Introducción a la Teoría de series de Fourier

Conferencias explicadas en la Cátedra
de la Fundación «Conde de Cartagena»

por

Sixto Ríos (*)

(Continuación)

IX.—.ANALISIS ARMONICO

9. 1. Aproximación por polinomios trigonométricos.

Hemos visto (6.2 y 6.3) una clase muy general de funciones representables por su serie de Fourier. En la práctica se plantea frecuentemente el problema de representar por una serie de Fourier una función cuya expresión analítica es desconocida y que viene dada por una gráfica continua o solamente por un conjunto de puntos aislados.

En el primer caso, los coeficientes del polinomio trigonométrico de orden m que da la aproximación cuádrica óptima:

$$\varphi_m(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + a_m \cos m x + \\ + b_1 \operatorname{sen} x + \dots + b_m \operatorname{sen} m x$$

se calculan (5.2) por las fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, d x, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos n x\, d x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} n x\, d x$$

$$(n = 1, 2, \dots m)$$

El cálculo de estos coeficientes para una curva experimental se puede efec-

(*) Redactadas con la colaboración de J. Béjar, T. Iglesias y M.ª E. Ríos.

tuar con los analizadores armónicos, o bien mediante métodos gráficos, como el de V. Mises (*).

Puede procederse también de otro modo señalando un número finito de puntos de la curva $y = f(x)$ y tratando de determinar el polinomio trigonométrico de orden m que de la aproximación cuadrática óptima a dicho conjunto de puntos.

Precisemos: sea la función periódica $y = f(x)$ de período 2π de la que se conocen los valores $y_0, y_1, \ldots y_n, \ldots y_q = y_0$ correspondientes a los $q + 1$ puntos equidistantes:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{2\pi}{q}, \qquad x_2 = 2.\frac{2\pi}{q}, \ldots, x_n = n.\frac{2\pi}{q}, \ldots x_q = 2\pi$$

Se trata de determinar el polinomio trigonométrico $\varphi_m(x)$ que haga mínima la expresión

$$\Omega = \sum_{n=1}^{q} \left[y_n - \varphi_m(x_n) \right]^2$$

Según hemos visto (5.2) las condiciones necesarias y suficientes de mínimo son:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_0} = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial a_l} = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial b_l} = 0$$

es decir:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{q} \left[y_n - \varphi_m(x_n) \right] = 0 \\ &\sum_{n=1}^{q} \left[y_n - \varphi_m(x_n) \right] \cos l\, x_n = 0 \\ &\sum_{n=1}^{q} \left[y_n - \varphi_m(x_n) \right] \operatorname{sen} l\, x_n = 0 \end{aligned}\right\} l = 1, 2, \ldots m \qquad [1]$$

Se trata de determinar mediante estas $2m + 1$ ecuaciones lineales las $2m + 1$ constantes $a_0, a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_m$.

Observemos antes de proceder a su solución que el problema es determinado si es $2m + 1 \leq q$; pues si fuera $2m + 1 > q$ se podrían determinar las constantes de infinitos modos para que se verificasen las q ecuaciones

$$y_n - \varphi_m(x_n) = 0 \qquad [n = 1, 2, \ldots q]$$

y, por tanto, con cualquiera de estos sistemas de valores se verificarían las [1]

(*) Z. A. M. M. 1922, p. 313, o bien Willers. *Praktische Analysis*, p. 266.

y el problema resultaría indeterminado. Podíamos decir que hay en este caso pocos puntos para determinar las curvas.

Vemos así, además, que en el caso $2m + 1 = q$, las constantes determinan un polinomio trigonométrico $y = \varphi_m(x)$ cuya curva representativa pasa por los $q = 2m + 1$ puntos prefijados, pues las ecuaciones del sistema [1] son combinaciones lineales de las ecuaciones

$$y_n - \varphi_m(x_n) = 0 \qquad [n = 1, 2, \ldots q]$$

Observemos primeramente que se verifican las siguientes relaciones:

$$\sum_{n=1}^{q} \operatorname{sen} l\, x_n = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{q} \cos l\, x_n = \begin{cases} q & \text{si} \quad l = 0 \\ 0 & \text{si} \quad l \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Estas pueden obtenerse geométricamente considerando un polígono regular de q lados de longitud 1 y observando que la primera suma es la suma de las proyecciones de los lados del polígono sobre la perpendicular a un lado y, la segunda, las proyecciones son sobre un lado (cuando $l \neq 0$).

Tengamos, además, en cuenta las siguientes relaciones:

$$\sum_{n=1}^{q} \operatorname{sen} \mu\, x_n \operatorname{sen} \lambda\, x_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{q} \cos(\mu - \lambda)\, x_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{q} \cos(\mu + \lambda)\, x_n =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mu - \lambda \neq q \\ \dfrac{q}{2} & \text{si} \quad \mu - \lambda = q, \quad \lambda \neq m \cdot \dfrac{q}{2} \\ \dfrac{-q}{2} & \text{si} \quad \lambda - \mu = q, \quad \lambda \neq m \cdot \dfrac{q}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \mu - \lambda = q, \quad \lambda = m \cdot \dfrac{q}{2} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{q} \cos \mu\, x_n \cos \lambda\, x_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{q} \cos(\mu - \lambda)\, x_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{q} \cos(\mu + \lambda)\, x_n =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mu - \lambda \neq q \\ \dfrac{q}{2} & \text{si} \quad \mu - \lambda = q, \quad \lambda \neq m \cdot \dfrac{q}{2} \\ q & \text{si} \quad \mu - \lambda = q, \quad \lambda = m \cdot \dfrac{q}{2} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{q} \operatorname{sen} \mu\, x_n \cos \lambda\, x_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{q} \operatorname{sen}(\mu + \lambda)\, x_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{q} \operatorname{sen}(\mu - \lambda)\, x_n = 0$$

Mediante estas relaciones se deduce inmediatamente de las ecuaciones [1]:

$$\sum_{n=1}^{q} y_n = \sum_{n=1}^{q} \varphi_m(x_n) = q\,\frac{a_0}{2}; \qquad a_0 = \frac{2}{q}\sum_{n=1}^{q} y_n$$

$$a_l = \frac{2}{q}\sum_{n=1}^{q} y_n \cos l\,x_n$$

$$b_l = \frac{2}{q}\sum_{n=1}^{q} y_n \operatorname{sen} l\,x_n$$

En el caso particular de que el número de valores equidistantes sea $q = 4\,h$, los cálculos se simplifican notablemente. Las fórmulas son:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 = \dfrac{1}{2\,h}\displaystyle\sum_{n=1}^{4h} y_n & a_l = \dfrac{1}{2\,h}\displaystyle\sum_{n=1}^{4h} y_n \cos l\,x_n \\ a_{2h} = \dfrac{1}{2\,h}\displaystyle\sum_{n=1}^{4h} (-1)^n y_n & b_l = \dfrac{1}{2\,h}\displaystyle\sum_{n=1}^{4h} y_n \operatorname{sen} l\,x_n \end{array}\right\} \quad l = 1, 2 \ldots 2\,h - 1 \qquad [5]$$

9. 2. Método gráfico.

Runge (*) y otros han ideado disposiciones muy prácticas que permiten el cálculo rápido de dichos coeficientes en los casos

$$q = 12 \quad \text{y} \quad q = 24.$$

En el caso $q = 12$ es inmediato ver que las fórmulas[5] equivalen al siguiente método gráfico.

Se dibujan en el papel milimetrado seis rectas que formen entre sí cada una con la inmediata, un ángulo de 30°.

Se dibujan tres círculos concéntricos y se numeran los semirrayos como indica la figura: sobre el primero, de 1 en 1; sobre el segundo, de 2 en 2, y, sobre el tercero, de 3 en 3.

Se mide y_0 sobre $O\,x$, y_1 sobre el radio 1 (del primer circulo), y_2 sobre el radio 2, ... La suma de todas las proyecciones de estos segmentos sobre $O\,x$, dividida por 6 da a_1, mientras la suma de las proyecciones sobre $O\,y$ dividida por 6 da b_1. Si en vez de hacer esto restamos la suma de las proyecciones

(*) Véanse las obras clásicas de cálculo numérico de Runge-König, Willers, etc. Véanse los esquemas para análisis armónico publicados por la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos bajo la dirección del Coronel Pérez Marín.

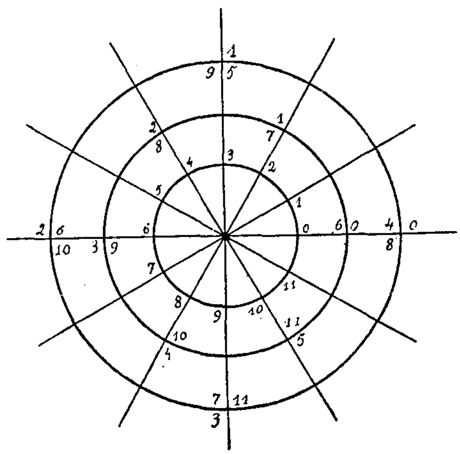
impares de la suma de las pares obtenemos a_5 y b_5. Y con el exterior se obtiene a_3 y b_3.

Basta observar en las fórmulas [5] que

$$\cos(6-l)\,x_n = \cos(6-l)\,\frac{\pi n}{6} = \cos(\pi n - l\,x_n) = \begin{cases} \cos l\,x_n & \text{si } n \text{ par} \\ -\cos l\,x_n & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(6-l)\,x_n = \operatorname{sen}(\pi n - l\,x_n) = \begin{cases} -\operatorname{sen} l\,x_n & \text{si } n \text{ par} \\ \operatorname{sen} l\,x_n & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Operando lo mismo con los rayos marcados en el círculo intermedio se obtienen a_2, b_2, y a_4, b_4. Y con el exterior se obtienen a_3 y b_3.



PARTE II

X.—SERIES ORTOGONALES EN EL ESPACIO (L^2)

10. 1. Introducción de la integral de Lebesgue en la Teoría.

1. Hasta aquí solamente hemos considerado la representación de funciones parcialmente continuas que son las que más comúnmente se presentan en las aplicaciones.

Dado un sistema fijo de funciones ortonormales

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots \varphi_n(t) \ldots$$

para cada función parcialmente continua $f(t)$ definíamos los coeficientes de Fourier

$$c_n = \int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt.$$

y le hacíamos corresponder el desarrallo:

$$f(t) \sim c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n + \dots$$

En lo que sigue vamos a considerar un campo funcional más amplio, entendiendo que las integrales son tomadas en el sentido de Lebesgue.

Tres propiedades fundamentales de esta integral hacen más sencillo y perfecto el estudio de las series ortogonales:

1.° El limitar de un modo natural las funciones integrables a las absolutamente integrables.

2.° La sencillez del paso al límite bajo la única hipótesis de la convergencia ordinaria.

3.° La propiedad fundamental de que la derivada de una integral indefinida coincide con la función en casi todo el intervalo.

Más concretamente, vamos a considerar las funciones que se llaman de cuadrado sumable, es decir, aquellas cuyo cuadrado es integrable en el sentido de Lebesgue. Una razón de tomar este campo y no el de las funciones integrables (L) se ve inmediatamente, considerando que en las cuestiones de ortogonalidad aparecen integrales de la forma

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt$$

y para que exista esta integral una condición suficiente (*) sencilla es que existan las integrales

$$\int_a^b f(t)^2\, dt \qquad \int_a^b g(t)^2\, dt$$

La razón de más importancia para tal estudio es el teorema de Riesz-Fischer, que veremos más adelante.

10. 2: Funciones de cuadrado sumable.

Si $f(t)$ es una función definida en casi todo el intervalo (a, b) y $f^2(t)$ es sumable, se dice que $f(t)$ es de cuadrado sumable en (a, b). Representaremos por L^2 el espacio de las funciones de cuadrado sumable en (a, b).

TEOREMA.—*Si* $f_1(t)$ *y* $f_2(t)$ *son funciones medibles y de cuadrado sumable en el intervalo* (a, b) *el producto es sumable en* (a, b).

(*) La condición no es necesaria. Véase un ejemplo de Kaczmarz y Steinhaus, *Theorie der Ortogonalreihen*, p. 39.

Basta probar que $|f_1(t) f_2(t)|$ es sumable en (a, b). De la desigualdad

$$0 \leq (f_1(t) - f_2(t))^2 = f_1^2(t) + f_2^2(t) - 2 f_1(t) f_2(t)$$

se deduce

$$|f_1(t) f_2(t)| \leq \frac{1}{2} f_1^2(t) + \frac{1}{2} f_2^2(t)$$

y $|f_1(t) f_2(t)|$ tiene una mayorante sumable (*), por lo que también es sumable.

Corolario.—*Si* f(x) *es de cuadrado sumable en* $(a$, b) *es sumable en* $(a$, b). En efecto, existe por hipótesis

$$\int_a^b f^2(x)\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^b 1^2\, dx$$

también existirá en virtud del teorema anterior

$$\int_a^b f(x) \cdot 1\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

Este corolario prueba que el espacio L^2 es un subconjunto del espacio L de las funciones sumables.

Teorema. — *Si* $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... $f_n(t)$ *son de cuadrado sumable en* $(a$, b) *y* $c_1, c_2, \ldots c_n$ *son constantes*

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t)$$

es también de cuadrado sumable en $(a$, b).

En efecto:

$$(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t))^2 = \sum_{i=1,\, k=1}^{i=n,\, k=n} c_i c_k f_i(t) f_k(t)$$

y por ser el segundo miembro sumable también lo será el 1.°.

Este teorema prueba que el espacio L^2 es lineal.

10. 3. Generalización de definiciones.

En lo que sigue ampliamos adecuadamente al campo funcional (L^2) conceptos ya manejados en la primera parte.

Conjuntos ortogonales.—Diremos que un conjunto de funciones de (L^2) es ortogonal cuando para dos cualesquiera de ellas f y g se verifica:

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = 0$$

(*) Para esta y otras propiedades de las funciones sumables, véase S. Ríos, *Teoría de la Integral,* Madrid, 1943.

Demostraremos más adelante que todo conjunto ortogonal en el espacio L^2 es sumable y, por tanto, un sistema.

Ejemplos se han visto anteriormente (§ 4.4).

Completitud.—Un conjunto de funciones $f(t)$ se dice completo en (a, b) respecto al espacio R si cada función $\varphi(t)$ perteneciente a R, para la cual se verifica:

$$\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

es idénticamente nula en casi todo (a, b).

Un conjunto completo no es necesariamente ortogonal ni numerable.

Ejemplo: El conjunto de las funciones de L^2 forma un conjunto completo respecto al espacio L^2 ya que si para una función $f(t)$ de L^2 y cualquiera que sea $\varphi(t)$ también de L^2 se verifica

$$\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

también será en particular

$$\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$$

lo cual exige que $f(t) \equiv 0$ en casi todo el intervalo (a, b).

Completitud del sistema trigonométrico.—Hemos demostrado (Cap. VI. Notas) la completitud del sistema trigonométrico respecto al conjunto de las funciones continuas. Vamos a ver ahora que también es completo respecto al espacio L.

Sea una función $\varphi(t) \in \mathrm{L}$ tal que

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \left\{ \begin{matrix} \cos n\,t \\ \operatorname{sen} n\,t \end{matrix} \right\} dt = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{[1]}$$

y vamos a probar que $\varphi(t) = 0$ en casi todo el intervalo $(0, 2\pi)$.

Consideremos la función

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^t \varphi(u)\,du$$

que es continua en (a, b), y se verifica:

$$\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \varphi(u)\,du = 0$$

en virtud de la hipótesis [1] para $n = 0$.

Integrando por partes se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} F(t) \cos n\,t\,d\,t = \left| \frac{F(t) \operatorname{sen} n\,t}{n} \right|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \operatorname{sen} n\,t\,d\,t =$$

$$= -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \operatorname{sen} n\,t\,d\,t = 0$$

análogamente se deduce

$$\int_0^{2\pi} F(t) \operatorname{sen} n\,t\,d\,t = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos n\,t\,d\,t = 0 \qquad (n > 0)$$

Para $n = 0$ sea

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t)\,d\,t = \alpha$$

y de las dos expresiones anteriores deducimos:

$$\int_0^{2\pi} \left(F(t) - \alpha\right) \begin{Bmatrix} \cos n\,t \\ \operatorname{sen} n\,t \end{Bmatrix} d\,t = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Ahora bien $F(t)$ es continua y, por consiguiente, también lo será $F(t) - \alpha$ y como ya hemos demostrado la completitud del sistema trigonométrico respecto de las funciones continuas, se verificará $F(t) \equiv \alpha$; pero la función $F(t)$ tiene por derivada en casi todos sus puntos la función $\varphi(t)$, la cual habrá de ser nula en ellos por ser $F(t) = \alpha =$ constante, luego $\varphi(t) \equiv 0$, salvò en un conde puntos de medida nula.

Sistemas cerrados, minimales y densos.—Un sistema de funciones se llama cerrado en R si cada función de R se puede aproximar tanto como se quiera, mediante combinaciones lineales de funciones del sistema. Es decir, dado $\varepsilon > 0$ se puede determinar una función

$$\Phi(t) = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \ldots + c_n \varphi_n$$

tal que la norma de la diferencia

$$\| f(t) - \Phi(t) \| = \left[\int_a^b \left[f(t) - \Phi(t) \right]^2 d\,t \right]^{\frac{1}{2}}$$

sea menor que ε.

Un sistema cerrado S se llama *denso-cerrado* respecto al espacio R si continua siendo cerrado al suprimir un subconjunto S_1, con tal que el conjunto $S - S_1$ sea infinito.

Análogamente se define el sistema *denso-completo*.

Un sistema cerrado S se llama *cerrado-minimal* respecto a R si, al suprimir un subconjunto S_1 tal que $S - S_1$ sea ∞, deja de ser cerrado.

De una manera análoga se define el sistema *completo-minimal*.

XI.—ORTOGONALIZACION

11. 1. Sistemas ortogonales deducidos de un sistema de funciones.

Todo lo estudiado respecto a ortogonalización de funciones (4.1 a 4.4) y en particular el método de E. Schmitd puede aplicarse casi sin alteración al espacio (L^2).

Vamos ahora a ocuparnos del problema de la determinación de todas las transformaciones lineales que permiten pasar de un sistema de funciones

$$f_1, f_2, f_3, \dots f_n$$

a otro ortogonal

$$\begin{array}{l} \varphi_1 = c_{11} f_1 + c_{12} f_2 + \dots + c_{1n} f_n \\ \varphi_2 = c_{21} f_1 + c_{22} f_2 + \dots + c_{2n} f_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n = c_{n1} f_1 + c_{n2} f_2 + \dots + c_{nn} f_n \end{array} \qquad [1]$$

Obtenida una transformación, el problema se reduce a hallar las transformaciones lineales que hacen pasar de un sistema ortogonal a otro también ortogonal.

Funciones linealmente independientes.—Se dice que n funciones

$$f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$$

son linealmente dependientes en un intervalo (a, b) si existen n constantes $c_1, c_2, \dots c_n$ no todas nulas, para las cuales sea

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0$$

en casi todos los puntos de (a, b).

Una condición necesaria para poder deducir el sistema [1] de funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ortogonales es que las funciones $f_1(t), f_2(t) \dots f_n(t)$ sean linealmente independientes. Pues si existiese una relación lineal

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \dots + \delta_n f_n = 0$$

se deduciría:

$$d_1 \varphi_1 + d_2 \varphi_2 + \dots + d_n \varphi_n = 0$$

lo cual es absurdo (véase 4.3).

11. 2. Determinante de Gram.

Llamaremos determinante de Gram de las funciones $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ a

$$G(f_1, f_2, \dots f_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

donde

$$\alpha_{rk} = \int_a^b f_r(t) f_k(t)\, dt$$

TEOREMA.—*Es condición necesaria y suficiente para que las funciones*

$$f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$$

de cuadrado sumable en (a, b) *sean linealmente dependientes en* (a, b) *que el determinante de Gram sea nulo.*

La condición es suficiente, pues si $G(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$ se pueden determinar n constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ no todas nulas, para las cuales es

$$\lambda_1 \alpha_{r1} + \lambda_2 \alpha_{r2} + \dots + \lambda_n \alpha_{rn} = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$

Tomemos la función

$$F(t) = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \dots + \lambda_n f_n(t)$$

multiplicando por $f_r(t)$ e integrando resulta

$$\int_a^b F(t) f_r(t)\, dt = \lambda_1 \alpha_{r1} + \lambda_2 \alpha_{r2} + \dots + \lambda_n \alpha_{rn} = 0$$

y de aquí

$$0 = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \int_a^b F(t) f_r(t)\, dt = \int_a^b \left(F(t) \sum_{r=1}^{n} \lambda_r f_r(t) \right) dt = \int_a^b F^2(t)\, dt$$

Luego $F^2(t)$ y $F(t)$ son nulas en casi todo (a, b).

La condición también es necesaria, pues si $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ son linealmente dependientes en (a, b) existirá un sistema de constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no todas nulas, para las cuales

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \ldots + \lambda_n f_n(t) = 0$$

en casi todo (a, b).

Multiplicando por $f_r(t)$ e integrando resulta

$$0 = \int_a^b f_r(t) \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s f_s(t) \right] dt = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \int_a^b f_r(t) f_s(t)\, dt = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s a_{rs}$$

para $r = 1, 2, \ldots, n$ de donde se deduce

$$G(f_1, f_2, \ldots f_n) = 0$$

Teorema IV.—*La característica* r *del determinante* G $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *da el número máximo de funciones del sistema linealmente independientes. Las* n — r *restantes son combinaciones lineales de aquéllas.*

Este teorema es consecuencia de una propiedad de los determinantes simétricos, que establece la existencia de un menor principal distinto de cero y de orden r, siendo $r \leq n$ la característica del determinante. Puede suponerse que este menor es $G(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ y en virtud del teorema III estas r funciones serán linealmente independientes.

Al considerar otra función cualquiera $f_{r+j}(t)$ resultará que

$$G(f_1, \ldots, f_r, f_{r+j}) = 0$$

y por consiguiente existirán unas constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+j}$ tales que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_r f_r + \lambda_{r+j} f_{r+j} = 0$$

como $\lambda_{r+j} \neq 0$ (en caso contrario existiría una combinación lineal entre $f_1, f_2, \ldots, f_r$) se podrá expresar f_{r+j} mediante una combinación lineal de las otras funciones.

El mismo proceso seguido en 4.3 permite demostrar el siguiente:

11. 3. Teorema de Schmidt.

Si las funciones $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ *de cuadrado sumable, son linealmente independientes en* (a, b) *se puede determinar otra función*

$$\varphi_n = \gamma_{1n} f_1 + \gamma_{2n} f_2 + \ldots + \gamma_{nn} f_n \qquad (\varphi_n \in L^2)$$

ortogonal a las $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_{n-1}(t)$. *Tal función está unívocamente determinada, salvo el signo, si se impone la condición de que sea normal.*

11. 4. Transformaciones de un sistema ortonormal.

Vamos a ver qué transformaciones hacen pasar de un sistema ortonormal a otro ortonormal.

Sea $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ un sistema ortonormal, y de él pasamos a otro

$$\psi_1(t) = l_{11}\varphi_1(t) + l_{12}\varphi_2(t) + \ldots + l_{1n}\varphi_n(t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi_n(t) = l_{n1}\varphi_1(t) + l_{n2}\varphi_2(t) + \ldots + l_{nn}\varphi_n(t)$$

TEOREMA.—*La condición necesaria y suficiente que ha de verificar la matriz* $\| l_{ik} \|$ *para que el sistema* $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ *sea también ortonormal es que* $\| l_{ik} \|$ *sea ortonormal por filas, es decir que:*

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik}\, l_{jk} = 0 \qquad i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik}^2 = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

La condición es necesaria, pues si $\{ \psi_i(t) \}$ es ortonormal se verifica:

$$0 = \int_a^b \psi_i(t)\,\psi_j(t)\,dt = \int_a^b (l_{i1}\varphi_1 + \ldots + l_{in}\varphi_n)(l_{j1}\varphi_1 + \ldots + l_{jn}\varphi_n)\,dt =$$
$$= l_{i1}\,l_{j1} + \ldots + l_{in}\,l_{jn}$$

$$1 = \int_a^b \psi_i^2(t)\,dt = \int_a^b (l_{i1}\varphi_1 + \ldots + l_{in}\varphi_n)^2\,dt = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \ldots + l_{in}^2$$

Es también suficiente, pues si la matriz es ortonormal por filas, se tiene:

$$\int_a^b \psi_i(t)\,\psi_j(t)\,dt = \int_a^b (l_{i1}\varphi_1 + \ldots + l_{in}\varphi_n)(l_{j1}\varphi_1 + \ldots + l_{jn}\varphi_n)\,dt =$$
$$= l_{i1}\,l_{j1} + \ldots = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Si un sistema de funciones $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ *es completo respecto de un cierto espacio, todo sistema ortonormal* $\{ \varphi_n(t) \}$ *deducido del anterior por combinación lineal también es completo respecto del mismo espacio.*

En efecto, si como consecuencia de ser

$$\int_b^a g(t) f_n(t)\, dt = 0 \qquad \text{para} \qquad n = 1, 2, \ldots n$$

resulta $\| g \| = 0$, también como consecuencia de ser

$$\int_a^b g(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0 \qquad \text{resulta} \qquad \int_a^b g(t) f_n(t)\, dt = 0$$

y, por tanto, $\| g \| = 0$.

Análogamente, *si el sistema* $f_1(t) \ldots f_n(t)$ *es cerrado también lo es todo sistema ortonormal* $\{ \varphi_n \}$ *deducido del anterior.*

11. 5. Interpretación geométrica del determinante de Gram.

Sean n *funciones* $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ *de cuadrado sumable de las que deducimos otras* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *mediante combinación lineal.*

$$\varphi_i(t) = c_{i1} f_1(t) + c_{i2} f_2(t) + \ldots + c_{in} f_n(t)$$

si el módulo de la transformación es $B = | c_{ik} | \neq 0$, *los determinantes de Gram de ambos sistemas de funciones están ligados por la relación:*

$$G(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n) = B^2\, G(f_1, f_2 \ldots f_n)$$

En efecto, si c'_{il} es un elemento de $G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ se verifica

$$c'_{il} = \int_a^b \varphi_i(t)\, \varphi_l(t)\, dt = \int_a^b \left[c_{i1} f_1(t) + \ldots + c_{in} f_n(t) \right] \left[c_{l1} f_1(t) + \ldots + c_{ln} f_n(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n c_{ik} f_k \sum_{m=1}^n c_{lm} f_m \right] dt = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n c_{ik} \sum_{m=1}^n c_{lm} f_m f_k \right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n c_{ik} \sum_{m=1}^n c_{lm}\, \alpha_{km} \quad ,, \quad \text{siendo} \quad \alpha_{mk} = \int_a^b f_k(t) f_m(t)\, dt$$

pero la suma

$$\sum_{k=1}^n c_{lm}\, \alpha_{km} = \beta_{lk}$$

es el elemento de lugar l, k del determinante producto $| c_{lm} | \cdot | \alpha_{km} |$ y análogamente

$$\sum_{m=1}^{n} c_{ik} \beta_{lk} = c'_{il}$$

es el elemento de lugar i, l del determinante producto

$$| c_{ik} | \cdot | \beta_{lk} | = | c_{ik} | \cdot | c_{lm} | \cdot | \alpha_{km} | = B^2 G(f_1 \ldots f_n)$$

luego

$$G(\varphi_1 \ldots \varphi_n) = B^2 G(f_1 \ldots f_n).$$

Dado un sistema de funciones $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ linealmente independientes deducimos mediante el método de ortogonalización de Schmidt el sistema ortogonal

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 \\ f_2 &= \varphi_1 - \frac{(f_1, \varphi_2)}{\|f_1\|^2} f_1 \\ f_3 &= \varphi_3 - \frac{(f_1, \varphi_3)}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{(f_2, \varphi_3)}{\|f_2\|^2} f_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= f_1 \\ \varphi_2 &= \frac{(f_1, \varphi_2)}{\|f_1\|^2} f_1 + f_2 \end{aligned}$$

El determinante de esta transformación es:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

luego se verifica:

$$G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = G(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

pero por ser ortogonales $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se verifica:

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} \|f_1\|^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \|f_2\|^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \|f_3\|^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \|f_n\|^2 \end{vmatrix} = \|f_1\|^2, \|f_2\|^2 \ldots \|f_n\|^2 \geqslant 0$$

y únicamente valdrá cero cuando sea nula alguna de las funciones $f_1 \ldots f_n$ cosa que hemos visto ocurría cuando las $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ no eran linealmente independientes. De todo esto se deduce que *el determinante de Gram de* n *funciones linealmente independientes es siempre* > 0.

TEOREMA.—*Sean* n *funciones* $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ *linealmente independientes en* (a, b) *y de cuadrado sumable, de las que deducimos por el método de Schmidt otras* n *funciones* $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *normales, tales que* $\varphi_i(t)$ *es combinación lineal de* $f_1(t), f_2, \ldots, f_i(t)$ *y ortogonal a* $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_{i-1}(t)$.

Se verifica que el determinante de Gram es

$$G(f_1, f_2 \ldots f_n) = \rho_1^2 \rho_2^2 \ldots \rho_n^2 \operatorname{sen}^2(f_1, f_2) \cos^2(f_3 \varphi_3) \ldots \cos^2(f_n \varphi_n)$$

siendo $\rho_i = \| f_i \|$.

En efecto, por ser

$$\varphi_n(t) = \gamma_1 f_1 + \ldots + \gamma_{n-1} f_{n-1} + \gamma_n f_n \qquad \gamma_n \neq 0$$

tendremos:

$$f_n(t) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n \varphi_n$$

multiplicando por $\varphi_n(t)$ e integrando se tiene:

$$\int_a^b f_n(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \alpha_n = \sqrt{\left[\int_a^b f_n^2(t)\, dt\right]\left[\int_a^b \varphi_n^2(t)\, dt\right]} \; \frac{\int_a^b f_n(t)\, \varphi_n(t)\, dt}{\sqrt{\left[\int_a^b f_n^2(t)\, dt\right]\left[\int_a^b \varphi_n^2(t)\, dt\right]}} =$$

$$= \rho_n \cos(f_n, \varphi_n)$$

Como de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, \varphi_n$ se pasa a $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n$ por medio de la sustitución lineal:

$$f_1 = f_1, f_2 = 0 + f_2 \ldots f_n = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n \varphi_n$$

de módulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_n = \rho_n \cos(f_n, \varphi_n)$$

se verifica:

$$G(f_1 \ldots f_n) = \rho_n^2 \cos^2(f_n, \varphi_n)\, G(f_1 \ldots f_{n-1}, \varphi_n)$$

y por ser φ_n ortogonal a $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ y normal será:

$$G(f_1, \ldots, f_{n-1}\,\varphi_n) = \begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2\,dt \ldots \int_a^b f_1 f_{n-1}\,dt & \int_a^b f_1\,\varphi_n\,dt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \int_a^b f_2\,\varphi_n\,dt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \int_a^b \varphi_n^2\,dt \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0\ 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \end{vmatrix} = G(f_1 \cdots f_{n-1})$$

luego

$$G(f_1 \ldots f_n) = \rho_n^2 \cos^2(f_n, \varphi_n)\, G(f_1 \ldots f_{n-1})$$

La sucesiva aplicación de esta fórmula conduce a la expresión:

$$G(f_1 \ldots f_n) = \rho_n^2\,\rho_{n-1}^2 \cdots \rho_3^2 \cos^2(f_n, \varphi_n) \ldots \cos^2(f_3, \varphi_3)\, G(f_1, f_2)$$

pero

$$G(f_1, f_2) = \left[\int_a^b f_1^2(t)\,dt\right]\left[\int_a^b f_2^2(t)\,dt\right] - \left(\int_a^b f_1(t) f_2(t)\,dt\right)^2 =$$

$$= \left[1 - \left(\frac{\int_a^b f_1(t) f_2(t)\,dt}{\sqrt{\left[\int_a^b f_1^2(t)\,dt\right]\left[\int_a^b f_2^2(t)\,dt\right]}}\right)^2\right] \rho_1^2\,\rho_1^2 =$$

$$= \left[1 - \cos^2(f_1, f_2)\right] \rho_1^2\,\rho_2^2 = \rho_1^2\,\rho_2^2 \operatorname{sen}^2(f_1, f_2)$$

luego

$$G(f_1 \ldots f_n) = \rho_1^2\,\rho_2^2 \ldots \rho_n^2 \operatorname{sen}^2(f_1, f_2) \cos^2(f_3\,\varphi_3) \ldots \cos^2(f_n\,\varphi_n)$$

Si las funciones $f_1(t) \ldots f_n(t)$ son normales se verifica:

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = 1$$

y por consiguiente

$$G(f_1 \ldots f_n) = \operatorname{sen}^2(f_1, f_2) \cos^2(f_3, \varphi_3) \ldots \cos^2(f_n, \varphi_n) \leq 1$$

Si además

$$\operatorname{sen}^2(f_1, f_2) = 1, \qquad \cos^2(f_3, \varphi_3) = 1 \ldots \cos^2(f_n, \varphi_n) = 1$$

habrá de ser

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 1$$

pero por ser $\operatorname{sen}^2(f_1, f_2) = 1$ ha de ser f_1 ortogonal a f_2. De $\cos^2(f_3, \varphi_3) = 1$ se deduce:

$$1 - \cos^2(f_3, \varphi_3) = 1 - \frac{\left[\int_a^b f_3 \varphi_3 \, dt\right]^2}{\int_a^b f_1^2 \, dt \cdot \int_a^b f_2^2 \, dt} = 0$$

luego

$$\int_a^b f_1^2 \, dt \cdot \int_a^b f_2^2 \, dt - \left[\int_a^b f_3 \varphi_3 \, dt\right]^2 = G(f_3, \varphi_3) = 0$$

de donde resulta:

$$f_3 = k \varphi_3$$

y por ser φ_3 ortogonal a f_1 y f_2 también lo será f_3. Lo mismo veríamos que f_i es ortogonal a $f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}$, lo que demuestra que cuando el determinante de Gram de n funciones normales $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vale 1, estas funciones son ortogonales. Recíprocamente se demuestra con facilidad que el determinante de Gram de n funciones ortonormales vale 1.

Hemos visto que el determinante de Gram de n funciones es siempre ≥ 0. En particular para $n = 2$ se tiene:

$$G(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2 \, dt & \int_a^b f_1 f_2 \, dt \\ \int_a^b f_1 f_2 \, dt & \int_a^b f_2^2 \, dt \end{vmatrix} = \left[\int_a^b f_1^2 \, dt\right]\left[\int_a^b f_2^2 \, dt\right] - \left[\int_a^b f_1 f_2 \, dt\right]^2 \geq 0$$

o sea

$$\left[\int_a^b f_1 f_2 \, dt\right]^2 \leq \left[\int_a^b f_1^2 \, dt\right]\left[\int_a^b f_2^2 \, dt\right]$$

que es la *desigualdad de Schwarz* obtenida anteriormente.

El $=$ vale únicamente cuando $f_1 = \lambda f_2$.

Si $f_2 \equiv 1$ la desigualdad anterior se convierte en

$$\left[\int_a^b f(t) \, dt\right]^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t) \, dt$$

11. 6. Ortogonalización en intervalos más extensos.

El problema de la ortogonalización puede plantearse en otra forma: Dadas n funciones ortogonales $f_1(t) \ldots f_n(t)$ definidas en un intervalo (a, b) ¿Se podrá formar un sistema $\{\varphi_n\}$ de funciones ortogonales en un intervalo (a, c), $c > b$ y tales que que $f_n = \varphi_n$ en (a, b)? Una cuestión análoga se plantea si el sistema $\{f_n\}$ es ortogonal en (a, b) ¿Se conservará la ortogonalidad en (a, c)?

Una manera de resolver este problema sería tomar $f_n(t) = 0$ en (b, c); pero tiene el inconveniente de hacer perder la completitud del sistema $\{f_n\}$.

Otra solución se obtiene definiendo las funciones de manera que coincidan con $f_n(t)$ en (a, b) y sean ortogonales en (b, c) pues

$$\int_a^c f_i(t) f_k(t) \, dt = \int_a^b f_i(t) f_k(t) \, dt + \int_b^c f_i(t) f_k(t) \, dt = 0$$

Si además se desea la ortonormalización en (a, c), será necesaria alterar las funciones en (a, b). Una condición necesaria y suficiente para que este problema tenga solución sin necesidad de modificar las funciones $f_n(t)$ la da el siguiente

Teorema de Schur (*).— *Si un sistema* $\{f_n(t)\}$ *de funciones de cuadrado sumable está definido en* (a, b) $(0 < a < b < 1)$, *una condición necesaria y suficiente para que exista otro sistema* $\{\varphi_n(t)\}$ *de funciones ortonormales en* $(0, 1)$ *tales que* $\varphi_n(t) \equiv f_n(t)$ *en* (a, b) *es que*

$$\text{máx} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i(t)\right)^2 dt = 1$$

(*) Puede verse la demostración de este teorema en la obra citada de Kazcmarz y Steinhaus, página 70.

con la condición complementaria

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 = 1$$

En las aplicaciones al análisis armónico se utilizan los desarrollos ortogonales en intervalos infinitos. En ellos se define la ortogonalidad de las funciones $f_i(t), f_k(t)$ mediante el límite:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{2}{2T} \int_{-T}^{+T} f_i(t) f_k(t)\, dt = 0$$

En este sentido es ortogonal el sistema $\{\cos \lambda t\}$ (λ real) pues

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos \lambda t \cos k t\, dt \right| = \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{2} \left[\cos(\lambda + k)t + \cos(\lambda - k)t\right] dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{4T} \left[\frac{\operatorname{sen}(\lambda + k)t}{\lambda + k} + \frac{\operatorname{sen}(\lambda - k)t}{\lambda - k} \right]_{-T}^{+T} \right| \leq \frac{1}{2T} \left[\frac{1}{|\lambda + k|} + \frac{1}{|\lambda - k|} \right] \to 0$$

XII.—EL PROBLEMA DE LA APROXIMACION OPTIMA

12. 1. Convergencia en media.

Dado un sistema ortonormal $\{\varphi_n(t)\}$ en (a, b) ($\varphi_n \subset L^2$) a toda función $f(t)$ perteneciente al espacio L^2 se la puede asociar un desarrollo de la forma

$$f(t) \sim c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n + \dots$$

donde c_n son los coeficientes de Fourier:

$$c_n = \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt$$

Análogamente a lo estudiado en el espacio de las funciones parcialmente continuas, se plantea aquí el problema de averiguar cuándo se puede sustituir en el anterior desarrollo el signo $\sim$ por el $=$.

Generalizando para este espacio las definiciones dadas anteriormente diremos: *que una sucesión* $S_n(t)$ *converge en media hacia* $f(t)$ *cuando*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left[f(t) - S_n(t)\right]^2 dt = 0$$

o lo que es lo mismo, cuando

$$\lim_{n \to \infty} \| f(t) - S_n(t) \| = 0$$

También se suele decir que $S_n(t)$ converge fuertemente hacia $f(t)$ y se representa por $\mathrm{Lim}\, S_n(t) = f(t)$ o bien $S_n \to\to (t) f(t)$.

TEOREMA.—*Si la sucesión de sumas parciales*

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$$

converge fuertemente hacia una función f (t) *los coeficientes* c_i *son los de Fourier de la función* f (t).

En efecto, para $k < n$ se verifica:

$$\int_a^b \varphi_k(t) \left[f(t) - S_n(t) \right] dt = \int_a^b f(t) \varphi_k(t)\, dt - c_k$$

y aplicando la desigualdad de Schwarz a la expresión anterior resulta:

$$\left| \int_a^b \varphi_k(t) \left[f(t) - S_n(t) \right] dt \right| \leq \left| \int_a^b \varphi_k^2(t)\, dt \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int_a^b \left[f(t) - S_n(t) \right]^2 dt \right|^{\frac{1}{2}} = \| f(t) - S_n(t) \| < \varepsilon$$

luego

$$\left| \int_a^b f(t) \varphi_k(t)\, dt - c_k \right| \to 0 \quad , \quad \text{o sea} \quad \int_a^b f(t) \varphi_k(t)\, dt = c_k$$

Imponiendo la condición de ser cerrado el sistema $\{\varphi_n(t)\}$ demostraremos más adelante el recíproco de este teorema.

12. 2. La aproximación óptima.

Sea $f(t)$ una función perteneciente a L^2 y $\{\varphi_i(t)\}$ un sistema ortonormal en L^2: Formemos las sumas

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \varphi_i(t).$$

Fijado n, el problema consiste en determinar $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$, de manera que sea mínima la función

$$F(\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n) = \int_a^b \left[f(t) - S_n(t) \right]^2 dt$$

Este problema tiene la misma solución que el análogamente planteado en el campo de las funciones parcialmente continuas, es decir, que *la aproximación óptima la dan los coeficientes de Fourier*. La demostración es la misma de (5. 2). Como allí se llega a la desigualdad de Bessel:

$$F(c_1; c_2 \ldots c_n) = \int_a^b f^2(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \geq 0 \qquad [1]$$

Si $S_n(t)$ converge fuertemente hacia $f(t)$ la expresión anterior tiende a cero y, por consiguiente:

$$\int_a^b f^2(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

De lo desigualdad [1], válida para todas las funciones del espacio L^2 se deduce

$$\int_a^b f^2(t)\,dt \geq \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

Lo que nos permite formar inmediatamente series trigonométricas que no son series de Fourier de funciones pertenecientes al espacio L^2. Basta tomar los coeficientes c_i de manera que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ sea divergente.

Si $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ es convergente, la sucesión de sumas parciales

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$$

converge fuertemente, puesto que

$$\| S_m(t) - S_n(t) \| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{m} c_i^2} < \varepsilon$$

TEOREMA.—*Si* $\{\varphi_i(t)\}$ *es un sistema ortonormal, cerrado respecto a* L^2 *y* $f(t) \in L^2$, *siendo* c_i *sus coeficientes de Fourier, se verifica:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left[f(t) - S_n(t) \right]^2 dt = 0$$

siendo

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$$

es decir, las sumas de Fourier convergen fuertemente hacia $f(x)$.

En efecto, por hipótesis dado $\varepsilon > 0$ se puede determinar un sistema de números $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ tales que

$$\|f(t) - (\xi_1 \varphi_1 + \xi_2 \varphi_2 + \cdots + \xi_n \varphi_n)\| < \varepsilon$$

pero como las constantes de Fourier c_i dan la aproximación óptima, se tendrá:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) - f(t) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i(t) - f(t) \right\| < \varepsilon$$

y por consiguiente:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) = f(t) \qquad \text{c. q. d.}$$

Si $\{\varphi_i(t)\}$ es un sistema ortonormal en L^2 y d_i las constantes de Fourier de una función $g(t) \in L^2$, la diferencia

$$h(t) = g(t) - \sum_{i=1}^{n} d_i \varphi_i(t)$$

es ortogonal a todas las funciones $\varphi_i(t)$ del sistema, puesto que

$$\int_a^b \Big[g(t) - \sum_{i=1}^{n} d_i \varphi_i(t) \Big] \varphi_i(t)\, dt = \int_a^b g(t) \varphi_i(t)\, dt - d_i \int_a^b \varphi_i^2(t)\, dt = d_i - d_i = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

Recíprocamente, si $h(t)$ es ortogonal a todas las funciones $\varphi_i(t)$, los d_i son las constantes de Fourier de la función $g(t)$, y dan la aproximación óptima en el sentido de los mínimos cuadrados, pues si

$$0 = \int_a^b \Big[g(t) - \sum_{i=1}^{n} d_i \varphi_i(t) \Big] \varphi_i(t)\, dt = \int_a^b g(t) \varphi_i(t)\, dt - d_i$$

se verifica:

$$d_i = \int_a^b g(t) \varphi_i(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Esta propiedad vale, aunque al sistema $\{\varphi_i(t)\}$ no sea ortonormal, como demuestra el siguiente

TEOREMA.—*Si* $\{f_i(t)\}$ *es un sistema de* n *funciones cualesquiera pertenecientes* *a* L^2 *y* $\sum_{i=1}^{n} d_i f_i(t)$ *da la aproximación óptima en el sentido de los mínimos cuadrados, la diferencia*

$$g(t) - \sum_{i=1}^{n} d_i f_i(t) = h(t)$$

es ortogonal a todas las $f_i(t)$ *y recíprocamente.*

Supongamos primero que el sistema sea linealmente independiente.

En este caso, el método de Schmidt permite formar un sistema de n funciones $\{\varphi_i(t)\}$ ortonormal, combinación lineal del anterior, y $h(t)$ se transformará en

$$h(t) = g(t) - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$$

y como $\| h(t) \|$ es mínimo por hipótesis, en virtud de lo visto anteriormente ha de ser $h(t)$ ortogonal a $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ y por ser éstas combinaciones lineales de las $f_i(t)$ resulta $h(t)$ ortogonal a $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Si en el sistema $\{f_i(t)\}$ solamente hubiese p funciones linealmente independientes $f_1(t), f_2(t) \ldots f_p(t)$ y las $n - p$ restantes fuesen combinaciones lineales de éstas, por el procedimiento de Schmidt deduciríamos p funciones ortonormales $\bar{\varphi}_1(t), \bar{\varphi}_2(t) \ldots \bar{\varphi}_p(t)$ transformándose $h(t)$ en

$$h(t) = g(t) - \sum_{i=1}^{p} a_i \bar{\varphi}_i(t)$$

Por la condición de ser mínima $h(t)$ será ortogonal a $\bar{\varphi}_1(t) \ldots \bar{\varphi}_p(t)$ y por consiguiente a cada una de las funciones del sistema $\{f_i(t)\}$.

Hemos probado que es condición necesaria para que sea mínima la expresión

$$F(x_1 \ldots x_n) = \int_a^b \left[g(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t)\right]^2 dt$$

que se verifique

$$\int_a^b \left[g(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t)\right] f_k(t)\, dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

Llamando

$$\int_a^b g(t) f_k(t)\, dt = g_k \quad ,, \quad \int_a^b f_i(t) f_k(t)\, dt = a_{ik}$$

las condiciones [1] se reducen a las

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i = g_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

Este sistema es resoluble respecto a x_i pues si el determinante

$$A = \| a_{ik} \| \neq 0$$

evidentemente hay un sistema único de soluciones y si $A = 0$ hay una fila que es combinación lineal de otras varias, es decir, existe una relación del tipo

$$\lambda a_{ik} + \mu a_{ij} + \ldots + \xi a_{il} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

y vamos a demostrar que también se verifica:

$$\lambda g_k + \mu g_j + \ldots + \xi g_l = 0$$

con lo cual quedará probado que el sistema [1] es compatible.

Sea

$$L(t) = \lambda f_k(t) + \mu f_j(t) + \ldots + \xi f_l(t)$$

multiplicando por $f_i(t)$ e integrando se tendrá:

$$\int_a^b f_i(t) L(t)\, dt = \int_a^b f_i(t) \left[\lambda f_k(t) + \mu f_j(t) + \ldots + \xi f_l(t) \right] dt =$$

$$= \lambda a_{ik} + \mu a_{ij} + \ldots + \xi a_{il} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

pero

$$\int_a^b L(t)^2\, dt = \int_a^b L(t) \left[\lambda f_k(t) + \mu f_j(t) + \ldots + \xi f_l(t) \right] dt = 0$$

luego ha de ser $L(t) \equiv 0$ en casi todos los puntos de (a, b).

Multiplicando ahora $L(t)$ por $g(t)$ e integrando tendremos:

$$0 = \int_a^b L(t) g(t)\, dt = \lambda g_i + \mu g_j + \ldots + \xi g_l$$

con lo que queda probado [3] y, por consiguiente, que el sistema [1] es compatible también en este caso. Si $A \neq 0$ la solución de [1] es única. Vamos a ver que también lo es aunque $A = 0$.

En efecto, supongamos que existiesen dos sistemas de soluciones

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n$$
$$x''_1, x''_2, \dots, x''_n$$

las diferencias

$$\xi_1 = x'_1 - x''_1, \dots, \xi_n = x'_1 - x''_n$$

verificarían la relación

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \xi_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

y también

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \xi_i = 0$$

o sea

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{i=1}^{n} \xi_i \int_a^b f_i(t) f_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \int_a^b \left[f_k(t) \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(t) \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i(t) \right] dt = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(t) \right]^2 dt = 0$$

luego

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(t) = 0$$

es casi todo (a, b), lo cual quiere decir que los dos sistemas de soluciones dan el mismo valor para la expresión

$$\sum_{k=1}^{n} x_k f_k(t)$$

es decir, que las dos soluciones son la misma.

Vamos a demostrar ahora que la condición [1] es suficiente para que sea mínima la función $F(x_1, x_2 \dots x_n)$.

Supongamos primeramente $A \neq 0$. Podemos entonces deducir del sistema $\{f_i(t)\}$ otro $\{\varphi_i(t)\}$ ortonormal en (a, b) mediante combinaciones lineales.

Sustituyendo los valores de $f_i(t)$ tendremos:

$$F(x_1, \dots x_n) = \int_a^b \left[g(t) - \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i(t) \right]^2 dt = \Phi(y_1, y_2, \dots y_n)$$

siendo

$$\begin{array}{ll|ll}
y_1 = d_{11}\, x_1 + d_{21}\, x_2 + \ldots + d_{n1}\, x_n & & x_1 = c_{11}\, y_1 + c_{21}\, y_2 + \ldots + c_{n1}\, y_n & \\
y_2 = \qquad\qquad d_{22}\, x_2 + \ldots + d_{n2}\, x_n & & x_2 = \qquad\qquad c_{22}\, y_2 + \ldots + c_{n2}\, y_n & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
y_n = \qquad\qquad\qquad\qquad d_{nn}\, x_n & & x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}\, y_n &
\end{array}$$

Si $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es mínima también lo es $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y recíprocamente. Ahora bien, hemos visto que es condición suficiente para que $\Phi(y_1, \ldots\ldots y_n)$ sea mínima que se verifique

$$y_i = \int_a^b g(t)\, \varphi_i(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

de la que deducimos los valores de $x_1, \ldots x_n$ mediante las fórmulas de transformación; pero esta solución ha de verificar [1] y como la solución de este sistema [1] es única resulta que es condición suficiente que se verifique [1] para que sea mínima la función $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$.

Si $A = 0$, es decir, si hay p funciones linealmente independientes

$$f_1(t) \ldots f_p(t) \qquad (1 \leq p < n),$$

y las $n - p$ restantes son expresables mediante aquéllas, consideremos la función

$$F^*(x_1, x_2, \ldots x_p) = \int_a^b \Big[g(t) - \sum_{i=1}^{p} x_i f_i(t) \Big]^2 dt$$

y determinemos el sistema

$$x_1^*, x_2^*, \ldots x_p^*$$

que hace mínimo $F^*(x_1, \ldots x_p)$ como

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' f_i(t) = \sum_{i=1}^{p} x_i f_i(t)$$

el sistema $x_1^*, x_2^*, \ldots x_p^*, 0, \ldots 0$ hará mínimo a $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ y aplicando el razonamiento anterior se ve que también en este caso las condiciones [1] son suficientes para el mínimo de $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Se puede también calcular el mínimo de F sin necesidad de pasar a un sistema ortonormal.

Si $A_n \neq 0$, será:

$$x_k = \frac{A_n^k}{A_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

siendo A_n^k el determinante que se obtiene al sustituir en A la columna K por $g_1, g_2, \ldots g_n$.

Obtenemos así:

$$\min F(x_1, \ldots, x_n) = \int_a^b \left[g(t) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(t)\right]^2 dt = \int_a^b g(t)\left[g(t) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(t)\right] dt =$$

$$= \int_a^b g^2(t)\, dt - \sum_{i=1}^n g_i x_i = \int_a^b g^2(t)\, dt - \frac{1}{A_n} \sum_{i=1}^n g_i A_n^i = g_0 - \frac{1}{A_n} \sum_{i=1}^n A_n^i g_i =$$

$$= \frac{1}{A} \begin{vmatrix} g_0, g_1, \ldots, g_n \\ g_1, a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{n1}, a_n, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{G(g_0, f_1, \ldots, f_n)}{G(f_1, \ldots, f_n)}$$

(Continuará).