Introducción a la Teoría de series de Fourier

Conferencias explicadas en la Cátedra
de la Fundación «Conde de Cartagena»

por

Sixto Ríos (*)

(Conclusión) (**)

XIII.—EL ESPACIO DE HILBERT

13. 1. Construcción axiomática del espacio de Hilbert.

Para proseguir el estudio de las funciones de cuadrado sumable vamos a definir axiomáticamente el espacio de Hilbert, siguiendo a von Neumann, y comprobando, a posteriori, que el espacio de las funciones de cuadrado sumable verifica dichos axiomas.

Definición.—Un conjunto H de elementos $f, g, \ldots$ se llama espacio de Hilbert si se verifica los siguientes postulados.

Postulado A.—H *es un espacio vectorial lineal*, es decir, (α) existe una operación llamada suma, aplicable a cada par de elementos del espacio, cuyo resultado pertenece a H y tal que verifica las propiedades asociativa y conmutativa:

$$f+g=g+f$$
$$(f+g)+h=f+(g+h)$$

(β) Existe una operación llamada producto que verifica las propiedades asociativa y distributiva, aplicable a cada número complejo a y a cada elemento f de H, tal que $af \subset \mathrm{H}$ y $1 \cdot f = f$.

Dichas propiedades asociativa y distributiva se expresan:

$$a(f+g)=af+ag \quad ,, \quad (a+b)f=af+bf \quad ,, \quad (ab)f=a(bf)$$

(*) Redactadas con la colaboración de J. Béjar, T. Iglesias y M.ª E. Ríos.

(**) Véase Tomo XLI, pág. 43 y XLII pág. 9.

Existe en H un elemento nulo, que se designa con o, tal que

$$f + o = f \quad ,, \quad a \cdot o = o \quad ,, \quad o \cdot f = o \quad (*)$$

Postulado B.—*A cada par de elementos* f, g *de* H *se le puede asignar un número complejo que designaremos por* (f, g) *y llamaremos producto escalar, que tiene las siguientes propiedades:*

1) $(af, g) = a\,(f, g)$
2) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
3) $(g, f) = \overline{(f, g)}$ (simetría hermitiana)
4) $(f, f) \geq o$ llamaremos norma de f al número real $(f, f)^{\frac{1}{2}} = \|f\|$
5) $(f, f) = o$ sí, y solamente si $f = o$.

Definiremos la distancia de dos elementos f, g, como la norma de la diferencia $\|f - g\|$.

Postulado C.—Dado n arbitrariamente grande, existen n elementos de H linealmente independientes, es decir, que *este espacio es de infinitas dimensiones.*

Postulado D.—*El espacio es separable*, es decir, existe una sucesión de elementos de H tal que dado un $\varepsilon > o$, para cada elemento de H se puede determinar un elemento de la sucesión que diste de él menos de ε.

Postulado E.—*El espacio* H *es completo*, es decir, que si una sucesión de elementos es convergente, converge hacia un elemento del espacio. Esto es, si una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de H es tal que dado $\varepsilon > o$, existe N, tal que para $n > N$ y cualquier p es $\|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon$, existe un elemento $f \subset H$ de modo que $\|f - f_n\| \to o$, para $n \to \infty$.

La compatibilidad de estos axiomas es una consecuencia de lo expuesto en el párrafo siguiente.

13. 2. El espacio de las funciones de cuadrado sumable.

Vamos a demostrar ahora que el espacio E_f de las funciones complejas de variable real de cuadrado sumable en un intervalo (a, b) (**) es un espacio H. La función $f(x) = \varphi(x) + i\,\psi(x)$ es un punto de E_f si existe

$$\int_a^b |f|^2\,dx$$

Diremos que un elemento f de este espacio es nulo cuando la función f *es cero*

(*) Obsérvese que en las dos primeras relaciones o es un elemento del espacio y en la tercera es el número nulo.

(**) Todo esto se generaliza fácilmente al caso de funciones $f(u_1, \ldots u_k)$ definidas en un espacio euclídeo de k dimensiones.

en casi todos los puntos de (a, b) y que dos funciones son iguales cuando su diferencia es el elemento nulo.

Veamos ahora que el espacio E_f verifica los postulados: A) E_f es un espacio vectorial lineal.

a) Si $f \subset E_f$ también $af \subset E_f$ y es $\int_a^b |af|^2 dP = |a|^2 \int_a^b |f|^2 dP$

b) Si $f \subset E_f$ y $g \subset E_f$ también $(f+g) \subset E_f$ pues $|f+g|^2 =$

$$= (f+g)(\bar{f}+\bar{g}) = f\bar{f} + f\bar{g} + \bar{f}g + g\bar{g} = |f|^2 + |g|^2 + 2\,\mathrm{R}(f\bar{g})$$

$$\text{pero} \quad |\mathrm{R}(fg)| \leq |f\bar{g}| \leq |f| \cdot |g| \leq \frac{1}{2}[|f|^2 + |g|^2]$$

resulta así que la función $f+g$ tiene una mayorante sumable y, por consiguiente, también es sumable, y como consecuencia lo será también la combinación lineal

$$\lambda f + \mu g$$

donde λ y μ son dos números complejos.

Se ve, pues, que tomando como definición de suma y producto en el espacio L^2 las ordinarias se verifican todas las propiedades expresadas.

En particular

$$f + 0 = 1 \cdot f + 0 \cdot f = (1+0) f = 1 \cdot f = f$$

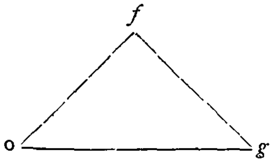
Por definición

$$-f = (-1) f$$

de donde

$$f - g = f + (-1) g$$

Si en un espacio damos una definición de distancia $D(f, g)$ la noción de producto escalar viene definida del mismo modo que en el espacio euclidiano:



$$D(f,g)^2 = D(0,f)^2 + D(0,g)^2 - 2(f,g)$$

$$\text{o sea} \quad (f,g) = \frac{1}{2}\left[D(0,f)^2 + D(0,g)^2 - D(f,g)^2\right]$$

Tomando como distancia la expresión

$$D(f,g) = \| f - g \| = \left\{ \int_a^b |f-g|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

resulta para el producto escalar la definición

$$(f, g) = \frac{1}{2}\left[\|f\|^2 + \|g\|^2 - \|\gamma\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\int_a^b |f|^2\,dx + \int_a^b |g|^2\,dx - \int_a^b |f-g|^2\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_a^b |f|^2\,dx + \int_a^b |g|^2\,dx - \int_a^b (f-g)(\overline{f-g})\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_a^b |f|^2\,dx + \int_a^b |g|^2\,dx - \int_a^b |f|^2\,dx - \int_a^b |g|^2\,dx + \int_a^b (f\bar{g} + g\bar{f})\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b (f\bar{g} + \bar{f}g)\,dx$$

o sea

$$(f, g) = \frac{1}{2}\int_a^b f\bar{g} + g\bar{f})\,dx$$

De este modo obtenemos un producto escalar que es simétrico, es decir, $(f, g) = (g, f)$. Esta definición es más natural, pero menos sencilla que la siguiente, introducida por Neumann, que tiene la simetría hermitiana:

$$(f, g) = \int_a^b f\bar{g}\,dx$$

Vamos a comprobar que este producto verifica los postulados B:

1) $(kf, g) = \int_a^b kf\bar{g}\,dx = k\int_a^b f\bar{g}\,dx = k(f, g)$

2) $(f_1 + f_2, g) = \int_a^b (f_1 + f_2)\bar{g}\,dx = \int_a^b f_1\bar{g}\,dx + \int_a^b f_2\bar{g}\,dx = (f_1, g) + (f_2, g)$

3) $(g, f) = \int_a^b g\bar{f}\,dx = \int_a^b \overline{\bar{g}f}\,dx = (\overline{f, g})$

4) $(f, f) = \int_a^b f\bar{f}\,dx = \int_a^b |f|^2\,dx \geq 0$

5) $(f, f) = 0$ sí, y sólo si $f = 0$

E$_f$ *es un espacio de infinitas dimensiones.*—En efecto, dado n arbitrariamente grande consideremos n conjuntos $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ disjuntos y de medida finita, contenidos en el intervalo $(a, b) \equiv \Omega$.

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ las correspondientes funciones características, o sea·

$$\begin{array}{lcl} \varphi_i = 1 & \text{en todo punto} & x \in \Omega_i \\ \varphi_i = 0 & \text{si} & x \in \Omega \cdot \Omega_i \end{array}$$

Se tendrá entonces

$$\int_a^b |\varphi_i|^2 \, d\,\mathrm{P} = \text{med } \Omega_i,$$

luego $\varphi_i \in \mathrm{E}_f$. Además son linealmente independientes, pues si fuese

$$\| a_1 \varphi_1 + \ldots + a_n \varphi_n \| = 0$$

sería también

$$a_1 \varphi_1 + \ldots + a_n \varphi_n = 0$$

en casi todo Ω; pero en un punto de Ω_1 se verifica

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = 0,$$

luego queda $a_1 = 0$. Análogamente se ve que

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$$

E_j *es un espacio completo, es decir, si una sucesión* $\{ \mathrm{f_n} \}$ *de funciones del espacio* L^2 *es convergente en media, lo es hacia una función de* L^2.

Vamos a extraer de la sucesión $\{f_n\}$ una sucesión parcial $\{f_{n_p}\}$ convergente en casi todo el intervalo (a, b) (que designaremos abreviadamente Ω) que nos definirá, por tanto, una función f, y demostraremos:

$$\begin{array}{ll} 1.^{\circ} & f \subset \mathrm{L}^2 \quad \text{y el punto} \quad y^f \quad \text{a} \quad \mathrm{E}_j \\ 2.^{\circ} & f_n \to\to f \end{array}$$

1.° Por hipótesis, a todo $\varepsilon > 0$, corresponde $\mathrm{N}(\varepsilon)$, tal que

$$\| f_m - f_n \|^2 = \int_{\Omega} | f_m - f_n |^2 \, d\,x < \varepsilon \quad \text{si} \quad \left. \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} > \mathrm{N}(\varepsilon)$$

Consideremos la sucesión de números:

$$n_1 = \mathrm{N}\left(\frac{1}{8}\right); \quad n_2 \geq \left[n_1, \mathrm{N}\left(\frac{1}{8^2}\right)\right]; \quad n_3 \geq \left[n_2, \mathrm{N}\left(\frac{1}{8^3}\right)\right] \ldots n_p \geq \left[n_{p-1}, \mathrm{N}\left(\frac{1}{8^p}\right)\right]$$

que tiende hacia ∞ y verifica las siguientes condiciones:

$$\|f_{n_2} - f_{n_1}\|^2 < \frac{1}{8}, \|f_{n_3} - f_{n_2}\|^2 < \frac{1}{8^2}, \ldots, \|f_{n_{p+1}} - f_{n_p}\|^2 < \frac{1}{8^p}$$

y de aquí

$$|f_{n_{\nu+1}} - f_{n_\nu}| < \frac{1}{2^\nu}$$

salvo en un conjunto $\mathrm{P}^{(\nu}$ de medida

$$m(\mathrm{P}^{(\nu)}) = \mu^\nu < \frac{1}{2^\nu}$$

en el que se verifica

$$|f_{n_{\nu+1}} - f_{n_\nu}| \geq \frac{1}{2^\nu}$$

pues como

$$\int_\Omega |f_{n_{\nu+1}} - f_{n_\nu}|^2 \, dx < \frac{1}{8^\nu}$$

si en el conjunto $\mathrm{P}^{(\nu}$ se verifica

$$|f_{n_{\nu+1}} - f_{n_\nu}| \geq \frac{1}{2^\nu}$$

se tendrá

$$\frac{1}{4^\nu} \mu^\nu = \frac{1}{4^\nu} \int_{\mathrm{P}^{(\nu}} dx \leq \int_{\mathrm{P}^{(\nu}} |f_{n_{\nu+1}} - f_{n_\nu}|^2 \, dx < \int_\Omega |f_{n_{\nu+1}} - f_{n_\nu}|^2 \, dx < \frac{1}{8^\nu}$$

$$\text{o sea} \quad \mu^\nu = \mathrm{med}\,(\mathrm{P}^{(\nu)}) < \frac{1}{2^\nu}$$

Consideremos ahora los conjuntos:

$$\mathrm{Q}^{(\nu} = \mathrm{P}^{(\nu} + \mathrm{P}^{(\nu+1} + \ldots$$

evidentemente $Q^{(\nu} \supset Q^{(\nu+1} \supset \ldots$ y será:

$$\text{med}\,(Q^{(\nu)}) \leq \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{\nu-1}}$$

Por la manera como hemos definido los $Q^{(\nu}$ resulta que un punto P pertenece a $Q^{(\nu}$, si para un cierto valor $p \geq \nu$ se verifica:

$$\left| f_{n_{p+1}} - f_{n_p} \right| \geq \frac{1}{2^p}$$

y un punto P no pertenece a $Q^{(\nu}$ si para todo $p \geq \nu$ es

$$\left| f_{n_{p+1}} - f_{n_p} \right| < \frac{1}{2^p}$$

La desigualdad

$$\left| f_{n_{p+1}} - f_{n_p} \right| < \frac{1}{2^p}$$

que se verifica en el conjunto $\Omega - Q^{(\nu}$ para $p \geq \nu$, prueba que la serie

$$f_{n_1} + \left(f_{n_2} - f_{n_1}\right) + \ldots + \left(f_{n_{p+1}} - f_{n_p}\right) + \ldots \qquad [1]$$

converge uniformemente en el conjunto $\Omega - Q^{(\nu}$, o lo que es lo mismo, que f_{n_p} converge uniformemente en $\Omega - Q^{(\nu}$

Resulta así que el conjunto Q de los puntos en que esta serie puede no converger, pertenece ciertamente a todos los conjuntos $Q^{(\nu}$, luego

$$Q^{(\nu} \supset Q^{(\nu+1} \supset \ldots \supset Q$$

y

$$\text{med}\,(Q) \leq \lim_{\nu \to \infty} \text{med}\,(Q^{(\nu)}) \leq \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{2^{\nu-1}} = 0$$

luego la serie [1] converge uniformemente en casi todos los puntos de Ω hacia una función f.

2.° Vamos a comprobar ahora que f pertenece al espacio L^2 y que la sucesión f_n converge fuertemente hacia f, o sea que $\| f_n - f \| \to 0$.

En efecto:

$$\int\limits_{\Omega - Q^{(\nu}} \left| f_n - f_{n_p} \right|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} \left| f_n - f_{n_p} \right|^2 dx < \varepsilon \quad \text{para} \quad \left.\begin{matrix} n \\ n_p \end{matrix}\right\} > N(\varepsilon)$$

y aplicando el teorema de Lebesgue podemos pasar al límite bajo el signo integral y obtenemos:

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\Omega - Q^{(\nu}} |f_n - f_{n_p}|^2 \, dx = \int_{\Omega - Q^{(\nu}} |f_n - f|^2 \, dx < \varepsilon \;.$$

ya que f_{n_p} converge uniformemente hacia f en $\Omega - Q^{(\nu}$.

Hallando ahora el límite cuando $\nu \to \infty$ y teniendo presente que

$$\Omega - Q^{(\nu} \subset \Omega - Q^{(\nu+1} \subset \ldots ; \lim_{\nu\to\infty} \Omega - Q^{(\nu} = \Omega - Q$$

se tiene:

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega - Q^{(\nu}} |f_n - f|^2 \, dx = \int_{\Omega - Q} |f_n - f|^2 \, dx < \varepsilon$$

luego

$$\int_{\Omega} |f_n - f|^2 \, dx < \varepsilon$$

para todo $n > N(\varepsilon)$, lo que quiere decir que la diferencia $f - f_n$ pertenece a L^2 y como f_n también pertenece, resulta demostrado que f es una función del espacio L^2 tal que

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$$

Puesto que la función f ha sido construída por intermedio de la sucesión f_{n_p} puede pensarse en la posibilidad de obtener otra sucesión distinta y, por consiguiente, otra función $g \neq f$. Vamos a ver que estas dos funciones han de ser la misma, salvo en un conjunto de medida nula.

Por hipótesis se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \| g - f_n \| = 0$$

de donde deducimos

$$\| g - f \| \leq \| f - f_n \| + \| g - f_n \| < 2\varepsilon$$

pero como ni f ni g dependen de n, resulta:

$$\| f - g \| = 0 \qquad \text{o sea} \qquad f \equiv g$$

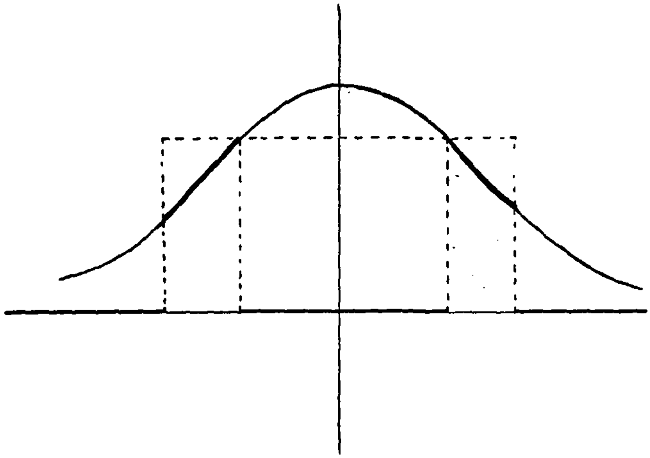
en casi todos los puntos de $\Omega \equiv (a, b)$.

El espacio E_f *es separable* (*).—Vamos a probar esta propiedad del espacio E_f; es decir, que existe una sucesión $f_n(x)$ de funciones, de cuadrado sumable en Ω, densa en todo el espacio E_f, o sea que dada una función $f(x)$ de L^2 y un número $\varepsilon > 0$ se puede determinar una función f_ν de esta sucesión tal que $\|f - f_\nu\| < \varepsilon$.

1.º Consideremos una sucesión Ω_N de intervalos de amplitud 2 N y centro O, tal que todo punto de Ω sea interior a un intervalo Ω_N para N suficientemente grande.

Dada una funcion $f(x) \subset L^2$ definiremos una sucesión de funciones $f_N(x)$ como sigue

$$f_N(x) = 0 \quad \text{si } x \text{ no pertenece a } \Omega_N$$
$$f_N(x) = f(x) \quad \text{si } x \text{ pertenece a } \Omega_N \text{ siendo } |f| < N$$
$$f_N(x) = 0 \quad \text{si } x \text{ pertenece a } \Omega_N \text{ siendo } |f| \geq N$$



Desde luego estas funciones f_N son acotadas en Ω y nulas salvo en un conjunto de medida finita. Además, la sucesión $\{f_N(x)\}$ es densa en L^2, pues dada una función $f(x) \subset L^2$ la diferencia $|f_N(x) - f(x)|$ pertenece a L^2 ya que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)|$$

cualquiera que sea N y, por consiguiente, existe

$$\int_\Omega |f(x) - f_N(x)|^2 dx$$

(*) La demostración se ha desarrollado de modo que sea inmediatamente generalizable al caso en que Ω sea el espacio de k dimensiones en vez de un intervalo (a, b).

y se verifica:

$$\int_{\Omega} |f - f_N|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} |f|^2 \, dx$$

y, pasando al límite bajo el signo de integral, por el teorema de Lebesgue, se tiene:

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\Omega} |f(x) - f_N(x)|^2 \, dx = \int_{\Omega} \lim |f(x) - f_N(x)|^2 \, dx = 0$$

pues

$$\lim_{N \to \infty} |f(x) - f_N(x)| = 0$$

cualquiera que sea x.

Resulta así que la clase G de las funciones $g(x)$ acotadas en Ω y que no difieren de cero más que en un conjunto de medida finita contiene a las funciones f_N y, por lo tanto, es denso en E_f.

2.° Consideremos en la clase G antes definida las funciones $h(x)$, cada una de las cuales no toma más que valores racionales $\rho + i\sigma$, en número finito, siendo tomado cada uno de estos valores, salvo el cero, sobre un conjunto de medida finita (funciones escalonadas).

Estas funciones forman una clase H densa en todo G y, por lo tanto, en L^2. Los puntos h correspondientes a estas funciones serán densos en todo E_f. Sea una función $g = g_1 + i g_2$ perteneciente a G, tal que $|g| \leq C$. Intercalemos entre $-C$ y $+C$, t números racionales ρ_i.

$$-C < \rho_1 < \ldots < \rho_{i-1} < \rho_i < \ldots < \rho_t < C$$

tales que la distancia entre dos consecutivos sea menor que ε y además

$$\rho_1 < -C + \varepsilon \quad \text{y} \quad \rho_t > C - \varepsilon$$

La función $h(x) = h_1(x) + i h_2(x)$ definida de la manera siguiente:

$$\begin{array}{lcl}
h_1(x) = 0 & \text{si} & g_1(x) = 0 \\
h_1(x) = \rho_i & \text{»} & \dfrac{\rho_{i-1} + \rho_i}{2} < |g_1(x)| \leq \dfrac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} \\
h_2(x) = 0 & \text{»} & g_2(x) = 0 \\
h_2(x) = \rho_i & \text{»} & \dfrac{\rho_{i-1} + \rho_i}{2} < |g_2(x)| \leq \dfrac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2}
\end{array}$$

es medible, pues lo es el conjunto

$$E(h_1 = \rho_i) = E\left(\frac{\rho_{i-1} + \rho_i}{2} < g_1(x) \mid \leq \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2}\right)$$

ya que es medible $g_1(x)$ y lo mismo el conjunto análogo para la función $h_2(x)$. Sea M la medida del conjunto $E(g \neq 0)$. Se tiene

$$\int_{\Omega} |g-h|^2\,dx = \int_{\Omega} |g_2-h_2|^2\,dx + \int_{\Omega} |g_2-h_2|^2\,dx =$$

$$= \int_{E} |g_1-h_1|^2\,dx + \int_{E} |g_2-h_2|^2\,dx \leq \varepsilon^2 M + \varepsilon^2 M = 2\,\varepsilon^2 M$$

puesto que para $g = 0$, ha de ser $g_1 = g_2 = 0$ y, por tanto, $h_1 = h_2 = 0$ y en los puntos del conjunto E es

$$|g_1-h_1| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |g_2-h_2| < \varepsilon$$

por definición de los números ρ_i; luego se verifica

$$\int_{\Omega} |g-h|^2\,dx < 2\,\varepsilon^2 M$$

es decir, que se puede hacer tan pequeña como se quiera

$$\|g-h\|^2$$

y, por lo tanto, el conjunto de los puntos h es denso sobre el de los g y en consecuencia sobre E_f.

3.° Toda función h permanece constante sobre un cierto número de conjuntos π de medida finita. Vamos a aproximar tales conjuntos π por medio de conjuntos de una sucesión numerable $\pi^{(1}, \pi^{(2} \ldots$ tal que para todo conjunto π de medida finita y para ε dado existe un conjunto $\pi^{(n}$ tal que $\pi^{(n}$ difiera de π en menos que ε.

Designemos por $(\pi, \pi^{(n)})$ el conjunto de los puntos que pertenecen a uno solo de los dos conjuntos $\pi, \pi^{(n}$, se verifica

$$\text{med}\,(\pi, \pi^{(n)}) < \varepsilon$$

Vamos a ver que construída la sucesión $\pi^{(n}$ es fácil la determinación de una clase numerable de funciones densa en H y, por tanto, en G y en E_f, con lo cual el problema estará resuelto.

Sea f_{π_s} la función característica de $\pi_s = (h = \rho_s + i\,\sigma_s)$. Se tiene evidentemente

$$h = \sum_{s=1}^{t} (\rho_s + i\,\sigma_s)\,f_{\pi_s}$$

pero π_s es la intersección de los conjuntos

$$E(h_1 = \rho_s) \quad y \quad E(h_2 = \sigma_s)$$

que son medibles, luego también es medible.

Supongamos construída una sucesión de conjuntos medibles $\pi^{(1}, \pi^{(2}, \ldots \pi^{(n} \ldots$ tal que dado un conjunto cualquiera medible π_s y un $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un conjunto $\pi^{(n_s}$ tal la medida del conjunto $(\pi_s, \pi^{(n_s})$ sea menor que ε, y consideremos las funciones k definidas como sigue:

$$k = \sum_{s=1}^{t} (\rho_s + i\,\sigma_s) f_{\pi^{(n_s}}$$

Vamos a probar que el conjunto de estas funciones k es denso sobre la de las h y, por lo tanto, en E_f para lo cual formemos la diferencia

$$\| h - k \|^2 = \int_{\Omega} \left| \sum_{s=1}^{t} (\rho_s + i\,\sigma_s) (f_{\pi^{(ns}} - f_{\pi_s}) \right|^2 d\,x \leq \sum_{s=1}^{t} \int_{\Omega} | \rho_s + i\,\sigma_s |^2 \, | f_{\pi^{(ns}} - f_{\pi^s} |^2 \, d\,x$$

se tiene:

$$\| h - k \| \leq \sum_{s=1}^{t} \left\{ \int_{\Omega} | (\rho_s + i\,\sigma_s) (f_{\pi^s} - f_{\pi^{(n_s)}}) |^2 \, d\,x \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{s=1}^{t} \sqrt{\rho_s^2 + \sigma_s^2} \left\{ \int_{\Omega} | f_{\pi^s} - f_{\pi^{(n_s}} |^2 \, d\,x \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{s=1}^{t} \left(\rho_s^2 - \sigma_s^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] \left\{ \operatorname{med} (\pi_s, \pi^{(n_s)}) \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon} \sum_{s=1}^{t} \left(\rho_s^2 + \sigma_s^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

El conjunto de las funciones k es numerable, puesto que por definición

$$k = \sum_{s=1}^{t} (\rho_s + i\,\sigma_s) f_{\pi^{(ns}}$$

y t puede tomar los valores $1, 2, \ldots, \infty$; ρ_s y σ_s son números racionales y los n_s toman los valores $1, 2, \ldots, \infty$.

Hemos construído, pues, una sucesión de funciones k densa en E_f a reserva de probar la existencia de la sucesión $\pi^{(n}$.

4.° Veamos que, en efecto, es posible construir $\pi^{(n}$.

El conjunto π de medida M se puede considerar contenido en un conjunto abierto π' de medida $< M + \varepsilon$. Recubramos el espacio Ω con un retículo obtenido partiendo de los cubos cuyas caras tengan coordenadas enteras y subdividiendo indefinidamente por planos perpendiculares en los puntos medios de las aristas. Podemos formar un conjunto de un número finito de cubos, tales que esta suma esté contenida en π' y cuya medida sea mayor que (med $\pi' - \varepsilon$) resulta entonces:

$$\text{med}\,(\pi, \pi'') < 2\,\varepsilon$$

El conjunto de los π'' así definidos es, además, numerable.

En efecto, el conjunto π'' queda definido por el número n de sus cubos, las longitudes de sus aristas y las coordenadas de los centros de estos cubos, es decir, mediante un número finito de números racionales, luego el conjunto de los conjuntos π'' es numerable.

13. 3. El teorema de Riesz-Fischer

En el párrafo anterior hemos demostrado que el espacio E_f es completo (*).

Dicha propiedad de completitud, que fué demostrada casi simultáneamente por Riesz y Fischer, tiene como consecuencia un importante teorema llamado de Riesz-Fischer:

Si la serie

$$\sum_1^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

existe una función $f \subset E_f$, *cuyos coeficientes de Fourier son los* c_n.

Sea $\{\varphi_i\}$ un sistema ortonormal completo. Si designamos por:

$$f_n = \sum_1^n c_v \varphi_v$$

tenemos:

$$\int_a^b |f_m - f_n|^2\, dx = \sum_{m+1}^n |c_k|^2 \to 0$$

si m y n tienden simultáneamente a ∞. Por el teorema de completitud $f \subset E_f$.

Resulta, pues, como consecuencia del teorema de Riesz-Fischer, que *existe*

(*) Esta propiedad pone de manifiesto la ventaja de manejar la integral de Lebesgue sobre la de Cauchy-Riemann, pues el paso al límite en sucesiones de funciones de L^2 conduce siempre a una función de la misma clase, lo que no ocurre con las funciones contínuas.

Creemos que no está lejos el día que un libro de teoría de funciones que exponga la integral de Cauchy-Riemann parezca tan pasado como hoy nos parecería un libro de Geometría proyectiva que no introdujera elementos impropios.

una correspondencia biunívoca entre las funciones de L^2 *y las sucesiones* $\{c_n\}$ *tales que*

$$\sum_1^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

Si es

$$f = \sum_1^{\infty} c_i \varphi_i$$

convenimos en que a f corresponde la sucesión de coordenadas $(c_1, c_2, \dots c_n, \dots)$ y recíprocamente. Que la correspondencia es biunívoca resulta inmediatamente de teoremas demostrados anteriormente. Pues si dos puntos f, f^* tienen las mismas coordenadas, es decir,

$$\int_a^b f \varphi_i \, d x = \int_a^b f^* \varphi_i \, d x$$

se deduce:

$$\int_a^b (f - f^*) \varphi_i \, d x = 0,$$

y como $\{\varphi_i\}$ es completo, la diferencia $f - f^*$ es cero en casi todo (a, b).

Este espacio de puntos $f(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ tales que

$$\sum_1^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

suele llamarse espacio $E_{(\omega)}$. Se puede considerar como una generalización natural del espacio euclídeo tridimensional, ya que la distancia de dos puntos

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\right) \quad \text{y} \quad f^*\left(\overset{*}{c}_1, \overset{*}{c}_2, \dots, \overset{*}{c}_n, \dots\right) \\ \text{es } d(f, f^*) = \left[\int_a^b |f - f'|^2 \, d x \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(c_1 - \overset{*}{c}_1\right)^2 + \left(c_2 - \overset{*}{c}_2\right)^2 + \dots + \left(c_n - \overset{*}{c}_n\right)^2 + \dots \right]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Su estudio geométrico es equivalente al del espacio H como consecuencia del teorema anterior. Ambos estudios pueden hacerse simultáneamente mediante el método axiomático de von Neumann (*) aquí iniciado.

(*) He aquí la bibliografía fundamental constituída por libros a los que estas *Conferencias* pretenden servir de Introducción:

Von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.*

G. Julia, *Introduction Mathématique aux théories Quantiques.*

Stone, *Linear transformations in the Hilbert space.*

13. 4. Geometría del espacio H

Sin pretender hacer un desarrollo completo de la Geometría del espacio de Hilbert, vamos a deducir algunas propiedades a partir de los postulados de von Neumann.

De la definición producto escalar se deduce

$$(f, a g) = a (f, g) \qquad [1]$$

En efecto:

$$(f, a g) = \overline{(a g, f)} = \overline{a (g, f)} = \bar{a} \overline{(g, f)} = \bar{a} (f, g)$$

$$(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2) \qquad [2]$$

pues

$$(f, g_1 + g_2) = \overline{(g_1 + g_2, f)} = \overline{(g_1, f) + (g_2, f)} = \overline{(g_1, f)} + \overline{(g_2, f)} = (f, g_1) + (f, g_2)$$

$$\| a \cdot f \| = | a | \cdot \| f \| \qquad [3$$

pues en virtud de [1] se tiene

$$\| a f \| = \left(a f, a f\right)^{\frac{1}{2}} = a \bar{a} \left(f, f\right)^{\frac{1}{2}} = | a | \cdot \| f \|$$

Acotación de Schwarz [4]

$$| (f, g) | \leq \| f \| \cdot \| g \|$$

siendo válido el signo $=$ sí y solamente si f y g son linealmente independientes. En efecto:

$$0 \leq \| f + \lambda g \|^2 = (f + \lambda g, f + \lambda g) = (f, f) + \bar{\lambda} (f, g) + \lambda (g, f) + \lambda \bar{\lambda} (g, g) =$$

$$= \| f \|^2 + \bar{\lambda} (f, g) + \lambda (g, f) + \lambda \bar{\lambda} \| g \|^2 = \| g \|^2 \left[\lambda + \frac{(f, g)}{\| g \|^2} \right] \left[\bar{\lambda} + \frac{(g, f)}{\| g \|^2} \right] + \| f \|^2 -$$

$$- \frac{(g, f) \cdot (f, g)}{\| g \|^2} = \| g \|^2 \left| \lambda + \frac{(g, f)}{\| g \|^2} \right|^2 + \frac{\| f \|^2 \cdot \| g \|^2 - (g, f) (f, g)}{\| g \|^2} =$$

$$= \| g \|^2 \left| \lambda + \frac{(g, f)}{\| g \|^2} \right|^2 + \frac{\| f \|^2 \| g \|^2 - | (f, g) |^2}{\| g \|^2} \qquad [\alpha]$$

pero para que esta última expresión sea ≥ 0 es necesario que se verifique

$$\|f\|^2 \cdot \|g\|^2 - |(f,g)|^2 \geq 0, \quad \text{o sea} \quad |(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

pues si fuese

$$\|f\|^2 \cdot \|g\|^2 - |(f,g)|^2 \leq 0$$

para

$$\lambda = -\frac{(g,f)}{\|g\|^2}$$

tendríamos $\|f+\lambda g\|^2 \leq 0$.

Si es $\|f\|^2 \cdot \|g\|^2 - |(f,g)|^2 = 0$ [1] para el anterior valor de λ, resulta $\|f+\lambda g\|^2 = 0$, es decir, para que se verifique [1] es necesario que pueda ser $\|f+\lambda g\|^2 = 0$ para un cierto valor de λ, y recíprocamente, pues los dos sumandos del miembro final de [α] son positivos; es, pues, condición necesaria y suficiente para que se verifique [1] que las funciones f y g sean linealmente independientes.

Desigualdad triangular [5]

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

En efecto, se tiene:

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = \|f\|^2 + \|g\|^2 + (f,g) + (g,f) =$$
$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 + (f,g) + \overline{(f,g)} = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\mathrm{R}\,(f,g) \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 +$$
$$+ 2\,|(f,g)| \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\|f\| \cdot \|g\| = \{\|f\| + \|g\|\}^2$$

luego

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Si las funciones f y g son ortogonales $(f,g) = 0$ se verifica

$$|(f,g)| = 0$$

luego

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

propiedad que se conoce con el nombre de *teorema de Pitágoras.*

Teorema.—*La función distancia* $\| f - g \|$ *verifica las siguientes propiedades:*

1) $\| f + g \| \geq 0$
2) $\| f - g \| = 0$ si $f = g$ y solamente si $f = g$
3) $\| f - g \| = \| g - f \|$
4) $\| f - h \| \leq \| f - g \| + \| g - h \|$

pues

$$\| f - h \| = \| f - g + g - h \| \leq \| f - g \| + \| g - h \|$$

en virtud de la propiedad triangular.

Estas propiedades se resumen diciendo que H es un espacio métrico.