REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XXXVI

CUADERNO SEGUNDO

(Publicado en junio de 1942)

MADRID

Domicilio de la Academia: VALVERDE, 24

TELEFONO 12529

1942

Artículo 39 de los Estatutos de la Academia:

«*La Academia no se hace solidaria de las opiniones cuestionables, en materia científica, de sus individuos. Cada autor es responsable de las proposiciones y asertos que contengan los escritos del mismo que la Academia publique.*»

C. BERMEJO, IMPRESOR.—FERNANDO VI, 13. TELEFONO 31199.—MADRID

Sobre las singularidades de la integral de Laplace

por

Sixto Ríos

(Trabajo presentado por el Académico Sr. Torroja, en sesión de 21 de enero de 1942)

1.—G. Doetsch, en su obra «Theorie und Anwendung der Laplacesche Integral», señala (*) que no ha sido dado en la literatura matemática un ejemplo de integral de Laplace que defina una función analítica que no tenga ningún punto singular sobre la recta de convergencia de la integral.

Ejemplos de series de Dirichlet, con dicha propiedad, son conocidos y vamos a demostrar cómo utilizando un teorema expuesto por nosotros anteriormente resultan clases de tales integrales (no reductibles a series de Dirichlet) que poseen la propiedad citada.

El teorema que indico (**) es el siguiente:

I.—*Sea la integral de Laplace-Stieltjes de abscisa de convergencia nula:*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} d\alpha(\lambda) \qquad [1]$$

(*) Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplacesche Integral*, Berlín, 1937, pág. 46 y apéndice.

(**) Ríos, «Un teorema sobre las singularidades de las integrales de Laplace-Stieltjes», *Revista Matemática Hispano Americana*, 1936, pág. 20.

y consideremos la sucesión monótona infinitamente creciente $\{\mu_n\}$ *tal que:*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log n}{\mu_n} = 0$$

Tienen el mismo conjunto singular que f (s) *todas las funciones*

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} d\beta(\lambda)$$

en que

$$A(\lambda) = \alpha(\lambda) - \beta(\lambda)$$

verifica las siguientes condiciones:

a) $d\,A(\lambda) = 0$ para $\mu_{2n-1} \leq \lambda \leq \mu_{2n}$

b) $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\mu_{2n}} \log |A(\lambda)| < +\infty$ siendo $\mu_{2n} < \lambda < \mu_{2n+1}$

c) $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\mu_{2n}} \log |A(\mu_{2n}) - A(\mu_{2n+1})| = -\infty$

d) $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\mu_{2n}} \log (\mu_{2n+1} - \mu_{2n}) = -\infty$

Como ya indicamos en la nota citada, este teorema permite deducir de cada clase de series de Dirichlet una clase de integrales de Laplace-Stieltjes con el mismo conjunto singular, y cuya abscisa de convergencia es mayor en igual que las de las series.

Basta, en efecto, tomar como función $\alpha(\lambda)$ una función escalonada:

$$\alpha(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} a_n$$

con lo cual la integral [1] se reduce, según es bien sabido, a la serie de Dirichlet:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

Así, de un teorema de V. Bernstein (*) se deduce el siguiente, que resuelve, desde luego, la cuestión.

II.—*Sea una serie de Dirichlet:*

$$\sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuya sucesión de exponentes posee densidad máxima finita e índice de condensación $\delta > 0$ *y cuyas abscisas de convergencia y holomorfía se coinciden. Todas las integrales:*

$$\varphi(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda s} \, d\,a(\lambda)$$

tales que:

$$\alpha(\lambda) - \sum_{\lambda_n < \lambda} a_n = A(\lambda)$$

verifica las condiciones a) b) c) d) del teorema I, siendo:

$$\mu_{2n} < \lambda_n < \mu_{2n+1}$$

tienen abscisas de convergencia y holomorfía desiguales.

Inspirado en este teorema damos a continuación un ejemplo efectivo de integral de Laplace-Stieltjes, cuya sucesión de integrales parciales no se reduce a la de sumas parciales de una serie de Dirichlet y tal que la función analítica que representa no posee ningún punto singular sobre la recta de convergencia.

Definamos $\alpha(\lambda)$ del siguiente modo:

$$\text{para} \quad n + e^{-n} \leq \lambda < n + 1 \quad , \quad \alpha(\lambda) = 0$$
$$\text{para} \quad n \leq \lambda < n + e^{-n} \quad , \quad \alpha(\lambda) = 1 + \lambda - n$$

La integral:

$$f(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda s} \, d\,\alpha(\lambda) \qquad [2]$$

tiene abscisa de convergencia cero, lo cual puede verse directamente, o bien

(*) V. Bernstein, *Progrès recents de la théorie des séries de Dirichlet*, París, 1933, pág. 158.

aplicando una fórmula clásica de Pincherle. Como la función $\alpha(\lambda)$ no es escalonada, las integrales parciales de esta integral no coinciden con las sumaa parciales de una serie de Dirichlet. Se tiene:

$$\int_0^{n+e^{-n}} e^{-\lambda s}\, d\alpha(\lambda) = \sum_{v=1}^{n} \left[e^{-vs} - e^{-(v+e^{-v})s}\right]\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

Si ahora probamos que la serie:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left[e^{-vs} - e^{-(v+e^{-v})s}\right]\left(1 + \frac{1}{s}\right) \qquad [3]$$

converge uniformemente en todo dominio finito interior al semiplano $R(s) > -1$, quedará demostrado que la función que ella define, que es la misma $f(s)$ que define la integral [2], carece de puntos singulares sobre la recta $R(s) = 0$.

Se tiene, cualquiera que sea s:

$$\left| e^{-vs} - e^{-(v+e^{-v})s} \right| \cdot \left| 1 + \frac{1}{2} \right| = \left| e^{-vs} \right| \cdot \left| 1 - e^{-e^{-v}s} \right| \cdot \left| 1 + \frac{1}{s} \right| \leq$$

$$\leq \left| e^{-vs} \right| \cdot e^{-v} \left| e^{-e^{-v}s} \right| \cdot \left| s \right| \cdot \left| 1 + \frac{1}{s} \right|$$

Si ahora suponemos que $|s| < R$ tomado suficientemente grande para que sea:

$$\left| e^{-e^{-v}s} \right| < 2$$

queda:

$$\left| e^{-vs} - e^{-(v+e^{-v})s} \right| \cdot \left| 1 + \frac{1}{s} \right| \leq \left| e^{-vs} \right| \cdot e^{-v} \cdot 2(1 + R)$$

es decir, los términos son, desde uno en adelante, inferiores en valor absoluto a los términos de la serie de Dirichlet:

$$\Sigma\, 2(1 + R)\, e^{-v} e^{-vs}$$

cuyo campo de convergençia es el semiplano $R(s) > -1$.

Hemos, pues, probado que en todo recinto finito interior al semiplano $R(s) > -1$ la serie [3] converge uniformemente.

2.—En la obra de Doetsch se estudia siempre la integral de Laplace, no en el sentido de Stieltjes, sino en el sentido de Riemann. El ejemplo que acabamos de exponer no puede ponerse en forma de integral de Riemann, porque la función $\alpha(\lambda)$ no es derivable en todo el intervalo. Vamos, pues, a dar para completar esta nota, un ejemplo de integral de Laplace-Riemann con la misma propiedad que la anterior de Laplace-Stieltjes.

Para ello partiremos de la integral siguiente:

$$\frac{1}{s-\alpha} = \int_0^\infty e^{t\alpha} e^{-st}\, dt$$

Esta función tiene un polo simple en el punto $s = +\alpha$ y la abscisa de convergencia de la integral es $R(+\alpha)$.

Sumando integrales de este tipo, obtenemos la función siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n\left(s + \frac{1}{n} + n i\right)} = \int_0^\infty \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{t\left(\frac{-1}{n} - n i\right)} e^{-n}\right] e^{-ts}\, dt$$

La convergencia uniforme en todo intervalo $(0, k)$ de la serie contenida en el paréntesis recto se comprueba inmediatamente, y por ser absolutamente convergente la serie $\sum_1^\infty e^{-n}$ resulta que la función definida por esta integral es, según un teorema de Goursat (*), una función analítica, salvo en los polos.

Estos puntos, que son los únicos puntos singulares de la función, no están ninguno de ellos sobre la recta de convergencia de la integral $R(s) = 0$.

3.—Al obtener los resultados precedentes, he demostrado un teorema interesante sobre las singularidades de las funciones determinantes de generatriz periódica (**):

III.—*Si la generatriz* $\varphi(t)$ *de la integral*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-ts} \varphi(t)\, dt$$

(*) *Cours d'Analyse*, t. II, p. 259.

(**) Este teorema, que puede considerarse como generalización de un teorema de Carlson relativo a las series de potencias de coeficientes periódicos, ha sido demostrado independientemente por el Sr. San Juan.

admite el período α, *es decir, es* $\varphi(t+\alpha) = \varphi(t)$, *la función* $f(s)$ *es el cociente de una función entera por* $1 - e^{-\alpha s}$, *esto es,* $f(s)$ *tiene a lo sumo como singularidades los polos*

$$s = \pm \frac{2 k \pi i}{\alpha} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots.)$$

Si hacemos el cambio de variable $t' = t + \alpha$ se obtiene:

$$f(s) = \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(t' - \alpha)\, e^{-t's}\, dt' = e^{\alpha s} \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(t')\, e^{-t's}\, dt$$

luego:

$$f(s)\, e^{-\alpha s} = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt - \int_{0}^{\alpha} \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt = f(s) - \int_{0}^{\alpha} \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt$$

es decir:

$$f(s)(1 - e^{-\alpha s}) = \int_{0}^{\alpha} \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt \qquad\qquad f(s) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha s}} \int_{0}^{\alpha} \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt$$

Como la integral definida entre límites finitos define una función entera, según un resultado clásico de la teoría de funciones, queda probado nuestro teorema.

Obsérvese que no todos los ceros de $1 - e^{-\alpha s}$ son necesariamente polos de $f(s)$, pues algunos de dichos ceros pueden también serlo de la

$$\int_{0}^{\alpha} \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt$$

como lo prueban los ejemplos siguientes:

$$\frac{1}{s} = \int_{0}^{\infty} e^{-ts}\, dt \quad ; \qquad \frac{b}{s^2 + b^2} = \int_{0}^{\alpha} \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt$$

Con demostración análoga se llega al siguiente teorema relativo a la integral de Laplace-Stieltjes:

IV.—*Si la generatriz* $\psi(\lambda)$ *de la integral*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\,\psi(\lambda)$$

admite el período a, *es decir, es* $\psi(\lambda + a) = \psi(\lambda)$ *la función* F (s) *es el cociente de una función entera por* $1 - e^{-as}$, *esto es,* F (s) *tiene a lo sumo como singularidades los polos*

$$s = \pm \frac{2 k \pi i}{a} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

Como caso particular de este teorema, si la integral de Stieltjes se reduce a integral de Riemann, resulta un teorema algo menos general que el III, pues resulta la misma conclusión suponiendo la periodicidad de

$$\psi(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(t)\, dt$$

4.—Al final de nuestra nota citada damos un teorema que permite obtener clases de integrales de Laplace-Stieltjes, en que la recta de convergencia es cortadura esencial de la función definida por la integral. Como complemento señalamos a continuación un ejemplo efectivo de una tat integral que no se reduce a una serie de Dirichlet.

Definamos $\alpha(\lambda)$ del siguiente modo: para valores de λ tales que

$$2^n + e^{-2n} \leq \lambda < 2^{n+1} \quad , \quad \alpha(\lambda) = 0$$

para valores de λ tales que:

$$2^n \leq \lambda < 2^n + e^{-2n} \quad , \quad \alpha(\lambda) = 1 + \lambda - 2^s$$

Del mismo modo que en el § 1 se prueba que la integral:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\,\alpha(\lambda)$$

tiene abscisa de convergencia igual a cero y todos los puntos de la recta de convergencia $R(s) = 0$ son puntos singulares de la función $f(s)$. Tal integral es un caso particular de las definidas en el teorema II de mi trabajo citado.