

Preface

This issue contains several articles about the theory of Fréchet spaces and its applications. This is an active area of research in functional analysis, operator theory and their applications to complex analysis and linear partial differential operators. One of the aims of the new Series A Mathematics of the Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid is to publish special issues on different mathematical topics in which Spanish research groups and international researchers connected with them have made recent relevant contributions. I had the honour to be invited by the Academy to edit this special issue.

This issue consists of 14 articles by 25 authors from Australia, Belgium, Finland, Germany, Poland, Spain, and the United States of America. The articles mainly deal with those aspects of the theory of locally convex spaces and Fréchet spaces which are relevant in the applications of functional analysis and operator theory to problems in analysis. Fréchet spaces are complete metrizable locally convex spaces. Many complete spaces of holomorphic, differentiable, continuous or measurable functions are defined by at most countably many conditions, whence they carry a natural Fréchet topology. Every Banach space is a Fréchet space. The theory of Banach spaces has seen a spectacular development in the recent years. However, the treatment of certain analytic problems rather requires Fréchet spaces, their duals and their inductive or projective limits. These problems include for example the surjectivity of linear partial differential operators or convolution operators, the existence of a solution operator for the given operator on spaces of (ultra)differentiable functions, analytic functions or (ultra)distributions, and the (continuous and linear) extension of analytic or (ultra)differentiable functions. Some of the articles have a more abstract character, while others present results closely related to analysis.

There are three articles which have a more expository character. Vogt and his co-authors introduced and developed since the early 80's some of the most important tools in the modern theory of Fréchet spaces: topological invariants like (DN) and (Ω) , the splitting theorem of exact sequences of Vogt and Wagner, and the structure of subspaces and quotients of nuclear stable power series spaces. In his survey contained in this issue, which also presents new results, Vogt characterizes the subspaces, quotients and complemented subspaces of stable power series spaces of infinite type without any nuclearity assumption. Grosse-Erdmann reports on recent progress in the theory of hypercyclic and chaotic operators on Fréchet spaces, which is a very active area of research. Bierstedt and I survey some recent developments in the theory of Fréchet and (DF) spaces, among other things, the density condition, the theory of general Köthe echelon and co-echelon spaces, and the developments in tensor products of Fréchet spaces since Taskinen's negative solution of Grothendieck's "problème des topologies".

Meise, Taylor and Vogt solved a problem of L. Schwartz in 1990 by characterizing the linear partial differential operators with constant coefficients which admit a solution operator on the space of distributions. One of the characterizations was in terms of a Phragmén-Lindelöf condition on the zero-variety of the polynomial. The contribution of Braun, Meise and Taylor here continues their research about perturbation results for the Phragmén-Lindelöf conditions. In his article, Langenbruch presents a general approximation theorem of Whitney type and uses it to obtain real analytic modifications of differentiable functions. He also gives a new surjectivity criterion for continuous linear operators between Fréchet spaces which is applied to the boundary value problem for holomorphic functions and to convolution operators. The representation of ultradistributions of Beurling type as boundary values of holomorphic functions is the topic of the article by Fernández, Galbis and Gómez-Collado. The joint article of Frerick and Wengenroth applies recent developments in the theory of countable inductive limits of Fréchet spaces to obtain a simple and abstract proof of the characterization, due to Hörmander, of the surjective convolution operators on the space of distributions. In their paper, Schmets and Valdivia obtain a nuclear extension map of ultradifferentiable jets of Roumieu type from a closed set in R^n to R^n .

The articles of Domański and of Defant, Mastłyo and Michels deal with topics of Banach space theory

which are related to Fréchet spaces. The splitting of short exact played an important role in the structure theory of Fréchet spaces, in particular, in the work of Vogt and his co-authors. Domański studies the ideals of extendable and lifting operators and gives a new approach to the splitting of short exact sequences of Banach spaces. On the other hand, Defant, Mastyo and Michels present a partial extension of an important interpolation formula for injective tensor products of Banach spaces, due to Kouba, for the Gustavsson-Petree method of interpolation in the setting of Banach function spaces.

Recently Taskinen introduced a weighted space of analytic functions on the open unit disc of the complex plane which is an (LB)-space containing the space H^∞ and which behaves much better than H^∞ with respect to the Bergman projection. In his contribution to this issue, he constructs an atomic decomposition of this space with a Köthe co-echelon space as the coefficient space, and he also shows that his space is not nuclear. Okada and Ricker study the AL-property of the Fréchet lattice defined by the integrable functions with respect to a vector measure with values in a Fréchet space. Dierolf and Heintz solve the three-space problem for locally m -convex algebras in the positive if the space has a jointly continuous multiplication. The problem had a negative answer without this assumption, and had remained open in this case. Finally Frerick and Peris give characterizations of many properties of Fréchet spaces in terms of generalizations of the small ball property of Behrends and Kadets.

It is a pleasure to thank all the authors of the papers for their kindness to accept our invitation to contribute, and for the quality of the articles. Special thanks are due to the Real Academia de Ciencias for its invitation to edit this issue of the Revista, and to the main editor of RACSAM, and friend, Ildefonso Díaz, for his great help during its preparation.

José Bonet

P.S. Professor Klaus Floret (Oldenburg, Germany) had been one of the leading contributors to the theory of Fréchet spaces for many years, as well as a good friend of many researchers in this theory. Sadly enough, he departed this world during the summer of 2002, after suffering from a series of intense health problems. In view of this fact, it is not surprising that many of the articles in the Special Issue of RACSAM are dedicated to the memory of Klaus Floret.

PREFACIO

Este número contiene algunos artículos acerca de la teoría de espacios de Fréchet y sus aplicaciones. Esta es un área de investigación muy activa en análisis funcional, teoría de operadores y sus aplicaciones al análisis complejo y a los operadores en derivadas parciales lineales. Uno de los objetivos de la nueva Serie A Matemáticas de la Revista de la Academia de Ciencias de Madrid es la publicación de números especiales sobre distintos temas matemáticos en los que grupos de investigación españoles y los investigadores internacionales conectados con ellos hayan hecho recientemente contribuciones relevantes. Tuve el honor de ser invitado por la Academia a editar este número especial.

Este número contiene 14 artículos de 25 autores de Alemania, Australia, Bélgica, España, los Estados Unidos de América, Finlandia y Polonia. Los artículos tratan preferentemente aquellos aspectos de la teoría de los espacios localmente convexos y de los espacios de Fréchet que son relevantes en las aplicaciones del análisis funcional y la teoría de operadores en problemas analíticos. Los espacios de Fréchet son espacios localmente convexos metrizable y completos. Muchos espacios completos de funciones holomorfas, diferenciables, continuas o medibles están definidos mediante una cantidad a lo sumo numerable de condiciones, por tanto admiten una topología natural de espacios de Fréchet. Todo espacio de Banach es un

espacio de Fréchet. La teoría de los espacios de Banach ha tenido un desarrollo espectacular en los años recientes. Sin embargo, el tratamiento de ciertos problemas analíticos requiere los espacios de Fréchet, sus duales y sus límites inductivos o proyectivos. Estos problemas incluyen, por ejemplo, la sobreyectividad de operadores lineales en derivadas parciales o de operadores de convolución, la existencia de operador de solución para el operador dado en espacios de funciones (ultra)diferenciables, funciones analíticas o (ultra)distribuciones, y la extensión (lineal y continua) de funciones analíticas o (ultra)diferenciables. Algunos artículos tienen un carácter más abstracto, mientras que otros presentan resultados relacionados con el análisis.

Tres artículos tienen un carácter más expositivo. Vogt y sus co-autores introdujeron y desarrollaron desde el principio de los años 80 algunas de las herramientas más importantes en la teoría moderna de espacios de Fréchet: invariantes topológicos, como (DN) y (Ω) , el teorema de escisión de sucesiones exactas de Vogt y Wagner y la estructura de los subespacios y cocientes de espacios de series de potencias nucleares y estables. En su artículo panorámico en este número, que también presenta resultados nuevos, Vogt caracteriza los subespacios, cocientes y subespacios complementados de espacios de series de potencias estables de tipo infinito sin ninguna condición de nuclearidad. Grosse-Erdmann expone resultados recientes acerca de la teoría de operadores hipercíclicos y caóticos en espacios de Fréchet, que es un área de investigación muy activa. Bierstedt y yo presentamos desarrollos recientes en la teoría de espacios de Fréchet, (DF), entre otras cosas, la condición de densidad, la teoría general de espacios escalonados y co-escalonados de Köthe y los avances en productos tensoriales de espacios de Fréchet desde la solución negativa por Taskinen del problema de las topologías de Grothendieck.

Meise, Taylor y Vogt resolvieron un problema de L. Schwartz caracterizando los operadores lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes que admiten un operador de solución en el espacio de distribuciones. Una de las caracterizaciones era en términos de una condición de tipo Phragmén-Lindelöf en la variedad cero del polinomio. La contribución de Braun, Meise y Taylor aquí continúa su investigación de resultados de perturbación para las condiciones de Phragmén-Lindelöf. En su artículo, Langenbruch presenta un teorema general de tipo Whitney y lo usa para obtener modificaciones real analíticas de funciones diferenciables. También da un nuevo criterio de sobreyectividad de operadores lineales y continuos entre espacios de Fréchet, que se aplica a problemas de valores frontera de funciones holomorfas y a operadores de convolución. La representación de ultradistribuciones de tipo Beurling como valores frontera de funciones holomorfas es el tema tratado por Fernández, Galbis y Gómez-Collado. El artículo conjunto de Frerick y Wengenroth aplica desarrollos recientes en la teoría de límites inductivos numerables de espacios de Fréchet para obtener una demostración simple y abstracta de la caracterización, debida a Hörmander, de los operadores de convolución sobreyectivos en el espacio de las distribuciones. En su contribución, Schmets y Valdivia obtienen una aplicación nuclear de extensión de “jets” ultradiferenciables de tipo Roumieu de un subconjunto cerrado en R^n a todo R^n .

Los artículos de Domański y de Defant, Mastyo y Michels tratan temas de la teoría de espacios de Banach que están relacionados con los espacios de Fréchet. La escisión de sucesiones exactas cortas juega un papel central en la teoría estructural de espacios de Fréchet, en particular, en el trabajo de Vogt y sus co-autores. Domański estudia los ideales de operadores que admiten extensión o levantamiento y da un nuevo enfoque a la escisión de sucesiones exactas cortas de espacios de Banach. Por otra parte, Defant, Mastyo y Michels presentan una extensión parcial de una importante fórmula de interpolación para productos tensoriales inyectivos de espacios de Banach, debida a Kouba, para el método de interpolación de Gustavsson-Petree en el contexto de los espacios de funciones de Banach.

Recientemente, Taskinen ha introducido un espacio ponderado de funciones analíticas en el disco unidad abierto del plano complejo que es un espacio (LB), que contiene el espacio H^∞ , y que se comporta mucho mejor que H^∞ respecto de la proyección de Bergman. En su contribución a este número, construye una descomposición atómica de este espacio, con un espacio co-escalonado de Köthe como espacio de coefi-

cientes, y muestra que su espacio no es nuclear. Okada y Ricker investigan la propiedad AL del retículo de Fréchet definido por las funciones integrables respecto de una medida vectorial con valores en un espacio de Fréchet. Dierolf y Heintz resuelven positivamente el problema de los tres espacios para álgebras localmente m -convexas si el espacio tiene una multiplicación conjuntamente continua. El problema tiene una respuesta negativa sin este supuesto, y había permanecido abierto en este caso. Finalmente, Frerick y Peris dan varias caracterizaciones de ciertas propiedades de espacios de Fréchet en términos de una generalización de la propiedad de la bola pequeña de Behrends y Kadets.

Es un placer para mí agradecer a todos los autores de los artículos su amabilidad al aceptar nuestra invitación de contribuir y la calidad de los manuscritos. Quiero expresar un agradecimiento especial a la Real Academia de Ciencias por su invitación a editar este número y especialmente al editor principal de RACSAM y amigo, Ildefonso Díaz, por su gran ayuda durante la preparación.

José Bonet

P.S. El profesor Klaus Floret (Oldenburg, Alemania) fue uno de los líderes de la teoría de espacios de Fréchet durante muchos años y también un amigo personal de muchos investigadores en esta área. Desgraciadamente falleció durante el verano de 2002, después de sufrir una serie de graves problemas de salud. Por ello, no es sorprendente que muchos artículos del presente número estén dedicados a la memoria de Klaus Floret.