REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XXXV

(Publicado en junio de 1941)

CUADERNO SEGUNDO

MADRID

DOMICILIO DE LA ACADEMIA: VALVERDE, 24

TELEFONO 12529

1941

Artículo 39 de los Estatutos de la Academia:

«*La Academia no se hace solidaria de las opiniones cuestionables, en materia científica, de sus individuos. Cada autor es responsable de las proposiciones y asertos que contengan los escritos del mismo que la Academia publique.*»

C. BERMEJO, IMPRESOR.—FERNANDO VI, 13. TELEFONO 31199.—MADRID

Prolongación analítica de funciones definidas por series de Dirichlet

por

Sixto Ríos

(Presentado en la sesión plenaria de 4 de febrero de 1941)

Estudiamos en esta nota ciertos métodos, extraordinariamente sencillos, que permiten la prolongación analítica de funciones definidas por series de Dirichlet.

Vamos a analizar primero el que hemos llamado *método de reordenación,* consistente en la alteración del orden de los términos; en segundo lugar, el *método de hiperconvergencia,* que consiste en la agrupación de conjuntos de términos consecutivos; y, finalmente, el que llamamos *método de recomposición,* que consiste en la disociación de términos y nueva agrupación.

El primero y tercero han sido señalados y estudiados por mí (1); el segundo, señalado por Bohr en un ejemplo en 1913, ha sido estudiado por V. Bernstein para las series de sucesión de exponente de densidad máxima finita (2) y por mí en las series cuyas sucesiones de exponentes son de densidad máxima infinita (3). En cuanto al tercero, es señalado por primera vez en el presente trabajo.

---

(1) Véase S. Ríos: «Prolungazione analitica per cambiamento del ordine...», *Rendiconti della Reale Accademia de Italia,* 1941.

(2) La exposición completa, con toda la bibliografía, se encuentra en el libro de V. Bernstein: *Leçons sur les Progrés récents de la théorie des séries de Dirichlet* (Col. Borel, Paris, 1933).

(3) Ríos: «Sobre el problema de la hiperconvergencia de las series de Dirichlet de densidad máxima infinitá (Rev. Real Academia de Ciencias, de Madrid, 1940).

Método de reordenación.—Sea una serie de Dirichlet:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad [1]$$

cuya abscisa de convergencia es cero, y supongamos que tiene un semiplano de convergencia absoluta.

Consideremos una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' e^{-\lambda_n' s} \qquad [2]$$

cuyos términos son los mismos de la serie [1] en otro orden. En el semiplano de convergencia absoluta ambas series [1] y [2] dan la misma suma, luego definen la misma función $f(s)$, la [1] en su semiplano de convergencia $R(s) > 0$ y la [2] en su campo de convergencia; luego, si es posible obtener una reordenación de la serie [1] cuyo campo de convergencia salga fuera del semiplano $R(s) > 0$, se habrá logrado la prolongación analítica de la función $f(s)$ a dicho campo.

Vamos a ver con un ejemplo cómo esto es efectivamente posible.

Consideremos la siguiente serie:

$$e^{-s} + e^{-s} - e^{-s} - e^{-s} + e^{-2s} + e^{-2s} + e^{-2s} + e^{-2s} - e^{-2s} - e^{-2s} - e^{-2s} - e^{-2s} + \ldots$$
$$\ldots + e^{-ns} + e^{-ns} + \overset{(2^n}{\ldots\ldots} + e^{-ns} - e^{-ns} - e^{-ns} - \overset{(2^n}{\ldots\ldots} - e^{-ns} + \ldots$$

La sucesión de sumas parciales de esta serie es:

$$e^{-s}, 2e^{-s}, e^{-s}, 0, \ldots\ldots, e^{-ns}, 2e^{-ns}, \ldots\ldots, 2^n e^{-ns}, (2^n - 1)e^{-ns}, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots$$

y se ve inmediatamente que converge uniformemente hacia cero en todo dominio finito interior al semiplano $R(s) > \log 2$, pero no en el exterior.

Alterando el orden de los términos resulta la serie:

$$e^{-s} - e^{-s} + e^{-s} - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-2s} + e^{-2s} - e^{-2s} + e^{-2s} - e^{-2s} + e^{-2s} - e^{-2s} + \ldots$$
$$\ldots + e^{-ns} - e^{-ns} + \ldots\ldots + e^{-ns} - e^{-ns} + \ldots$$

cuya sucesión de sumas parciales es:

$$e^{-s}, 0, e^{-s} 0, \ldots\ldots, e^{-ns}, 0, \ldots\ldots, e^{-ns}. 0, \ldots\ldots$$

que converge uniformemente hacia cero en todo dominio finito completamente interior al semiplano $R(s) > 0$, pero no en el exterior.

Abreviadamente, designaremos la primera serie por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad [1]$$

y la segunda, obtenida alterando el orden de los términos, por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' e^{-\lambda_n' s} \qquad [2]$$

Ninguna de estas dos es una serie de Dirichlet, pues los exponentes no forman una sucesión monótona creciente.

Consideremos los números ε_n definidos del siguiente modo:

$$\varepsilon_{2^{n+1}-3} = 2^{-2^{n+2}},\ \varepsilon_{2^{n+1}-2} = 2^{-(2^{n+2}-1)},\ \ldots\ldots,\ \varepsilon_{2^{n+2}-4} = 2^{-2^{n+1}+1}$$

La serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\lambda_n s} \qquad [3]$$

es absolutamente convergente en todo el plano, pues:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\lambda_n s} \Big| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \Big| 2^{-(2^{m+1}-1)} (2^{m+1}-1)\, e^{-ms} \Big|$$

ya que los exponentes λ_n son:

$$\lambda_{2^{m+1}-3} = \lambda_{2^{m+1}-2} = \ldots\ldots = \lambda_{2^{m+2}-4} = m$$

La serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n + \varepsilon_n) s} \qquad [4]$$

es una serie de Dirichlet, ya que sus exponentes forman una sucesión monótona creciente, pues si $\lambda_n = \lambda_{n+1}$; como es $\varepsilon_n < \varepsilon_{n+1}$, se verifica: $\lambda_n + \varepsilon_n <$

$< \lambda_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$, y si $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, se verifica $\lambda_{n+1} - \lambda_n = 1$, y como $\varepsilon_n < 1$, resulta también $\lambda_n + \varepsilon_n < \lambda_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$.

Ahora bien, la diferencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n + \varepsilon_n) s} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[e^{-(\lambda_n + \varepsilon_n) s} - e^{-\lambda_n s}\right] \qquad [5]$$

es una serie absolutamente convergente en todo recinto finito del plano, que define, por tanto, una función entera de s.

Se tiene, en efecto:

$$\left| a_n \left[e^{-(\lambda_n + \varepsilon_n) s} - e^{-\lambda_n s}\right] \right| < \left| e^{-\lambda_n s} \right| \cdot \varepsilon_n \cdot \left| s \right| \cdot e^{\varepsilon_n |s|}$$

y, tomando n suficientemente grande para que, supuesto $|s| \leq R$, sea:

$$e^{\varepsilon_n \cdot |s|} < 2,$$

resulta:

$$\left| a_n \left[e^{-(\lambda_n + \varepsilon_n) s} - e^{-\lambda_n s}\right] \right| < 2 \left| e^{-\lambda_n s} \right| \cdot \varepsilon_n \cdot R$$

y como, según hemos demostrado, la serie [3] es absolutamente convergente en todo el plano, la serie [5] converge absoluta y uniformemente en cada recinto finito $|s| < R$.

Resulta, por tanto, que la serie de Dirichlet [4] tiene como semiplano de convergencia el mismo $R(s) > \log 2$ de la serie [1].

Consideremos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n'} e^{-(\lambda_{n'} + \varepsilon_{n'}) s} \qquad [6]$$

en que los coeficientes $a_{n'}$ y los exponentes $\lambda_{n'}$ son los mismos de la serie [4] en distinto orden.

Lo mismo que antes, resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n'} e^{-(\lambda_{n'} + \varepsilon_{n'}) s} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n'} e^{-\lambda_{n'} s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n'} \left[e^{-(\lambda_{n'} + \varepsilon_{n'}) s} - e^{-\lambda_{n'} s}\right]$$

y como la serie [3] es absolutamente convergente en todo el plano, también lo es la

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{n'} e^{-\lambda_{n'} s}$$

y podemos afirmar que el semiplano de convergencia de la serie [6] es el mismo $R(s) > 0$ de la serie [2].

Pero como la serie [4] es absolutamente convergente en el semiplano $R(s) > \log 2$ resulta que la sucesión de sumas parciales de esta serie y de cualquier otra obtenida de ella, alterando el orden de sus términos, convergen uniformemente hacia la misma función en dicho semiplano, y, por el principio de prolongación analítica, la suma que nos da la serie [5] en la banda $0 < R(s) \leq \log 2$ es la prolongación analítica de la función definida mediante la serie de Dirichlet [4] convergente en el semiplano.

Hemos, pues, visto cómo de la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n + \varepsilon_n) s}$$

se obtiene, alternando el orden de sus términos, otra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' e^{-(\lambda_n' + \varepsilon_n') s}$$

que efectúa la prolongación analítica.

Llamamos *serie de Dirichlet desordenada* a una serie del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad [7]$$

en que los λ_n son números reales positivos que, en general, no forman sucesión monótona y tienen como único punto límite el ∞ (1).

Supondremos, además, que la sucesión $\{ \lambda_n \}$ es tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s} \right] \qquad [8]$$

es absolutamente convergente en el semiplano $R(s) > 0$.

Con esta hipótesis se demuestran las siguientes propiedades:

I.—*Si la serie de Dirichlet desordenada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

converge en el punto s_0, *converge en todo punto* s *tal que* $R(s) > R(s_0)$ *y ade-*

---

(1) Algunas de las propiedades que se exponen son aplicables a tipos más generales de sucesiones de exponentes.

más la convergencia es uniforme en cada recinto finito completamente interior al semiplano R (s) $>$ R (s$_0$).

Para la demostración se aplica la transformación de Abel y se utiliza la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s} \right]$$

y el ser $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$.

De la propiedad anterior, por un razonamiento clásico, resulta:

a) *la serie es convergente para todo valor de* s; b) *la serie no converge para ningún valor de* s; c) *existe un número* C *tal que la serie converge en los puntos del semiplano* R (s) $>$ C *y diverge en los puntos del semiplano* R (s) $<$ C.

Si se prescinde de la hipótesis de la convergencia absoluta de la serie [6], no es cierta, en general, la propiedad I. Así la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\lambda_n s}$$

en que $\lambda_{2n} = \log \log (2n)$, $\lambda_{2n+1} = 2n + 1$, que verifica la condición $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ converge en el punto $s = 0$, pero no en el semiplano $R(s) > 0$.

Análogamente a como en las series de Dirichlet se definen las abscisas de convergencia absoluta, uniforme, de hiperconvergencia, de holomorfía, etc.

La propiedad de la existencia de un semiplano de convergencia absoluta vale para tipos de series mucho más generales que el considerado, pues es una consecuencia de la acotación

$$\left| a_n e^{-\lambda_n s} \right| < \left| a_n e^{-\lambda_n s_0} \right| \quad , \quad \text{si} \quad R(s) > R(s_0)$$

y vale, por tanto, sin hipótesis ninguna sobre la sucesión λ_n.

II.—*Si la abscisa de convergencia* C *de una serie de Dirichlet desordenada es* C $>$ 0, *se verifica:*

$$C = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \left| \sum\limits_{m=1}^{n} a_m \right|}{\lambda_n}$$

La demostración utiliza la transformación de Abel, así como la convergencia absoluta de la serie [8] para $R(s) > 0$.

La fórmula anterior nos permite obtener en cada caso el campo de convergencia de una serie desordenada deducida de una serie de Dirichlet y ver si permite la prolongación analítica. Aplicada al ejemplo considerado, resultan las propiedades deducidas antes directamente.

Observemos que para que la nueva serie sea convergente en un campo más amplio, ha de tender a cero en dicho campo el término general; luego la prolongación analítica con el método de reordenación podrá lograrse, a lo sumo, en todo el semiplano en que el término general de la serie tienda a cero, campo que, según se sabe (1), es *a lo sumo* el semiplano de convergencia absoluta, más la banda llamada de convergencia condicional, cuya amplitud es:

$$\Lambda = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log n}{\lambda_n}$$

En particular, las series de Taylor, puestas en forma de series de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}$$

no hay banda de convergencia condicional y, por tanto, *no es posible lograr prolongación analítica por reordenación.*

Esto pone de manifiesto una nueva diferencia de propiedades que añadir a las muchas ya conocidas entre las series de Taylor y las series generales de Dirichlet.

Cuando en la serie dada no hay campo de convergencia absoluta, no es posible asegurar que la nueva serie converja hacia la misma función. Un caso en que puede afirmarse la convergencia hacia la misma función es aquel en que la nueva serie hay una sucesión de sumas parciales que coincida con una de la primitiva.

Partiendo de una serie análoga a la [1], pero que tenga 2^n términos de valor absoluto $| e^{-ns} |$, se puede obtener, por un proceso paralelo al seguido anteriormente, una serie de Dirichlet en que, alterando el orden de sus términos, se obtienen series uniformemente convergentes hacia distintos límites.

Mediante la consideración de series de polinomios sin campo de convergencia absoluta, se puede ver fácilmente cómo la alteración del orden de los términos da lugar a distintas funciones límites. Un ejemplo de esto es el siguiente: consideremos el conjunto numerable de todos los polinomios de coeficientes complejos de componentes racionales:

$$P_1(z), P_2(z), \ldots\ldots, P_n(z), \ldots.$$

(1) E. Landau: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,* Berlín, 1909, II Bd. pág. 734.

y sea:

$$\underset{|z|<n}{\text{Máx}}\ |P_n(z)| = M_n$$

y pongamos:

$$Q_n(z) = \frac{P_n(z)}{n\,M_n}$$

con lo que, en el círculo $|z| < n$, se verifica:

$$|Q_n(z)| < \frac{1}{n}$$

Formemos la serie de polinomios:

$$\begin{array}{l} Q_1(z) - Q_1(z) + \ldots\ldots + Q_1(z) - Q_1(z) + \\ + Q_2(z) - Q_2(z) + \ldots\ldots + Q_2(z) - Q_2(z) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + Q_n(z) - Q_n(z) + \ldots\ldots + Q_n(z) - Q_n(z) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

en que el número de términos de la fila enésima es la parte entera de $n\,M_n + 1$.

Como las sumas parciales de la serie son $Q_1, 0, Q_1, 0, \ldots\ldots, Q_n, 0, \ldots$ se ve que en todo dominio finito del plano la serie converge uniformemente hacia cero.

Utilizando el teorema clásico de Runge-Hilbert se demuestra que, dada cualquier función holomorfa en un recinto finito D, mediante una alteración conveniente del orden de los términos de la serie se obtiene otra serie que converge uniformemente hacia la función dada *en el interior de* D.

2. *Método de hiperconvergencia.*—Puede ocurrir que una sucesión parcial de la sucesión total de sumas parciales de una serie de Dirichlet converja uniformemente en un dominio que se extienda más allá del semiplano de convergencia de la serie. En este caso, como en dicho semiplano ambas sucesiones, la total y la parcial, tienen como límite la misma función analítica, la sucesión parcial efectúa la prolongación analítica de la función definida por la serie en todo su campo de convergencia uniforme.

El primer ejemplo de este tipo de prolongación analítica es el siguiente, debido a Bohr (1):

(1) *Einige Bemerkungen über das Konvergenzprobleme...* Rendinconti di Palermo, t. 37.

Sea la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

donde:

$$a_n = (\quad 1)^n \quad , \quad \lambda_{2k-1} = 2k \quad , \quad \lambda_{2k} = 2k + e^{-2k}$$

Su abscisa de convergencia es cero. Si agrupamos los términos de dos en dos obtenemos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_{2k-1} s} - e^{-\lambda_{2k} s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-s e^{-2k}}\right) e^{-2ks}$$

Si $R(s) > 0$, esta serie representa seguramente la función $f(s)$, y teniendo en cuenta que:

$$\left| 1 - e^{-s e^{-2k}} \right| < |s| \, e^{-2k} < M e^{-2k}$$

se prueba inmediatamente que esta serie converge absoluta y uniformemente en cada dominio finito interior al semiplano $R(s) > -1$, esto es, la sucesión de sumas parciales de *orden par es hiperconvergente* respecto a la sucesión total de sumas parciales. Este tipo de hiperconvergencia, que se denomina *estrecha,* no se presenta en las series de Taylor.

Los resultados de V. Bernstein se refieren principalmente a las series de Dirichlet, cuya sucesión de exponentes:

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots\ldots \lambda_n , \ldots.$$

tiene *densidad máxima finita* ($\leq$ D), es decir, tales que dicha sucesión puede considerarse como parcial de otra:

$$l_1 , l_2 , \ldots\ldots , l_p , \ldots\ldots$$

que verifica la condición:

$$\lim_{p \to \infty} \frac{p}{l_p} = D$$

Esta segunda se dice *medible y de densisad* D. Estas nociones que se han mostrado, muy fecundas, han sido introducidas por Pólya y estudiadas posteriormente por V. Bernstein, el cual ha introducido además el llamado *índice de* *condensación*, que da idea de la proximidad de los λ_n y cuya utilidad en esta teoría ha sido bien probada.

V. Bernstein introduce la noción de abscisa de holomorfía de una serie de Dirichlet (número H tal que la función $f(s)$ sea holomorfa en el semiplano $R(s) > H$ y contenga puntos sigulares en todo semiplano $R(s) > H - \varepsilon$),

Entonces, los resultados obtenidos por Bernstein pueden resumirse en la siguiente forma:

Si para una serie de Dirichlet, cuya sucesión de exponentes tiene una densidad máxima finita, las rectas de convergencia y holomorfía no se confunden, la banda vertical, comprendida entre ellas, es una zona de hiperconvergencia de la serie, esto es, existe una cierta sucesión de sumas parciales de la serie que converge uniformemente en cada dominio finito contenido en dicha banda.

Toda serie, cuya sucesión de exponentes posee una densidad máxima finita, puede considerarse construída por un procedimiento que generaliza el utilizado por Bohr en su ejemplo; esto es, la serie está formada por grupos de términos cuyos coeficientes tienen una suma que difiere muy poco de cero.

El método de Bernstein es una generalización fundamental del utilizado por autores anteriores (Lindelöf, Carlson, etc.) para la prolongación analítica de las series de Taylor. Se funda en la interpolación de los coeficientes de la serie (o mejor, en el caso de las series de Dirichlet, de números proporcionales a ellos) mediante funciones analíticas, dadas por integrales, cuyas propiedades conocidas permiten obtener resultados generales para las series.

Los resultados de Bernstein ponen de relieve lá importancia grande que el método de hiperconvergencia tiene en las series de Dirichlet de densidad máxima finita, ya que, según afirma su teorema, siempre que no coincidan las rectas de convergencia y holomorfia se puede lograr la prolongación analítica en dicha banda por el citado procedimiento. El propio Bernstein generalizó sus resultados a ciertas clases de series de Dirichlet de densidad máxima infinita, y en su libro citado (págs. 193-4) planteó la cuestión de ver si este método podría generalizarse a todas las series de Dirichlet de densidad máxima infinita. Nosotros hemos resuelto la cuestión negativamente (1) demostrando que *en las series de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuya sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}$ *tiene densidad máxima infinita la abscisa de hiperconvergencia (estrecha o no) puede ser mayor o igual que la de holomorfía y que hay tres tipos distintos de series de Dirichlet, cuyas sucesiones de exponentes poseen densidad máxima infinita:*

a) *No hay hiperconvergencia en ninguna porción del semiplano de holomorfía*

(1) Memorias citadas en la nota al pie (3).

b) *hay hiperconvergencia en todo el semiplano de holomorfía,* y c) *hiperconvergencia en una banda parcial del semiplano de holomorfía.*

En el trabajo citado hemos demostrado que un ejemplo del primer tipo es la serie

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-s\,l\,n}$$

un ejemplo del segundo tipo, la serie

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\lambda_n s}$$

en que:

$$\lambda_{2n+1} = l\,n \;,\; \lambda_{2n} = l\,n + [e^{-n} - e^{-n-1}]$$

y un ejemplo del tercer tipo, la serie

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

siendo:

$$\lambda_{2n-1} = l\,n \;,\quad \lambda_{2n} = l\,n + e^{-n} - e^{-n-1} \;,\quad a_{2n-1} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \;,\quad a_{2n} = -1$$

Los resultados obtenidos en mi Memoria citada, pueden resumirse en los siguientes teoremas:

I.—*Sea una serie de Dirichlet*

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuyos exponentes forman una sucesión de densidad máxima infinita y tal que la sucesión $\{ e^{\lambda_n} \}$ *sea medible y de densidad* d *y tal que:*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |a_n|}{e^{\lambda_n}} = 0$$

Es condición suficiente para que la serie admita una sucesión parcial hiperconvergente en todo el plano, que exista una función $\psi(z)$ *holomorfa en un sector*

$| \arg z | \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ *y tal que se verifique en este sector para* $| z | = r$ *suficientemente grande y por pequeño que sea* ε *la condición*

$$\left| \psi\left(r e^{i\theta}\right) \right| < e^{-r[(l - \pi d) \operatorname{sen} | \theta | - \varepsilon]} \qquad [l > \pi d > 0]$$

y que además para todo valor de n *sea*

$$\psi\left(e^{\lambda_n}\right) = a_n C'\left(e^{\lambda_n}\right)$$

siendo

$$C(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{e^{2\lambda_n}}\right)$$

II.—*Con las mismas hipótesis del teorema anterior es suficiente para poder asegurar que la abscisa de holomorfía es* $-\infty$ *que se verifique*

$$l \geqslant \pi d > 0$$

3. *Método de recomposición.*—Vamos a ver como la disgregación de términos seguida de reagrupación puede ser un método de prolongación analítica aplicable cuando falla el método de sucesiones parciales que acabamos de estudiar.

Consideremos nuevamente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-s l_n} \qquad [1]$$

para la que hemos demostrado (1) que

$$H = -\infty \quad , \quad S = O = 0$$

La serie dada se puede considerar obtenida mediante agrupación de cada dos términos consecutivos, es decir, el término enésimo se obtiene agrupando los términos de lugares $2(n-1)$, $2n-1$ de la serie

$$1 \cdot e^{-(s+1) l_1} - 1 \cdot e^{-(s+1) l_2} - 1 \cdot e^{-(s+1) l_2} + 1 \cdot e^{-(s+1) l_3} + 2 e^{-(s+1) l_3} -$$
$$- 2 e^{-(s+1) l_4} - 2 e^{-(s+1) l_4} + 2 e^{-(s+1) l_5} + \ldots$$

El campo de convergencia de esta serie es el mismo semiplano $R(s) > 0$, puesto que en él el término general tiende a cero.

(1) Memorias citadas en la nota al pie (3).

Ahora bien; si en esta serie agrupamos los términos de cuatro en cuatro consecutivos, obtendremos una serie de polinomios exponenciales, cuyo término general es:

$$P_n(s) = \frac{n+2}{2}\left[e^{-(s+1)\,l\,(n+1)} - e^{-(s+1)\,l\,(n+2)}\right] -$$
$$-\frac{n+2}{2}\left[e^{-(s+1)\,l\,(n+2)} - e^{-(s+1)\,l\,(n+3)}\right]$$

Serie que. según vamos a demostrar, efectúa la prolongación analítica de la dada [9] en la banda $1 < R(s) \leq 0$, que no se lograba, según vimos, mediante la aplicación directa del método de hiperconvergencia.

Demostremos, en efecto, que la serie, cuyo término general es $P_n(s)$, converge uniformemente en el semiplano $R(s) > -1$. Teniendo en cuenta que el primer paréntesis recto es la diferencia de valores de la función $2^{-(s+1)\,l\,x}$ en los puntos $x = n+2$, $x = n+1$ se puede aplicar el teorema del valor medio (suponiendo $s+1$ positivo) y lo mismo al segundo paréntesis recto, con lo que resulta:

$$P_n(s) = \frac{n+2}{2}\left[(s+1)\,e^{-(s+2)\,l\,(n+1+\delta)} - (s+1)\,e^{-(s+2)\,l\,(n+2+\delta')}\right]$$

en que δ y δ' son números positivos comprendidos entre 0 y 1. Una nueva aplicación del teorema citado da la acotación:

$$|P_n(s)| < \frac{n+2}{2}\;|s+1|\cdot|s+2\;e^{-(s+3)\,l\,(n+1)}$$

lo que demuestra la convergencia uniforme de la serie $\Sigma P_n(s)$ en el interior del semiplano $R(s) > -1$, que es lo que queríamos demostrar.

(Trabajo de la Cátedra de Matemáticas de la Fundación del Conde de Cartagena en la Real Academia de Ciencias).