REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO LX

CUADERNO TERCERO

MADRID

DOMICILIO DE LA ACADEMIA:

VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29

1966

Artículo 39 de los Estatutos de la Academia:

«La Academia no se hace solidaria de las opiniones cuestionables, en materia científica, de sus individuos. Cada autor es responsable de las proposiciones y asertos que contengan los escritos del mismo que aquélla publique.»

Depósito Legal M. 891.—1958.

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO.—J. GARCÍA MORATO, 122.—TEL. 233-06-19.—MADRID

Conceptos de utilidad en los problemas de decisión

por

Sixto Ríos

1. Prollemas de decisión en ambiente aleatorio. Conjuntos fundamentales

Muchos problemas de decisión individual se esquematizan así: existe 1.° un conjunto E de estados del ambiente o condiciones no controladas por el decisor, que designaremos por $e_1, e_2, \ldots, e_n$; 2.° un conjunto A de acciones $s_1, s_2, \ldots, s_k$ posibles que puede realizar el decisor; 3.° un conjunto R de resultados r_{ij} que se verifican si el decisor toma la decisión s_i y el estado del ambiente es e_j, como indica la matriz

$$\begin{array}{cc|cccc}
 & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{E}} \\
 & & e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ \hline
 & s_1 & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\
A & s_2 & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\
 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & s_k & r_{k1} & r_{k2} & \cdots & r_{kn}
\end{array}$$

Vemos que tenemos fundamentalmente tres conjuntos:

1) Conjunto E, de condiciones o estados de la Naturaleza e_j.

2) Conjunto R, de consecuencias r_{ij}.

3) Conjunto A, de acciones s_i.

Elegida s, tenemos una aplicación de E en R, es decir, $r=r(s, e)$ y el problema es elegir s de modo que se obtenga una consecuencia óptima.

Precisar esto implica establecer alguna medida, o al menos alguna estructura en dichos conjuntos.

Las tres nociones intuitivas, que son el punto de partida para el estudio científico de estos conjuntos, son:

Para el conjunto E, la noción de incertidumbre que conduce al concepto de *probabilidad*. Para el conjunto S de acciones, la noción de preferencia que conduce a la noción de *orden*. Para el conjunto de consecuencias, la noción de valor que conduce al cencepto de *utilidad*.

Distintos autores han adoptado diferentes situaciones de partida para construir modelos y teorías, que sería largo analizar con detalle.

Piénsese en las muy diversas teorías conocidas de la probabilidad y la posibilidad de combinar algunas de ellas con diversas estructuras posibles para el conjunto A y para el R, y se tiene una idea del gran número de modelos teóricamente posibles, incluso en situaciones bien simples.

2. Medidas de eficiencia

Se comprende el interés que para la resolución de un problema de decisión tiene el llegar a una valoración numérica objetiva de los distintos *cursos de desarrollo posibles* del proceso.

En muchas situaciones reales cabe considerar para ello los conceptos de *coste* y *salida* o *respuesta*.

Coste es el conjunto de recursos que son consumidos en poner en práctica un curso de acción (dinero, horas de trabajo, etc.).

La *salida* o *respuesta* es el conjunto de recursos que resultan de tomar un curso de acción de las características psicológicas o sociológicas del estado resultante. Por ejemplo, podemos hablar del dinero obtenido, del material producido, del tiempo ahorrado, etc.

Una *medida de eficiencia* en el caso más general de ingreso variable y salida variable es:

$$\text{Beneficio} = \text{Respuesta} - \text{coste.}$$

Si uno de los términos (salida o coste) es fijo, una medida de la eficiencia nos la da el otro término. Si ambos son fijos o irrelevantes, una medida nos la da la *probabilidad* de obtener cada resultado.

Hay muchos problemas de programación o decisión en que no es fácilmente aplicable una valoración económica numérica de las consecuencias de la decisión. Tal es el caso en que lo que se trata es de tener en cuenta las consecuencias de una decisión que se traducen en prestigio o buena fama. O en el caso de un problema militar, lo que se llama el «valor militar». En todos estos casos no es aplicable lo que se llama «teoría tradicional de la decisión» y se impone el nuevo punto de vista, que podríamos llamar «teoría personalista o moderna» de la decisión, cuyo instrumento fundamental es el concepto de «valor relativo» o «utilidad».

En estos problemas la idea es reducir mediante la llamada función *utilidad* o valor relativo el problema de decisión *subjetiva* o *no numérica* a un problema de decisión objetiva.

La idea directriz para la introducción de la utilidad es reducir la comparación de situaciones de decisión complicadas a la comparación de otras más simples, a las cuales es fácil aplicar la intuición directa sin peligro de equivocación.

Es decir, se regula el comportamiento del decisor asignándole un «comportamiento racional», esto es, que sus decisiones son compatibles con un cierto número de axiomas o reglas que consideramos natural admitir.

Tales axiomas definen una estructura de orden en el espacio de acciones que induce otra en el espacio de consecuencias.

El objetivo es entonces definir en el espacio de consecuencias una función llamada *utilidad*, de valores reales que conserva el orden establecido y se adapta a la estructura supuesta para el espacio.

Aquí vamos a considerar algunos tipos de situaciones y los conceptos de utilidad que vienen asociados de modo natural a ellas.

3. Orden de preferencia y función de utilidad

Sea X un conjunto de puntos $x, y, \ldots$

Una relación definida en X se llama un *orden parcial de preferencia o indiferencia*, y se denota por $\gtrsim$ si verifica las dos propiedades: a) *transitiva*, si $x \gtrsim y$, $y \gtrsim z$ es $x \gtrsim z$; b) *reflexiva* es $x \gtrsim x$.

El orden es *completo* si c) para todo par x, y de X se verifica $y \gtrsim x$, o bien $y \gtrsim x$, o ambas.

Decimos que $x > y$ (x es preferido a y) si es $x \gtrsim y$ y no es $y \gtrsim x$. Decimos que $x \sim y$ (x es *indiferente* a y) si $x \gtrsim y$ y además

Si hay elementos para los que *no* se verifica

$$x \gtrsim y \quad ni \quad y \gtrsim x$$

x no es comparable a y, el orden no es *completo*.

El *orden es puro* si d) $x \sim y$ sólo se verifica para $x = y$.

Sea X un conjunto parcialmente ordenado.

Sea $A \subset X$; un punto $x \in A$ se dice *máximo* de A si para todo $y \in A$ es $x \gtrsim y$.

Un punto $x \in A$ se dice *maximal* si no existe y tal que $y > x$. Puede ser x maximal y haber elementos y no comparables a x.

Si el orden es *completo*, ambos conceptos coinciden.

Una función real u en X *representa el orden* si para todo $x, y \in X$

$$\begin{array}{lcl} x > y & \text{implica} & u(x) > u(y) \\ x \sim y & \text{»} & u(x) = u(y). \end{array}$$

La representación es *fiel* si $x \gtrsim y$ si y sólo si $u(x) \geqslant u(y)$.

Se demuestra que cada representación de un orden completo es *fiel*, y recíprocamente.

Una representación de un orden incompleto no puede ser fiel. Si $u(x) \geqslant u(y)$, x e y pueden ser incomparables.

Una *función de utilidad* u es una función definida en un espacio en que se ha establecido una relación de preferencia, que es una representación (no necesariamente fiel) de este orden y que se ajusta a la estructura especial de dicho espacio.

De un modo muy general se puede presentar ahora el problema de decisión en la forma siguiente: Sea X un conjunto de consecuencias en el que se ha establecido un orden, y sea A un conjunto parcial de X; se trata de determinar una función numérica $u(\cdot)$ que represente el orden y buscar el máximo de ella en A.

4. Función de utilidad en el caso de decisiones en ambiente conocido con certeza

Si suponemos que a cada acción s_i corresponde una consecuencia bien definida d_i, es decir, tenemos la matriz de consecuencias:

$$\begin{array}{cc} S_1 & r_1 \\ S_2 & r_2 \\ \vdots & \vdots \\ S_t & r_t \end{array}$$

estamos ante una situación estudiada especialmente por Debreu. Supondremos que el conjunto R de resultados es un *subconjunto de un espacio euclídeo finito* (1). Se supone que el individuo tiene un comportamiento racional regulado por los siguientes axiomas:

I (de ordenación completa). El conjunto Q de resultados es completamente ordenado por la relación $\lesssim$.

II (de continuidad). Si $A_n \in Q$ y $A_n \lesssim B$ y $\lim A_n = A \in Q$ es $A \lesssim B$.

Si $A_n \in Q$, $B \lesssim A_n$ y $\lim A_n = A \in Q$ es $B \lesssim A$.

Se demuestra entonces, siguiendo a Debreu, que *existe una función real continua* w(a) *que conserva el orden establecido por el individuo*. Es decir, que si el individuo compara dos elementos A, B mediante los valores numéricos $w(A)$, $w(B)$ está actuando de acuerdo con su sistema de preferencia (2).

Se observa que la función de utilidad además de conservar el orden, refleja en su propiedad de continuidad la estructura del espacio en que se ha definido el orden.

Se demuestra además, que la función de utilidad es única, salvo una función monótona, es decir, que si $v(A)$ y $w(A)$ son dos fun-

(1) Debreu ha considerado una situación más general en que Q es un espacio completamente ordenado, separable y conexo (Representation of preference ordering by a numerical function en Thrall, Coombs and Davies, Decis'ons Processes (N. Y. 1954).

(2) Debreu ha dado un contraejemplo que prueba, ya en el clásico caso de complejos de bienes, la necesidad de imponer algunas restricciones al conjunto en el que se establecen las diferencias.

ciones de utilidad es $w = g(v)$, siendo g una función monótona estrictamente creciente.

Introducida la función $v(\mathrm{A})$, el problema de óptimo, dada la matriz (1′) de consecuencias $r = r(s_i)$, es inmediato, ya que se trata de determinar el máximo de la llamada *función de pago*

$$w(r(s_i))$$

obtenida al aplicar la función de utilidad a la función consecuencia. Su dificultad matemática puede ser mayor o menor según la complicación de esta función y las restricciones del conjunto S_i. Dentro de este tipo entran los problemas de programación lineal, cuadrática, convexa, etc.

5. Función de utilidad en el caso de situación aleatoria

Pasando a la situación esquematizada por la matriz [1], estableceremos un sistema de axiomas tales que admitirlos implica definir un operador de utilidad de las perspectivas aleatorias o distribuciones que pueden formarse con los elementos de la matriz, de modo que si el individuo regula su comportamiento por los valores de tal operador, está actuando de acuerdo con el orden fijado por los axiomas admitidos.

Vamos a llamar a los elementos de la matriz A, B, C, ... y vamos a definir sobre este conjunto R el conjunto S de todas las perspectivas aleatorias ξ posibles. Es decir, si

$$\xi = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots; p_1, p_2, \ldots),$$

el individuo sabe que elegir ξ significa sortear para obtener A con probabilidad p_1, B con probabilidad p_2, etc.

En particular el conjunto S contiene distribuciones como

$$\xi = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots; 1, 0, \ldots),$$

que significa obtener el resultado A con seguridad.

Este conjunto S es lo que se llama un *conjunto de mixtura*, es decir, tal que si $\xi \in \mathrm{S}$, $\eta \in \mathrm{S}$, también pertenece $(\xi, \eta; \mu, (1 - \mu))$ para todo μ, tal que si $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

A fin de hacer una construcción axiomática, se introduce el concepto de *conjunto de mixtura* en la siguiente forma.

Un *conjunto de mixtura* es un conjunto S de elementos $\xi, \eta, \ldots$ llamados *perspectivas aleatorias* que verifican los siguientes axiomas:

1) Para cada par ξ, η y para todo número real p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ la mixtura $(\xi, \eta ; p, 1 - p)$, que designaremos brevemente por $(\xi p \eta)$, es un elemento de S definido unívocamente.

2) $\xi p \eta = (\eta (1 - p) \xi)$.

3) $\xi p (\eta r \zeta) = \left(\xi \dfrac{p}{p + r - p r} \eta\right)(p + r - p r) \zeta$.

4) $\xi p \zeta = \xi$.

5) Si $\xi p \zeta = \eta p \zeta$, para algún $p > 0$ es $\xi = \eta$.

Hay que observar que estos postulados de comportamiento psicológico no son admitidos por toda persona, aunque algunos parezcan evidentes. Por ejemplo, uno de los más triviales parece el siguiente: si A y B son dos elementos del conjunto, el $A p B$ es único. Sin embargo, hay personas que según la manera de presentar una perspectiva aleatoria la consideran distinta, aunque p sea igual. Supongamos una situación que consiste en acertar uno entre dos números dados diciendo un número, y otra que consiste en acertar uno entre veinte números dados diciendo diez números.

La experiencia demuestra que hay personas que no consideran equivalentes ambas situaciones. De ahí la necesidad de enunciar explícitamente tales axiomas.

A estos axiomas se añaden los siguientes, que convierten el espacio de mixtura en un *espacio de utilidad:*

I (de ordenación completa). S es completamente ordenado por la relación $\lesssim$.

II (de continuidad o de Arquímedes). Si $\xi > \eta > \zeta$, existe p tal que $\xi p \zeta \sim \eta$.

III (de sustitución). Si $\xi \sim \zeta$ para cualquier η es

$$\xi \frac{1}{2} \eta \sim \zeta \frac{1}{2} \eta \text{ (3)}$$

Se demuestra entonces que existe un operador U de valores reales que:

(3) En la forma debida a Hernstein y Milnor. Econométrica 1953. An axiomatic approach to measurable utility.

1) *Conserva el orden*, es decir, que si $\xi \lesssim \eta$ es

$$U(\xi) \leqslant U(\eta).$$

2) *Es lineal:*

$$U(\xi p \eta) = p\,U(\xi) + (1 - p)\,U(\eta).$$

Un elemento ξ de S se dice *puro* o *perspectiva pura*, si no existen en S otros dos η, ζ tales que $\xi \sim (\eta p \zeta)$.

Un conjunto M de *perspectivas puras* de S se dice que son *generadoras* de S si todo elemento de S es una mixtura de elementos de M.

Si partimos de unos resultados seguros A, B, ... y formamos el espacio de mixtura engendrado por ellos, y llamamos

$$w(a) = U(\xi),$$

siendo

$$\xi_A = (A, B, \ldots; 1, 0, \ldots),$$

tendremos como consecuencia de los axiomas:

$$\begin{aligned} U[A, B, \ldots; p_1, p_2, \ldots] &= U[\xi_A, \xi_B, \ldots; p_1, p_2, \ldots] = \\ &= p_1 U(\xi_A) + p_2 U(\xi_B) + \ldots = p_1 w(A) + p_2 w(B) + \ldots \end{aligned}$$

Vemos, pues, que este operador es la esperanza matemática de la función $w(A)$. La función $w(A)$ viene asociada al individuo y a la situación enfrentada por él, y es

$$U(\xi) = E(w(\xi)).$$

Establecido el funcional

$$U(\xi) = E(w(\xi)),$$

es inmediato la resolución del problema de óptimo planteado por la matriz [1]. A cada fila corresponde una esperanza de utilidad y se elegirá aquella acción a_i que dé máxima esperanza de utilidad.

6. Otros conceptos de utilidad

Hemos visto hasta aquí dos conceptos de utilidad. En ambos hay un conjunto completamente ordenado y una estructura de éste, que en el caso de Debreu es la de espacio topológico a la que corresponde la continuidad de u, y en el caso de von Neuman es la estructura de espacio de mixtura a la que corresponde la propiedad de utilidad esperada:

$$U(\alpha \xi + (1 - \alpha) \eta) = \alpha U(\xi) + (1 - \alpha) U(\eta).$$

Otros ejemplos estudiados especialmente por Aumann son el caso en que X es un semigrupo abeliano en que se ha definido una adición conmutativa y asociativa. Entonces u es un homomorfismo

$$u(x + y) = u(x) + u(y),$$

y este tipo de utilidad ha encontrado su aplicación natural en problemas de asignación que conducen a una programación lineal en números enteros.

En los problemas reales se ha de emplear, como es natural, el espacio y la noción de utilidad apropiados.

Es interesante en relación con esto, considerar el problema de decisión frente a la naturaleza.

Ciertas discusiones pueden evitarse considerando diversas maneras de plantear el problema.

1.° La clásica, admitiendo que es conocida la utilidad de von Neuman para los resultados que figuran en la matriz, lo cual tiene sentido si tiene sentido hablar de distribución de probabiiidad de los estados de la Naturaleza. Tal caso ha sido considerado profusamente en la literatura mediante criterios llamados minimax, maximax, Laplace, Hurwicz, etc.

2.° Si no tiene sentido hablar de distribución de estados de la Naturaleza, podríamos considerar los elementos de la matriz como un conjunto finito completamente ordenado. En tal caso no tiene sentido la aplicación de algunos criterios como el de Laplace, pero sí de otros como el minimax. Sería interesante hacer un estudio axiomático de este segundo caso, que tiene más importancia de la que suele concedérsele en la literatura.

Otros ejemplos interesantes de generalización de la teoría de la utilidad son los de Hernstein. Sin el axioma de continuidad de Arquímedes, Hernstein ha llegado a la llamada utilidad multidimensional.

Sin el orden completo ha obtenido Auman otra generalización de la teoría de la utilidad.

7. La teoría de la utilidad desde el punto de vista de las aplicaciones. Crítica de la esperanza matemática

La aplicación de la teoría de la utilidad de von Neuman a problemas reales de decisiones comporta serias dificultades. De un lado es necesario conocer la curva de utilidad para el decisor, cuya determinación experimental no es trivial, y de otro lado es necesaria la determinación de las probabilidades correspondientes a las perspectivas aleatorias que tratamos de comparar.

Tradicionalmente se ha empleado la esperanza matemática de la cantidad ganada para expresar la utilidad de una ganancia aleatoria, siendo las críticas más comunes a tal criterio: a) identificar el posible resultado de una cierta acción en una sola partida con el resultado promedio, si esta acción se repite en sucesivas partidas; b) no tener en cuenta la situación económica del que decide y, por tanto, prescindir del riesgo al identificar la cantidad ganada en una partida y la utilidad de dicha cantidad para el que decide.

Sin utilizar la paradoja de San Petersburgo, se pueden dar ejemplos sencillos en que no parece plausible el criterio de la esperanza matemática.

a) Si A es ganar 10.10^6 ptas.
B es perder 2.10^6 ptas.
C es ganar 4.10^6 ptas.

el criterio de la esperanza matemática nos da

$$E\,(A, B\,;\ \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 4.10^6,$$

luego sería indiferente $(A, B\,;\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a C, lo que parece que muchas personas no considerarían aceptable.

b) Supongamos un contratista que ha de hacer una oferta para que le acepten un trabajo, y sabe que este trabajo puede tener un coste X con una probabilidad p_x. Con toda la información recogida ha podido establecer como ley de probabilidad de X la siguiente:

X	p_x
$10{,}0 \,.\, 10^6$	0,42
$10{,}5 \,.\, 10^6$	0,30
$11{,}0 \,.\, 10^6$	0,18
$11{,}2 \,.\, 10^6$	0,07
$11{,}5 \,.\, 10^6$	0,03

Si aplica el criterio del valor esperado debía, para no perder ni ganar, proponer por la obra $10{,}459.10^6$. Ahora bien, en la tabla se ve que hay una probabilidad 0,56 de que el coste de la obra sea superior a tal cantidad, lo cual parece suficiente para no considerar razonable hacer la propuesta sobre la base de tal coste.

La teoría de la utilidad de von Neuman permite resolver la dificultad del ejemplo a) del siguiente modo: Tomemos

$$w(\mathrm{A}) = 1, \quad w(\mathrm{B}) = 0, \quad w(\mathrm{C}) = 0{,}8,$$

lo que correspondería a un individuo con aversión al azar, llegamos a la desigualdad de esperanzas de utilidad

$$\mathrm{E}_n(\mathrm{A}, \mathrm{B}; \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0{,}5 < \mathrm{E}_n(\mathrm{C}; 1) = 0{,}8.$$

La consideración de ejemplos del tipo del segundo de la introducción nos ha conducido a la introducción de otros puntos de vista para definir la utilidad (4).

8. Utilidad a nivel de riesgo fijado

Este criterio parte de la idea intuitiva de que toda persona que acepta una situación aleatoria, considera que debe tener una probabilidad no inferior a $1 - \varepsilon$ de que su ganancia sea por lo menos H.

(4) Véase S. Ríos, *Algunos problemas de decisión y la noción de utilidad asociada*, «Metra», vol. 4, núm. 3, 1965.

De un modo más general daremos el *criterio del riesgo fijado* en la forma siguiente:

Suponemos: 1.° que las consecuencias de las acciones vienen descritas por variables aleatorias cuyos valores son números reales (por ejemplo, una ganancia en pesetas, o un número de supervivientes en una acción militar, o un número de horas de un equipo electrónico, o un error en el impacto de un cohete; 2.° para una consecuencia segura y, la utilidad viene medida por la función monótona $w(y)$ (definida en § 2) (5); 3.° que para una variable aleatoria ξ llamaremos *utilidad con riesgo* ε o utilidad $R - \varepsilon$ el número H tal que

$$P_r[w(\xi) \geqslant H] \geqslant 1 - \varepsilon; \quad P_r[w(\xi) \leqslant H] \geqslant \varepsilon.$$

Pondremos:

$$V_w(\xi) = H.$$

Una condición necesaria de consistencia es que si $\xi = y$ es una cantidad cierta, debe ser $w(y) = V_w(y)$, condición que es inmediato comprobar.

En lo que sigue supondremos que $w(\xi)$ es una variable aleatoria continua, por lo que H puede definirse por la relación única:

$$P_r(w(\xi) \leqslant H) = \varepsilon,$$

y para simplificar la notación supondremos en lo que sigue de este párrafo $w(\xi) = \xi$, ya que después demostramos que en los problemas de óptimo la solución no es afectada por la función monótona

$$\eta = w(\xi).$$

Vamos a demostrar algunas propiedades de este operador, que

(5) La determinación experimental de esta función no requiere más que el postulado de continuidad y se reduce a comparaciones del tipo siguiente: Si x_1, x_2 son las cantidades máxima y mínima que pueden considerarse en las perspectivas aleatorias que estamos enfrentando, hemos de definir una función $w(x)$, tal que $w(x_1) = 1$, $w(x_0) = 0$, y si el individuo considera que

$$(x_1, p; x_0, 1-p) \sim x$$

seguro

$$w(x) = p.$$

prueban su compatibilidad con los axiomas I y II de von Neuman.

Se verifican desde luego las propiedades de espacio de mixtura para el conjunto de las distribuciones continuas.

La ordenación completa es una consecuencia de que el operador toma valores reales y la ordenación de éstos implica la ordenación de las perspectivas aleatorias.

En particular se verifica el llamado axioma de preferencia absoluta de Massé.

Si ξ_2 es absolutamente preferido a ξ_1, es decir, si para las correspondientes funciones de distribución se verifica

$$F_2(x) \leq F_1(x)$$

es

$$V(\xi_2) \geqslant V(\xi_1).$$

Sea

$$H_1 = V(\xi_1); \qquad H_2 = V(\xi_2).$$

Tendremos:

$$H_2 \geqslant H_1,$$

luego

$$F_1(H_1) \geqslant F_2(H_1)$$

y

$$F_2(H_2) \geqslant F_2(H_1),$$

luego

$$H_1 \leqslant H_2 \qquad \text{C. Q. D.}$$

Demostremos que se verifica el axioma II, del que damos la forma siguiente, que es equivalente a la dada anteriormente:

Si ξ_1 es preferida o equivalente a ξ_2 y ésta es preferida o equivalente a ξ_3, existe un p *tal que*

$$(\xi_1, \xi_3; p, 1-p) \sim \xi_2.$$

Sea

$$F_1(H_1) = \epsilon, \qquad F_2(H_2) = \epsilon, \qquad F_3(H_3) = \epsilon,$$

y sea

$$H_1 \geqslant H_2 \geqslant H_3.$$

Hay que probar que para un p conveniente es

$$p\,F_1(H_2) + (1-p)\,F_3(H_2) = F_2(H_2) = \epsilon,$$

luego

$$p = \frac{F_2(H_2) - F_3(H_2)}{F_1(H_2) - F_3(H_2)}$$

valor que puede ser una probabilidad, ya que

$$F_3(H_2) \geqslant F_2(H_2) \geqslant F_1(H_2)$$

(y una al menos de las desigualdades es estricta).

No se verifica, en cambio, el axioma III (de sustitución) (6). *Si ξ_1 es equivalente a ξ_2, y ξ_3 es cualquiera, son equivalentes*

$$(\xi_1, \xi_3;\ \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

y

$$(\xi_2, \xi_3;\ \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

Habría de ser para un cierto H:

$$\tfrac{1}{2} F_1(H) + \tfrac{1}{2} F_3(H) = \epsilon,$$
$$\tfrac{1}{2} F_2(H) + \tfrac{1}{2} F_3(H) = \epsilon,$$

lo cual implica que $F_1(H) = F_2(H)$; pero esto puede no ser cierto, ya que sólo se ha supuesto que $F_1(x) = F_2(x)$ para el valor x tal que $F_1(x) = \varepsilon$.

9. Relación entre la función $w(x)$ y el operador U

En el criterio del riesgo fijado, hemos supuesto definida una función $w(y)$ que nos da la utilidad de una ganancia segura x, y un funcional

$$V_w(\xi),$$

que nos da la utilidad de una ganancia ξ aleatoria.

(6) Ha sido criticado por varios autores (ver (Allais, *Le comportement de l'homme rational devant le risque.* «Econometrica», 1953.

Esto conduce a la siguiente definición: la cantidad segura y es equivalente a la cantidad aleatoria ξ si

$$w(y) = V_w(\xi). \qquad [1]$$

Dado $U_w(\xi)$ decimos que la función $w(\xi)$ presenta *atracción, neutralidad* u *oposición al azar* respecto del operador U, según que se verifique:

$$U_w(\xi) \gtreqless w(U(\xi)).$$

En el caso de la esperanza matemática $U \equiv E$, la condición necesaria y suficiente de neutralidad es que

$$w(\xi) = a_0 + a_1\,\xi.$$

Pues

$$E(a_0 + a_1\,\xi) = a_0 + a_1\,E(\xi).$$

Recíprocamente, si se verifica

$$E(w(\xi)) = w(E(\xi))$$

y suponemos que $w(\xi)$ se desarrolla en serie de potencias, tendremos

$$E(a_0 + a_1\,\xi + a_2\,\xi^2 + \ldots] = a_0 + a_1\,E(\xi) + a_2\,E(\xi^2) + \ldots$$

luego

$$a_0 + a_1\,E(\xi) + a_2\,E(\xi^2) + \ldots = a_0 + a_1\,E(\xi) + a_2\,[E(\xi)]^2 + \ldots$$

y resulta fácilmente

$$a_2 = a_3 = \ldots = 0.$$

En el caso de que

$$w(\xi) = a_0 + a_1\,\xi + a_2\,\xi^2$$

es

$$E[w(\xi)] = a_0 + a_1\,E(\xi) + a_2\,E(\xi^2) = w[E(\xi)] + a_2\,D^2(\xi),$$

luego según que $a_2 > 0$ ó $a_2 < 0$, hay atracción por el azar u oposición al azar.

Vamos a ver que en el caso del operador V *cualquier función estrictamente monótona* $w = w(\xi)$ *presenta indiferencia al azar*, lo cual es consecuencia natural de que se ha fijado el riesgo que se admite.

Esto es, vamos a probar que el criterio del riesgo fijado es

$$V(w(\xi)) = w(V(\xi)).$$

Sea ξ con función de distribución

$$\Phi(r) = \Pr(\xi \leqslant r)$$

(que supondremos continua). Para la función de utilidad $w = w(\xi)$, la función de distribución es

$$G(r) = \Pr(w(\xi) \leqslant r) = \Phi(w^{-1}(r)).$$

Fijado el siego ε, es

$$V(w(\xi)) = H,$$

tal que

$$\Phi(w^{-1}(H)) = \varepsilon$$

y

$$V(\xi) = H_1$$

$$\Phi(H_1) = \varepsilon.$$

$$\Phi(H_1) = \Phi(w^{-1}(H)),$$

luego al ser $\Phi(x)$ continua y monótona, resulta

$$H_1 = w^{-1}(H),$$

o sea

$$H = w(H_1).$$

Esto nos permitirá en los problemas de óptimo prescindir de la función w, lo cual es importante desde el punto de vista práctico.

Obsérvese que no se elimina con esto el elemento subjetivo necesariamente presente en todo proceso de decisión personal, que se introduce a través del ε que fija cada individuo.

10. Problema de aproximación

Si suponemos un funcional $U(w)$ continuo, es decir, tal que si es

$$|w(x) - v(x)| < \varepsilon$$

es

$$|U(w(x)) - U(v(x) < \delta$$

tiene interés el sustituir una función $w(x)$ complicada por otra más sencilla que nos dé un valor aproximado y resulte más fácil de calcular el funcional.

Si suponemos que hemos determinado un polinomio de aproximación

$$w(x) \simeq c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

y utilizamos como funcional la esperanza matemática, tendremos

$$E(w(x)) \simeq c_0 + c_1 E(x) + c_2 E(x^2) + \dots + c_n E(x^n).$$

Si consideramos

$$U_w(\xi) = c_1 E(\xi) + c_2 E(\xi - E(\xi))^2$$

tendríamos un criterio de utilidad asociado a regular el comportamiento sólo por la media y la varianza. Se puede poner

$$U_w(\xi) = c_1 E(\xi) + c_2 E(\xi^2) + c_2 (E(\xi))^2$$

y es inmediato ver que este funcional no puede ser aproximado por un funcional del tipo

$$E_v(\xi) = E(a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2) = a_0 + a_1 E(\xi) + a_2 E(\xi^2),$$

es decir, como esperanza matemática de una utilidad cuadrática. Vemos así, además, que no tendrá, en general, solución el problema de aproximar un funcional $U_w(\xi)$ por otro $E_v(\xi)$. Sin embargo, parece que sería interesante un estudio de casos particulares de este problema.

11. Optimación de la función de pago. Aplicaciones

Al aplicar el funcional U_w a la variable aleatoria resultado

$$r = r(a, \xi)$$

la función obtenida

$$G(a) = U(w(r(a, \xi)))$$

la llamaremos *función de pago*.

A cada uno de los criterios de utilidad de una variable aleatoria corresponde un proceso de cálculo para determinar el valor de a para el que se obtiene el máximo de la función de pago.

Si adoptamos el *criterio del riesgo* y fijamos el riesgo ε, se tratará de determinar para cada a el $H(a)$ tal que

$$\Pr(r(a, \xi) \leqslant H) = \varepsilon$$

y entonces determinar el a que hace máximo $H(a)$. (Por la razón expuesta en el § 4, hemos prescindido de poner la función $w(r(x, \xi))$.)

Observemos la relación de este método con el minimax de Wald-von Neumann.

Si tomamos $\varepsilon = 0$ es

$$H(a) = \min_{\xi} r(a, \xi)$$

y el método conduce a determinar el a que hace máximo H (a), luego coincide con el minimax que se aplica a situaciones de distribución desconocida.

Tomar $\varepsilon = 0$ en el caso de que estemos tratando con una situación aleatoria de distribución conocida, es prescindir completamente de la información que nos da la distribución, y de aquí que el método minimax ($\varepsilon = 0$) no sea conveniente en tal caso, como puede comprobarse con ejemplos sencillos.

Observemos que podíamos haber tomado como definición de utilidad la siguiente: fijado ε, la utilidad de $w(r(a, \xi))$ es el valor H (a), tal que

$$\Pr(r(a, \xi) > H(a)) = \varepsilon$$

y entonces proponemos como criterio de óptimo hacer máximo H (a). Si hacemos $\varepsilon = 0$, es

$$H(a) = \max_{\xi} r(a, \xi)$$

y el método conduce a determinar el que hace máximo H (a), luego coincide con el maximax de Hurwicz.

Observemos también que el criterio de máximo podría modificarse introduciendo restricciones estocásticas para H y ε fijados adecuadamente.

Aplicaciones de este método a problemas de stocks, de inversiones y de selección de la cartera se encuentran en nuestro trabajo citado de la revista «Metra».