorema de Cauchy, y se obtiene

$$e^{-\lambda s} = \frac{\int_c e^{-e^{\lambda} x} (-x)^{s-1}\, dx}{\int_c e^{-x} (-x)^{s-1}\, dx}$$

y por una sencilla combinación lineal resulta inmediatamente:

$$p_k(s) = \frac{\int_c P_k(x) (-x)^{s-1}\, dx}{\int_c e^{-x} (-x)^{s-1}\, dx}$$

representación que es válida para todo valor finito de s.

Teniendo en cuenta que

$$p_k(s) = A_k(s)\, e^{-e^{\lambda'_k} s}$$

(12) E. C. Ticthmarsh-The theory of functions. Oxford, 1932, pág. 149.

se tiene:

$$p_k(s) = \frac{\int\limits_c A_k(x)\, e^{-e^{\lambda'_k x}} (-x)^{s-1}\, dx}{\int e^{-x} (-x)^{s-1}\, dx} \qquad [8]$$

pero en virtud del teorema B los coeficientes variables $A_k(x)$ verifican la acotación

$$|A_k(x)| < e^{-(h-\varepsilon)e^{\lambda'_k}}$$

válida cualquiera que sea $x = \xi + i\eta$ interior a una semibanda $\xi > \xi_0$, $|\eta| < k$.

Teniendo en cuenta que el contorno C de integración, que para mayor precisión supondremos formado por un círculo $\varkappa$ de radio δ y el semirrayo $(\delta, +\infty)$ recorrido dos veces, está contenido en dicha semibanda, se obtiene, suponiendo s real, la siguiente acotación:

$$\left|\int\limits_c A_k(x)\, e^{-e^{\lambda'_k x}} (-x)^{s-1}\, dx\right| = \left|\int_\infty^\delta + \int_\varkappa + \int_\delta^\infty\right| \leq \left|\int_\delta^\infty + \int_\infty^\delta\right| +$$

$$+ \left|\int_\varkappa\right| \leq e^{-(h-\varepsilon)e^{\lambda'_k}} \left|\int_\delta^\infty e^{-e^{\lambda'_k x}} (-x)^{s-1}\, dx + \int_\infty^\delta e^{-e^{\lambda'_h x}} (-x)^{s-1}\, dx\right| +$$

$$+ \left|\int_\varkappa A_k(x)\, e^{-e^{\lambda'_k x}} (-x)^{s-1}\, dx\right|.$$

Ahora, si demostramos que esta última integral se puede hacer tan pequeña como se quiera, quedará probado que:

$$\left|\int A_k(x)\, e^{-e^{\lambda'_k}} (-x)^{s-1}\, dx\right| \leq e^{-(h-\varepsilon)e^{\lambda'_k}} \left|\int\limits_c e^{-e^{\lambda'_k}} (-x)^{s-1}\, dx\right| \qquad [9]$$

Hay que observar que el valor general de $\log(-x)$ donde $x = \rho e^{i\varphi}$ es $\log\rho + i(\varphi + \overline{2n-1}\,\pi)$, luego poniendo $\varphi = 0$ resulta $\log(-x) = \log\rho - i\pi$, y al volver a recorrer el eje después de dar la vuelta al origen es $\log(-x) = \log\rho - i\pi$.

Se tiene, si suponemos que el círculo $\varkappa$ es de radio δ:

$$|(-x)^{s-1}| = |e^{s-1(\log\delta + i(\varphi-\pi))}| = e^{(x-1)\log\delta - y(\varphi-\pi)} = O(\delta^{x-1})$$

$$|A_k(x)| < e^{-(h-\varepsilon)e^{\lambda'_k}}$$

$$|e^{-e^{\lambda'_k x}}| = e^{-e^{\lambda'_k \delta\cos\varphi}}$$

de donde resulta inmediatamente que

$$\lim_{\delta \to 0} \left| \int_{X} A_k(x)\, e^{-e^{\lambda'_k} x} (-x)^{s-1}\, dx \right| = 0$$

De [8] y [9] resulta:

$$| p_k(s) | \leq \frac{e^{-(h-\varepsilon) e^{\lambda'_k}} \left| \int_c e^{-e^{\lambda'_k}} (-x)^{s-1}\, dx \right|}{\left| \int_c e^{-x} (-x)^{s-1}\, dx \right|} =$$

$$= \frac{e^{-(h-\varepsilon) e^{\lambda'_k}} \left| e^{-s\lambda'_k} \right| \cdot \left| \int_c e^{-x} (-x)^{s-1}\, dx \right|}{\left| \int_c e^{-x} (-x)^{s-1}\, dx \right|} = e^{-(h-\varepsilon) e^{\lambda'_k}} \cdot \left| e^{-s\lambda'_k} \right|$$

Ahora bien; como la abscisa de convergencia de la serie (D*):

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(h-\varepsilon) e^{\lambda'_k}} \cdot e^{-s\lambda'_k}$$

es igual a $-\infty$, resulta que la serie de polinomios [7] converge uniformemente en todo dominio finito del plano s y nuestro teorema está completamente demostrado.

II. *Con las mismas hipótesis del teorema* I, *una condición suficiente para que la serie* [5] *tenga una abscisa de holomorfía* $H = -\infty$, *es que exista una función* $\phi(z)$ *holomorfa en un sector:*

$$| \arg z | \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

y verifique en él, por pequeño que sea el número $\varepsilon > 0$ *y para* $|z| = r$ *suficientemente grande a la condición:*

$$| \phi(re^{i\theta}) | < e^{-r[(l-\pi d) \operatorname{sen} |\theta| - \varepsilon]}, \quad [l \geq \pi d > 0]$$

y que para todo valor de n *se verifique:*

$$\phi(e^{\lambda_n}) = a_n C'(e^{\lambda_n})$$

siendo:

$$C(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{e^{2\lambda_n}} \right)$$

En efecto, el teorema A permite asegurar que la función $f(s)$ definida por la serie:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-e^{\lambda_n} s}$$

es holomorfa en el punto $s = 0$ y, en virtud del teorema B, basta esto para asegurar la holomorfía de la función $\varphi(s)$ en todo el plano, es decir, que es $H = -\infty$.

Se puede obtener, como consecuencia inmediata de este teorema, uno demostrado por V. Bernstein (13).

Se observa que en la última hipótesis del teorema II no figura la condición $l > \pi d$, como en el teorema I, sino solamente la condición $l \geq \pi d$. Con sólo esta hipótesis no se puede afirmar que la abscisa de hiperconvergencia es $-\infty$, como se puede comprobar en los ejemplos *a*) y *c*) del párrafo 2.

5.—Se observa que los teoremas precedentes han permitido obtener las abscisas de hiperconvergencia y holomorfía de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

mediante propiedades relativas a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^{(1)} s}$$

en que $\{ \lambda_n^{(1)} = e^{\lambda_n} \}$ suponiendo que la sucesión $\{ \lambda_n^{(1)} \}$ sea medible o, más general, de densidad máxima finita; pero si $\{ \lambda_n^{(1)} \}$ no es de densidad máxima finita y sí lo es la sucesión $\{ \lambda_n^{(2)} = e^{\lambda_n^{(1)}} \}$ una aplicación reiterada de los teoremas precedentes permite pasar de las propiedades de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^{(2)} s}$$

(13) Libro citado, pág. 183.

a las abscisas de hiperconvergencia y holomorfía de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

y, en general, de la

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^{(k)} s} \qquad \text{a la} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n}$$

Los teoremas análogos que generalizan los I y II se enuncian fácilmente.

Se plantea entonces la cuestión de ver si mediante este proceso aplicado un número finito k de veces se podrá obtener de toda sucesión $\} \lambda_n \{$ de densidad máxima infinita una sucesión $\} \lambda_n^{(k)} \{$ de densidad máxima finita.

Vamos a demostrar que la contestación a esta cuestión es negativa.

Consideremos la función real $p(x)$ (14) tal que

$$p\left(\underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{n+1}}}}}}}_{\lfloor n} \right) = n$$

y que en los intervalos

$$\left(\underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{n}}}}}}}_{\lfloor n-1} , \quad \underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{n+1}}}}}}}_{\lfloor n} \right)$$

es lineal, es decir, viene representada por una recta de pendiente

$$\frac{n+1-n}{\underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{n+1}}}}}}}_{\lfloor n} - \underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{n}}}}}}}_{\lfloor n-1}}$$

---

(14) Se abrevia un poco la primera parte de esta demostración teniendo en cuenta un teorema de Du Bois Reymond (Ver Hardy Orders of infinity. Cambridge Tracts, 1910, pág. 10).

Vamos a ver que la sucesión $\lambda_n = p(n)$ de densidad máxima infinita es tal, que cualquiera que sea k finito la sucesión $\{\lambda_n^{(k)}\}$ es de densidad máxima infinita.

Desde luego, fijado el número k se verifica:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{l\,l \overset{k}{\ldots\ldots} l\,x} = 0 \qquad [10]$$

pues tomando

$$x > \overbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{n+1}}}}}}}^{n}$$

tenemos:

$$\frac{p\,x}{l\,l \overset{k}{\ldots\ldots} l\,x} \leq \frac{n}{\underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{n+1}}}}}}}_{n-k}}$$

Como consecuencia de [10] resulta:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{l\,l \overset{k}{\ldots\ldots} l\,n} = 0$$

por tanto:

$$\lambda_n < \varepsilon \log_k n \quad (\text{haciendo } \log_k n = l\,l \overset{k}{\ldots\ldots} l\,n)$$

o bien:

$$e^{\lambda_n} < e^{\varepsilon \log_k n}$$

es decir:

$$e^{\lambda_n} < (\log_{k-1} n)^{\varepsilon}$$

y finalmente:

$$\frac{e^{\lambda_n}}{\underset{k-1}{\log} n} < \frac{1}{(\underset{k-1}{\log} n)^{1-\varepsilon}} \rightarrow 0 \quad \therefore \quad \frac{\underset{k-1}{\log} n}{\lambda_n^{(1)}} \rightarrow 0$$

Aplicando k veces este razonamiento se llega finalmente a ver que

$$\frac{n}{\lambda_n^{(k)}} \rightarrow \infty$$

es decir, que la sucesión $\left\{ \lambda_n^{(k)} \right\}$ es de densidad máxima infinita, como queríamos demostrar.

6.—Vamos a hacer ahora una aplicación de los resultados precedentes.

Recordemos el importante teorema de Bohr (15) siguiente:

Sea la serie

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad [11]$$

cuyos exponentes verifican la condición

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} = \mathrm{L} < +\infty$$

mientras que sus coeficientes a_n son tales que

$$\overline{\lim} \frac{\log n}{\lambda_n} = \mathrm{L} < +\infty \ .$$

Supongamos que $f(s)$ es holomorfa y de orden finito k en un cierto semiplano $\mathrm{R}(s) > \sigma$ entonces se verifica que la abscisa de hiperconvergencia es:

$$0 \leq \frac{\sigma + k\mathrm{L}}{1 + k}$$

(15) Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem Dirichleteschen Reihen (Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 37, 1914, págs. 1-16).

La primera serie del párrafo 2 permite demostrar que la acotación dada por el teorema de Bohr no puede mejorarse, en general; pues si para dicha serie fuera

$$0 \leq \frac{\sigma + kL}{1 + k} = \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

teniendo en cuenta que para dicha serie es

$$L = 1 \ , \ k = \mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma \qquad (16)$$

si se toma

$$\sigma = -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{3}{2}\right)$$

resulta

$$0 \leq -\frac{\varepsilon}{2}$$

lo que está en contradicción con las propiedades de la serie demostradas en el párrafo 2.

(Trabajo de la Cátedra de Matemáticas
de la Fundación Conde de Cartagena.)

(16) Hardy-Riesz, libro citado, pág. 18.