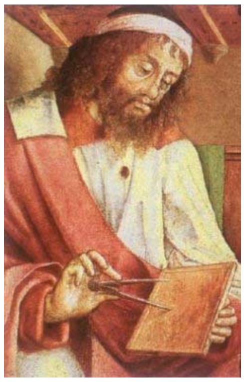
Vida de los trece libros de Euclides.

Excma. Sra. Presidenta del Instituto de España, Excmos e Ilmos Srs., Sras. y Srs.:



Euclides (430-360 a.C.)

Deseo agradecer, sinceramente, al Instituto de España esta invitación en la que vamos a exponer unas consideraciones sobre el origen, contenido e influencia de la obra "Los Elementos", escrita en trece tomos por Euclides, bibliotecario de Alejandría, casi 300 años antes de Cristo. Se suele admitir que es una de las obras que más ha influido en el pensamiento científico. Un dato objetivo que avala esta afirmación es que comparte con La Biblia los primeros puestos en número de ediciones.

Primera página de *Los Elementos.* Traducción de Campanus (1482)

El incunable de "Los Elementos" de la biblioteca del monasterio de San Millán de la Cogolla es un ejemplar de la edición Princeps de 25 de mayo de 1482, impresa en Venecia por Erhardus Ratdolt y que contiene la versión latina de Campano de Novara, capellán del Papa Urbano IV. Según Boyer, "Campano utilizó diversas fuentes árabes, así como la primitiva versión latina de Adelhardo Bathoniensi". Ratdolt dice en el prefacio que es la primera vez que se han impreso figuras geométricas. Esta edición contiene dos libros más escritos por Hipsicles y por Isidoro de Mileto.

En España se encuentran otros ejemplares de esta edición en la Biblioteca Nacional, en la Casa Ducal de Alba, en la Biblioteca del Palacio Real, en la Biblioteca Capitular de Sevilla y en la Biblioteca de la Universidad de Valladolid.

Antecedentes de Los Elementos de Euclides.

Parece que nunca tendremos información adecuada del período antiguo en que el hombre satisfacía sus más urgentes necesidades y, lentamente, emergía de la oscuridad y comenzaba a aparecer su instintiva ansia de poder y conocimiento.

Nunca sabremos quien fue el primero que pensó en encender fuego, en fabricar instrumentos de piedra, en domesticar animales o en utilizar la rueda. Tampoco lo sabemos todo sobre el desarrollo del lenguaje y de la escritura. Sin el lenguaje articulado hubiese sido muy difícil el desarrollo del conocimiento, cuya transmisión hubiese sido precaria sin la escritura.

Es muy probable que estos descubrimientos implicasen la colaboración secular de miles de hombres y que los grandes progresos fuesen asegurados por el genio excepcional de algunos de ellos, remachando los resultados obtenidos mediante la acumulación inconsciente de muchas pequeñas aportaciones, asegurando lo conquistado y preparando nuevos movimientos lentos de progreso. Las transiciones entre niveles de conocimiento fueron casi tan lentas como las evoluciones biológicas. Probablemente quedaron totalmente inadvertidas para la mayoría de esos hombres.

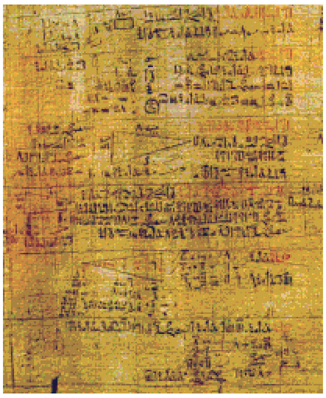
De sus vidas y obras nos habla la arqueología, uno de cuyos hallazgos más espectaculares relacionado con las matemáticas es el hueso encontrado en las orillas del lago Edward, en la República del Congo, datado entre el 9000 y el 6500 a. J.C. Posee unas marcas en su asta, que, según las interpretaciones más fiables, corresponden a un sistema de numeración decimal, a los números primos entre 10 y 20, a una tabla de duplicación y a un calendario de fases de la Luna.

Los descubrimientos arqueológicos relacionados con las matemáticas se cuentan a millares: pequeñas piedras de colores anudadas a cuerdas, palitos de diferentes longitudes, trazos regulares en las paredes de las cuevas, primitivos ábacos. Nuestros antepasados también utilizaron el cuerpo como instrumento de numeración, aún recordado en medidas como la pulgada, el pie o la brazada.

Parece que en el año 4141 antes de Cristo los egipcios establecieron el calendario de 365 días. En el cuarto milenio antes de nuestra era se produjo un gran desarrollo cultural que trajo el uso de la escritura, la rueda, los metales y un sistema decimal de numeración. A finales de este maravilloso milenio comenzó el gobierno de la primera dinastía y hay una inscripción de esa época relativa a 120.000 cautivos, 400.000 bueyes y 1.422.000 cabras en las que cada unidad decimal está representada por un símbolo especial.

Al comienzo del tercer milenio antes de Cristo la lenta evolución que preparó el amanecer de la ciencia al conocimiento matemático, astronómico y médico se encontraba completada en Egipto y Mesopotamia. Algo menor era el desarrollo en India y China.

Los egipcios desarrollaron una matemática aplicada a la agrimensura, arquitectura y astronomía, con suficientes conocimientos de geometría y aritmética pura. Sus conocimientos estuvieron bastante sistematizados, según se puede comprobar con el papiro Golenishchev, que se encuentra en el Museo de Arte de Moscú, data del siglo XIX antes de Cristo y con el papiro Rhind, que se conserva en Londres en el Museo Británico y proviene del siglo XVII antes de Cristo. Ambos son copias de otros documentos que les superan en unos dos siglos de antigüedad. Gracias al papiro Rhind, cuya copia la debemos al escriba Ahmes, sabemos que los matemáticos egipcios del siglo XVII antes de Cristo estaban ya en condiciones de resolver problemas complicados con ecuaciones determinadas e indeterminadas de grados primero y segundo, que tenían gran habilidad aritmética y que utilizaban el método de la falsa posición y la regla de tres. Encontraron fórmulas aproximadas del área de un círculo y de una superficie esférica y del volumen de un cilindro y de un tronco de pirámide de base cuadrada.


Papiro Rhind
Copia de Ahmes (1650 a. J.C.)


Primera Página de *Los Elementos*. Primera traducción directa del griego al latín (1505)

El papiro Rhind fue escrito trece siglos antes que Los Elementos de Euclides, y ambas obras no son comparables. Sobre el papiro Rhind se necesitaron más de un milenio de esfuerzos adicionales para producir Los Elementos. No obstante, el papiro Rhind no debe considerarse como un comienzo, sino más bien como una culminación de una evolución muy prolongada de la que las pirámides son testimonios elocuentes de posibilidades técnicas y de cálculo. Las técnicas de la matemática egipcia fueron aprendidas por los griegos de los siglos VI al IV a. J.C. en el entorno de la Escuela de Alejandría.

Respecto a la medicina egipcia tenemos datos del médico ilustrado Imhotep a comienzos del siglo XXX antes de Cristo. Cuando se llama a Hipócrates de Chios el padre de la medicina no se advierte que Hipócrates está situado en la mitad del período entre Imhotep y nosotros. Trece siglos después de Imhotep, en la época del papiro Rhind, encontramos un tratado médico en el papiro Edwin Smith, que no es una colección de recetas y encantamientos, sino un tratado cuyo orden sistemático se ha mantenido hasta la Edad Media. Contiene cuarenta y ocho casos, cada uno de los cuales sigue el mismo orden: nombre, examen, diagnóstico, juicio, tratamiento y glosa.

A finales del cuarto milenio a. J.C. el grado de civilización también era alto en Mesopotamia. Las casas y los templos sumerios aparecían decorados con cerámicas y las construcciones seguían diseños geométricos. Se construyeron canales para regar la tierra y controlar las inundaciones. La tradición de escribir sobre tablillas de arcilla, luego secadas, ha hecho llegar hasta nosotros una enorme colección documental. El descubrimiento de tablillas en Uruk de cinco mil años de antigüedad nos ha revelado el uso primitivo de la escritura por los sumerios, quienes utilizaban unos dos mil signos diferentes, que eran dibujos estilizados con los que representaban la mayor parte de los objetos. Con el tiempo fueron reduciendo el número de signos y sólo quedaba la tercera parte cuando se produjo la conquista por los acadios. Entonces los primitivos dibujos se habían transformado en combinaciones de cuñas. Había nacido la escritura cuneiforme.

Durante la primera época de la civilización sumeria se representaba una unidad (diez unidades) presionando oblicua (verticalmente) con el estilo fino sobre la arcilla. La misma operación con el estilo grueso servía para representar el 6 y el 60. Se han encontrado miles de tablillas en la época de la dinastía de Hammurabi (1800 – 1600 antes de Cristo) que muestran un sistema de numeración de base 60 que facilitaba la división en 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 o 30 partes iguales. Este sistema sigue utilizándose en medidas de tiempo y de ángulos.

Su gran descubrimiento fue la utilización de la numeración posicional, dando diferente valor a las cifras según la posición ocupada. De esta manera, repitiendo adecuadamente pocos signos, es posible escribir números muy grandes y muy pequeños. La numeración posicional y los eficaces algoritmos que inventaron les proporcionaron gran eficacia como calculistas. Manejaban las operaciones aritméticas fundamentales de manera no muy distinta a como las utilizamos hoy. Les debemos el método manual de obtener raíces cuadradas. Hicieron tablas de multiplicar, de inversos, de potencias y de raíces cuadradas y cúbicas. Con las tablas de inversos reducían la división a la multiplicación. Utilizaban la interpolación en sus cálculos con tablas.

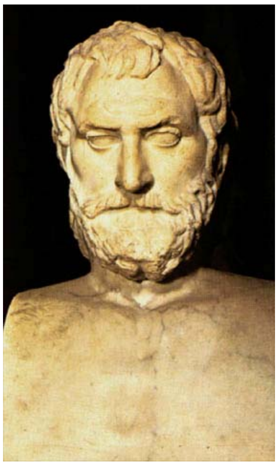
Inicialmente, igual que los egipcios, sólo consideraron la Matemática como un instrumento para establecer calendarios útiles para la agricultura y las fiestas religiosas, pero el sorprendente grado de precisión de ciertos cálculos demuestra que su interés por las matemáticas fue más allá de lo puramente aplicado a sus necesidades.

Este espíritu teórico llevó a los babilonios a adelantar a los egipcios en álgebra. Sabían resolver ecuaciones de segundo grado, utilizaban tablas de sumas de cuadrados y cubos ($n^3 + n^2$) para resolver la ecuación $x^3 + x^2 = c$, y reducían a esta forma la ecuación $ax^3 + bx^2 = c$, mediante el cambio $x = by/a$.

Conocían también la relación que unos 1500 años después se llamó de Teorema de Pitágoras, pues en la tablilla 322 de la colección Plimpton de la Universidad de Columbia aparecen cocientes de ternas pitagóricas del tipo $p^2 - q^2$, $2pq$ y $p^2 + q^2$ que no son más que algunas de las razones trigonométricas que empleaban para hallar longitudes de lados y áreas de triángulos. Por el contenido de otras tablillas parece que también conocían la suma de una progresión geométrica, así como sumas de los cuadrados de números naturales.

En 1936 se desenterró en Susa, trescientos kilómetros al este de Babilonia, unas tablillas que en una lista y con notación sexagesimal dan razones entre áreas y cuadrados de lados para el pentágono, hexágono y heptágono regulares. Se da en notación sexagesimal 0; 57, 36 como relación entre el perímetro del hexágono regular y la longitud de la circunferencia circunscrita, de lo que se deduce 25/8 como aproximación decimal del número π[1].

Además del Teorema de Pitágoras, los babilonios conocían expresiones aproximadas que les daban áreas y volúmenes de muchas figuras[2] y algunas relaciones geométricas importantes. Sabían, por ejemplo, dibujar un ángulo recto inscrito en una circunferencia, resultado conocido hoy como teorema de Thales, quien vivió más de mil años después de las época en que los babilonios comenzaron a utilizarla. Este hecho nos hace dudar sobre la transmisión del saber babilónico a los griegos.


Thales de Mileto
¿640-560?a.C.

Se debe cuestionar la afirmación muy

[1] La longitud de la circunferencia se radio 1 sería

$$6 : \left[\frac{57}{60} + \frac{36}{3600}\right] = 6{,}25 = \frac{25}{4}.$$

Por tanto, $\pi \cong \frac{25}{8} = 3{,}125$ era el valor aproximado de π utilizado por los babilonios.

[2] Igual que los egipcios no acotaban el error.

extendida de que las matemáticas egipcia y babilonia no muestran formulaciones generales y abstracciones, pues los cientos de problemas de tipos parecidos que aparecen en las tablillas cuneiformes babilónicas parecen ser ejercicios que debían resolver los escolares siguiendo ciertos métodos o reglas generales y las repetidas palabras “longitud” y “anchura” se pueden asimilar a las letras “x” e “y” de nuestras ecuaciones. Parece verosímil admitir que algunos escribas habían recorrido el camino que lleva de ejemplos concretos a abstracciones más generales.

El milagro griego

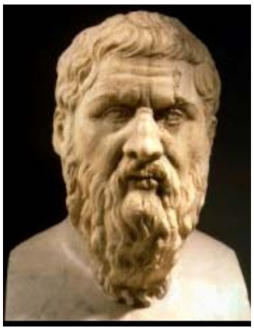
De todo lo que precede se deduce que un cuerpo considerable de conocimientos sistematizados fue muy anterior a la ciencia griega. Esto ayuda a explicar el llamado milagro de la civilización griega. Nadie puede leer la Iliada y la Odisea, primicias de la civilización griega, sin preguntarse qué fue lo que hizo posible tales obras maestras, pues no aparecen relámpagos en un cielo sin nubes. Todo glorioso comienzo enlaza con la culminación de otra brillante época anterior. Parece claro que los griegos tomaron una gran cantidad de observaciones y teorías no clarificadas de los egipcios y de los pueblos de Mesopotamia. Tiene dificultades describir la transmisión de conocimientos desde Egipto hasta Grecia, debido a que la llegada de la edad del hierro a principios del primer milenio estuvo acompañada de acontecimientos revolucionarios muy destructivos, que nos han privado de documentos y nos han impedido, hasta ahora, descifrar muchos textos minoicos y micénicos.

La laguna documental entre las edades de oro de las ciencias egipcia y griega no ha ocultado que muchos de los conocimientos griegos fueron tomados de fuentes orientales.

Los ritos de incubación griegos derivan de modelos egipcios. Las comprobaciones del origen babilonio de gran parte de la astronomía griega han permitido averiguar que no fue Hiparco el primero en descubrir la precesión de los equinoccios sino el astrólogo babilonio Kidinnu, alrededor del año 343 antes de Cristo.

Las influencias egipcia y babilónica son patentes en la aritmética griega. La utilización de suma de fracciones de numerador uno y el uso de un símbolo especial para 2/3 se debe a la imitación de los egipcios. El manejo de las fracciones sexagesimales viene de los babilónicos. Pitágoras y Platón, por ejemplo, estuvieron en Oriente.

Los griegos son, desde el siglo VI a. J.C. hasta el predominio romano, el pueblo más importante del mundo civilizado. Su presencia en la cuenca mediterránea les hizo asimilar los hallazgos precedentes. Las maravillas que desarrollaron en esos casi cinco siglos conforman lo que, esencialmente, conocemos como el espíritu occidental.


Platón 427 – 347 a.C.

Sus matemáticas, como las de sus predecesores, son inicialmente de carácter práctico, pero el genio griego elevó la matemática al rango de disciplina teórica, pasando de trabajar con objetos sensibles a entes matemáticos, *abstractos, ideales, perfectos y eternos, existentes fuera del espacio y del tiempo e independientes de sus representaciones, hechas por el hombre después de captarlos con su pensamiento*. La relación entre los entes matemáticos y sus representaciones es la misma que entre las ideas y sus concreciones en palabras, siempre imágenes imperfectas de las ideas. Por ello en las representaciones de la recta, el triángulo o el círculo siempre encontraremos irregularidades. Más tarde, Platón irá mucho más lejos con su conocida teoría de las ideas, cuyo carácter general trasciende la matemática.

En consecuencia, de relaciones particulares entre objetos sensibles se pasa a relaciones generales entre conceptos teóricos, cuya validez universal se establece mediante la demostración, que junto a la organización deductiva de los conocimientos y a la necesidad de admitir sin demostración la certeza de algunos enunciados, que los llamaban postulados, son las tres grandes aportaciones griegas a las matemáticas.

Los postulados eran la base desde donde la razón obtenía el resto de proposiciones y teoremas, siguiendo las leyes del pensamiento y probando la veracidad de cada enunciado deducido.

Pitágoras de Samos


Pitágoras
¿582-497?a.C.

Esta nueva forma de hacer y entender las matemáticas, que se desarrolla en el final del siglo VI y durante el siglo V a. J.C., va asociada a Pitágoras de Samos, a Hipócrates de Chios, Archytas de Tarento, Theaetetus de Atenas y Eudoxio de Cnido.

Pitágoras de Samos (569 – 475 a.C.) creía en la transmigración de las almas, concebida como un castigo al verse el alma obligada a vivir varias vidas para conseguir la purificación, pasando de una persona a otra e incluso morando en animales o plantas. Afirmaba que el método para obtener la purificación y librarse de la rueda de la reencarnación se obtiene conformando la conducta ética a las leyes y belleza de la naturaleza.

Esta convicción le llevó a fundar una sociedad científica religiosa para descubrir lo más íntimo y bello de Universo a través de su reflejo en la estructura interna de los números.

El trabajo matemático de sus miembros, llamados los pitagóricos, no consistió en la creación de objetos matemáticos, que creían que ya existían, sino en descubrir relaciones entre dichos objetos. Suponían que en la naturaleza estaban las ideas de claridad, orden, precisión, belleza y armonía, que deberían estar reflejadas en las relaciones entre los objetos matemáticos, lo que imponía unos límites entre los tenía que discurrir la razón. Todo lo que quedase fuera de esos límites era calificado de irracional. Obtuvieron muchas relaciones y, en particular, al representar los números por puntos, expresaron propiedades geométricas por relaciones numéricas. Ya hemos indicado que la más famosa que se les atribuye, el teorema de Pitágoras, se conocía en Babilonia, varios siglos antes de la época pitagórica[3].

Los pitagóricos también descubrieron la relación entre las longitudes de las cuerdas de una lira y los acordes fundamentales de la música. La admiración de sus logros les llevó a proclamarse **amigos de la sabiduría** y a creer que habían penetrado en la estructura interna de los números.

Su concepción atomista les ayudó a suponer que los cuerpos estaban formados por átomos, que agrupados según ciertas estructuras geométricas, definidas por secuencias numéricas, permitirían construir figuras. Eso les llevó a pensar que todos los conocimientos, matemáticos y no matemáticos, estaban edificados sobre el concepto de número.

Los pitagóricos intuían desde su concepción numérico atomista que dados dos segmentos cualesquiera existía una unidad de medida contenida un número entero de veces en cada segmento, de lo que deducían que el cociente entre las longitudes de dos segmentos siempre se puede

---

[3] No se atribuye a Pitágoras ninguna de las 367 demostraciones reunidas por Elisha Scott Loomis a principios del siglo XX en el libro "*The Pytagorean Proposition*". Las demostraciones están clasificadas en algebraicas, geométricas, dinámicas y cuaterniónicas. Una de ellas se debe a James Abram Garfield (1831 – 1881, que fue el vigésimo Presidente de Estados Unidos.

representar por una fracción. Expresaban esta idea diciendo que dos segmentos cualesquiera son siempre conmensurables.

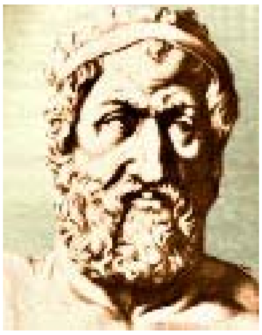
Pronto ellos mismos encontraron contradicciones a esta afirmación. Sus ideales de belleza les llevaron a adoptar el pentágono regular como uno de sus símbolos, del que Hyppasus de Metaponto, un pitagórico del siglo V antes de Cristo, encontró que la diagonal y el lado eran inconmesurables, lo que significa que no hay una unidad común contenida un número exacto de veces en ese lado y diagonal.

Aunque decidieron mantener en secreto este descubrimiento no pudieron evitar su expansión. Una historia, tal vez apócrifa, dice que la comunidad pitagórica arrojó a Hyppasus al mar, donde pereció ahogado y acusado de su divulgación. Lo que no es apócrifo es que abortaron lo que pudo haber sido su mayor aportación: El descubrimiento de los números irracionales.

El error pitagórico fue apoyarse en afirmaciones que sostenían por encima de la audacia de la duda o del escrúpulo de la verificación, debido a que sus convicciones, no probadas, les llevaban a fijar el carácter y el alcance de los resultados a que podían llegar.

Zenón de Elea

El atomismo llevó a los pitagóricos a postular que la recta y el tiempo se podían dividir indefinidamente y que estaban formados por puntos con dimensión y por instantes con duración. Esos postulados resultaron ser incompatibles debido a las paradojas de Aquiles y la tortuga, de la pista de carreras, de la flecha lanzada hacia la diana y de los tres atletas, elaboradas por Zenón de Elea (490 a.C. – 425 a.C.) para defender las ideas filosóficas de su maestro Parménides frente a los pitagóricos.


Zenón de Elea
¿489 - 430 a.C.?

Zenón se limitaba a decir, por ejemplo, que de ser ciertos los postulados pitagóricos se tendría que la persecución rectilínea de Aquiles a la tortuga no acabaría nunca, pues cada vez que Aquiles se desplazase desde su posición a la ocupada por la tortuga se tendría que la tortuga estaría situada en otro punto. El absurdo de la conclusión en las cuatro paradojas llevaba a la demostración de la imposibilidad de la admisión simultánea de los postulados pitagóricos del espacio y los del tiempo. El método de demostración utilizado por Zanón le llamamos *reducción al absurdo* y, desde entonces, lo utilizamos constantemente.

Parménides y Zenón habían nacido en Elea, una pequeña ciudad de la Magna Grecia, al sur de Italia, donde en el siglo VI antes de Cristo habían llegado unos griegos procedentes de Focea, en Asia Menor, huyendo de los persas. Elea ha sido la cuna de un grupo de filósofos que han tenido gran influencia en el pensamiento occidental. Uno de los más importantes fue Parménides, de quien fue discípulo Zenón.

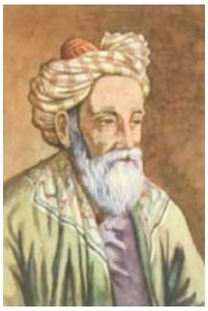
En el año 450 antes de Cristo, Parménides y Zenón visitaron Atenas, formando parte de una misión diplomática para convencer a Pericles que firmara un pacto de alianza entre las dos ciudades. También se reunieron con Sócrates, que tenía veinticinco años. Es muy probable que las ideas de Parménides y Zenón influyesen significativamente en el pensamiento socrático, dado que la transmisión de las paradojas de Zenón de Elea la debemos a Aristóteles.

Los errores pitagóricos mostrados en las paradojas de Zanón llevaron a los pensadores griegos a las siguientes consecuencias:

1. **Cambiar los postulados**, admitiendo que un segmento de recta se puede dividir indefinidamente, pero que está formada por puntos sin dimensión. Su aceptación no es fácil, pues esos puntos geométricos no son entes sensibles. Platón consideraba que pertenecen al mundo de las ideas, como pensamientos de Dios, en tanto que Aristóteles los suponía abstracciones mentales de los puntos materiales.

2. **Admitir la existencia de pares de segmentos inconmensurables y relacionar su existencia con las magnitudes irracionales**, lo que originó el estudio de las magnitudes irracionales por Theaetetus de Atenas (417 – 369 a.C.), discípulo de Sócrates, cuyas aportaciones se recogieron en el libro X de Los Elementos de Euclides, cuyo propósito, según dice Pappus en la introducción del libro, es *"investigar los conmensurables e inconmensurables, magnitudes continuas racionales e irracionales, ciencia con origen en la escuela de Pitágoras, pero que ha tenido un importante desarrollo en las manos de Theaetetus, persona de talento que con paciente investigación estableció distinciones exactas y pruebas irrefutables entre las mencionadas cantidades".*

3. **Relacionar los pares de segmentos conmensurables con la teoría de la proporcionalidad**, aportación debida a Eudoxio de Cnido y recogida también en Los Elementos de Euclides. Esta teoría fue perfeccionada por



Omar Khayyam
¿1044 – 1123?

el astrónomo, filósofo, matemático y poeta persa Omar Khayyam (1050 – 1123), y fue precursora de la fundamentación del número real hecha en el siglo XIX. El "Álgebra" de Khayyam fue traducida al francés en 1851.

4. **Abandonar, en parte, los moldes prefijados que limitaban el pensamiento, sustituyéndolos por la reflexión crítica** que sigue modesta y seriamente los pasos del pensamiento en el planteamiento de los problemas y en la demostración de los teoremas, concentrándose, particularmente, en los resultados más originales, audaces e imprevisibles.

5. **Sustituir la intuición como método de razonamiento por la demostración**, al darse cuenta de la necesidad de establecer demostraciones de todos los resultados conocidos y de que la intuición, tan útil como método de descubrimiento y guía del pensamiento, es peligrosa como método de razonamiento.

Los Elementos de Euclides

Estos cambios radicales en la actitud de matemáticos y filósofos suponen una nueva forma de pensar, que es la aportación más importante de la matemática griega y el comienzo de una tradición expositiva matemática que llega hasta nuestros días, llamada *forma hipotético deductiva de razonamiento*, y que distingue a la Matemática griega de todo lo que la ha precedido.

El teorema de Pitágoras, por citar sólo un ejemplo, era conocido más de mil años antes de Pitágoras, pero su establecimiento riguroso mediante una prueba de carácter general es un producto genuino de esta nueva forma de pensamiento.

Euclides 430 – 360 a.C.

Recogiendo sistematizadamente los resultados conocidos, expuestos con esta nueva forma de proceder, e incorporando algunos nuevos, Euclides (325 – 265 a.C.), bibliotecario de Alejandría, escribió la obra "Los Elementos" alrededor del año 300 antes de Cristo. Está compuesta de trece libros titulados:

Libro I: Congruencia de triángulos, paralelas, áreas de triángulos y rectángulos.

Libro II: Relaciones de igualdad en triángulos, cuadrados y rectángulos.

Libro III: Círculos.

Libro IV: Construcción de polígonos en círculos.

Libro V: Teoría de proporciones.

Libro VI: Semejanza de figuras rectilíneas planas.

Libro VII: Proporciones, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, primos relativos.

Libro VIII: Progresiones, números cuadrados y cúbicos.

Libro IX: Factorización de primos, infinitud de los primos, números perfectos.

Libro X: Teoría de líneas irracionales.

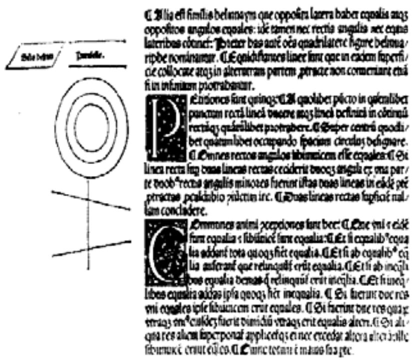
Libro XI: Relaciones entre figuras sólidas.

Libro XII: Relaciones entre círculos y esferas, volúmenes de pirámides y conos.

Libro XIII: Construcción de sólidos regulares en esferas.

Lo que es magistral en Los Elementos es el **método**. Desarrollan toda la geometría y la aritmética elemental partiendo de cinco “postulados” y estableciendo teoremas y proposiciones sólo a partir de los postulados y de los resultados ya demostrados mediante las reglas del razonamiento deductivo. Los cinco postulados son:

1. Dos puntos arbitrarios se pueden unir por un segmento de recta.
2. Cualquier segmento de recta se puede extender indefinidamente a una recta en ambas direcciones.
3. Dados dos puntos cualesquiera, hay una circunferencia con centro en el primero que pasa por el segundo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si al cortar dos rectas por una tercera, ésta forma dos ángulos interiores al mismo lado que suman menos de dos rectos, entonces las dos rectas primeras se cortan en algún punto a ese lado.



Los Elementos: Los cinco postulados
(Edición de 1482. Traducción de Campanus)

El quinto postulado se le llama el ***postulado de las paralelas*** debido a que un enunciado equivalente al dado es que por un punto exterior a una recta pasa una sola recta paralela a la dada.

La fascinación intelectual que produjo la presentación de las matemáticas tal como aparece en "Los Elementos" los ha elevado al rango de modelo del discurso de la razón desde entonces. Descartes, en la primera parte de su "*Discurso del Método*" escribió que "*gustaba, sobre todo, de las matemáticas por la certeza y evidencia de sus razones*", y en la segunda parte dice:

Descartes
1596 - 1650

"*Esas largas cadenas de trabadas razones muy simples y fáciles, que los geómetras acostumbran a emplear para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginar que todas las cosas que entran en la esfera del conocimiento humano se encadenan de la misma manera".*

Al matemático jesuita Saccheri se debe la obra Logica Demonstrativa (1697) escrita en forma de definiciones, postulados y demostraciones, al estilo de Euclides en sus propias palabras. Spinoza también se inspiró en Los Elementos para desarrollar su Ética, que la titula "Ética demostrada en con el método geométrico", y lo mismo hizo Hobbes en el desarrollo de su "Teoría política".

El trabajo genial de Euclides tiene muchos aspectos dignos de mención especial. Sólo comentaremos tres.

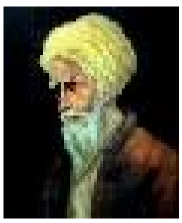
1. **La distinción implícita entre los infinitos actual y potencial**. En ninguno de sus trece libros aparece explícitamente que la recta sea un conjunto de infinitos puntos y evita siempre considerar conjuntos con infinitos elementos. En lugar de escribir que el conjunto de números primos es infinito, expone que dado un número primo cualquiera existe otro número primo mayor que él. En nuestro tiempo decimos que un conjunto definido por una propiedad A es **infinito potencial**, si dado un número natural n podemos encontrar en A más de n elementos diferentes con esa propiedad. El concepto de **infinito actual** supone la existencia de conjuntos infinitos, como entes que están ahí, y cuya admisión ha llevado a importantes problemas matemáticos que, tal vez, Euclides los intuyó y decidió evitarlos no utilizando el infinito actual.

2. **La elegante utilización de la reducción al absurdo en las demostraciones**. En Los Elementos se establece con este método y el teorema de Pitágoras la inconmensurabilidad entre la diagonal y el lado de

un cuadrado, razonando así: La conmensurabilidad implica que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donde la fracción es irreducible, y al elevar al cuadrado se obtiene que p es par. Sustituyendo $p = 2r$ y simplificando se deduce que $\sqrt{2} = \frac{q}{r}$, luego, repitiendo el argumento anterior se llega a que q también es par. De la inexistencia de una fracción irreducible con numerador y denominador pares se deduce que es absurdo que la diagonal y el lado de un cuadrado sean conmensurables.

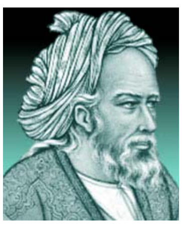
3. **Su reticencia a utilizar su quinto postulado,** tal vez debido a que pensase que era consecuencia de los cuatro primeros. No lo utiliza hasta la Proposición 1.29. Precisamente uno de los problemas más fascinantes de la Historia de la Ciencia, llamado por los griegos le llamaron "*el cuarto problema de la geometría*"[4], ha sido el intento de probar que el quinto postulado era consecuencia de los cuatro anteriores. Ya Ptolomeo, en el año 150, intentó sin éxito demostrar que el quinto postulado era consecuencia de los otros cuatro.


Ptolomeo ¿100 – 170?


Alhazen 965 - 1040

También Alhazen (965 – 1039) en la Escuela de El Cairo intentó demostrar el quinto postulado considerando un cuadrilátero trirrectángulo, llamado hoy cuadrilátero de Lambert en honor al matemático del siglo XVIII que lo estudió sistemáticamente. Alhazen creyó haber demostrado el quinto postulado de Euclides, pero utilizó en su demostración que el lugar geométrico de un punto que se mueve permaneciendo a distancia constante de una recta es otra recta paralela a la dada, lo que se ha demostrado modernamente que es equivalente al postulado de Euclides.


Lambert 1728 - 1777


Khayyam ¿1044 – 1123?

El científico y poeta persa Omar Khayyam (1050 – 1123) criticó la demostración de Alhazen con la indicación de que Aristóteles había excluido el uso del movimiento en geometría e intentó otra prueba del quinto postulado

---

[4] Los otros tres problemas eran la resolución con regla y compás de la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Están tratados en el libro de Euclides y serán comentados más tarde.

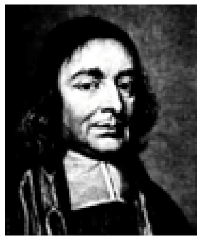
partiendo de un cuadrilátero con dos lados iguales y perpendiculares a su base, llamado hoy día “cuadrilátero de Saccheri” en honor del matemático del siglo XVIII que investigó las posibilidades que pueden darse con los dos ángulos superiores, necesariamente iguales: 1) ser los dos agudos, 2) los dos ángulos obtusos o 3) los dos rectos.

Los dos primeras posibilidades las excluye Omar Khayyam basándose en que dos rectas convergentes deben cortarse, principio que atribuye a Aristóteles. Pero resulta de nuevo que este principio es equivalente al postulado del paralelismo de Euclides, por tanto Omar Khayyam también fracasó en su intento de demostrar el quinto postulado.

Descartes
1596 - 1650

A Omar Khayyam se le debe también el reemplazar la teoría de proporciones de Euclides por un planteamiento numérico con lo que se acercó a la definición moderna de número racional y comenzó a cerrar el abismo entre el álgebra numérica hindú y geométrica griega que culminaría Descartes. Proféticamente escribió que “*cualquiera que piense que el Álgebra es un sistema de trucos para obtener los valores de las incógnitas piensa vanamente. No se debe prestar ninguna atención al hecho de que el álgebra y la geometría son en apariencia diferentes. Los hechos del álgebra son hechos geométricos que están demostrados*”.

Al Tusi
1201 -1274



Wallis
1616 - 1703

Ya en plena decadencia árabe, Nasir Eddin Al Tusi (1201 – 1274), nieto de Gengis Khan, continuó los esfuerzos por demostrar el quinto postulado de las paralelas del libro de Euclides partiendo de las tres hipótesis posibles del cuadrilátero de Saccheri. Se considera a Al Tusi como uno de los precursores de la geometría no euclídea, pues la traducción de su obra por Wallis en el siglo XVII fue el punto de partida de los desarrollos llevados a cabo por Saccheri en el primer tercio del siglo XVIII.

Lambert
1728 - 1777

Saccheri fue el primero en analizar en 1733 la dependencia del quinto postulado de los cuatro primeros mediante reducción al absurdo: Supone que el quinto postulado es falso e intenta llegar a una contradicción. Después de un estudio muy cuidadoso, concluyó de forma precipitada la deseada contradicción. Lambert recorrió posteriormente, en 1766, un camino similar pero, más prudente, se limitó a exponer sus muy perspicaces conclusiones alternativas.

Bolilla
1802 - 1860

Gauss
1777 - 1855

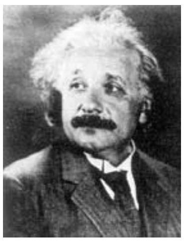
Alrededor de 1830 y casi con simultaneidad, Gauss en Alemania, Bolyai en Hungría y Lobachevsky en Rusia se percatan de que si en lugar de suponer el quinto postulado se supone que por un punto exterior a una recta pasa más de una recta paralela se obtiene una teoría diferente de la euclídea, posteriormente denominada "geometría de Lobachevsky o geometría hiperbólica". Beltrami, Poincaré y Klein establecieron modelos para esta nueva geometría, distinta de la euclídea, lo que probaba la independencia del quinto postulado de los cuatro anteriores, dado que los cuatro primeros postulados pueden convivir con un quinto postulado contradictorio con el de Euclides y generar otra geometría.

Lobachevsky
1793 - 1856

Beltrami
1835 - 1900

Poincaré
1854 - 1912

Klein
1849 - 1925



Einstein
1879 - 1955

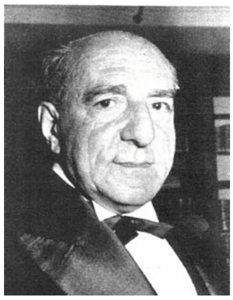
Con este resultado aún no terminó el quinto postulado de generar frutos, pues su sustitución por la hipótesis de que por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela permitió obtener la llamada geometría elíptica o "riemanniana", de aplicación en la teoría de la relatividad de Einstein. Finalmente, al establecerse que no hay una geometría que sea más valida que las otras se probó la falsedad de la idea de Kant de que los conceptos de espacio de la geometría euclídea y de tiempo están en nuestro pensamiento como un marco de referencia.

Kant
1724 - 1804

El ideal griego de contemplar lo bello y armonioso de la naturaleza está presente en "Los Elementos". El eje en torno al que giran sus argumentos es la geometría y uno de sus objetivos es reducir los problemas matemáticos a construcciones geométricas con regla y compás, que son los instrumentos generadores de las líneas perfectas, la recta y la circunferencia. Los primeros problemas que aparecen en los *"Elementos"* son de intersecciones de rectas y circunferencias y plantean resolver con regla y compás la duplicación del cubo, la trisección del ángulo, y la cuadratura del círculo, en lo que se venía trabajado intensamente desde el siglo V a. J.C. y continuaron pensando muchos de los mejores matemáticos durante los veintidós siglos siguientes, hasta que Pierre Wantzel probó la irresolubilidad de los dos primeros y, casi simultáneamente, Ferdinand von Lindemann obtuvo la demostración de la imposibilidad de la cuadratura del círculo con regla y compás. La importancia histórica de estos tres problemas está en las muchas cuestiones que se desarrollaron y resolvieron buscando su solución, lo que llevó a Klein a decir que *"se buscó hierro y se encontró oro"*. Los griegos nos dejaron soluciones aproximadas de estos tres problemas. Por ejemplo, Hippias de Elis (460 – 400 a.C.) construyó aproximadamente una curva, la cuadratiz, que permitía dividir un ángulo en dos partes proporcionales a dos números dados. Utilizaba métodos geométricos y cinemáticos y se adelantaba al cálculo aproximado y a la noción de límite.


Lindemann
1852 - 1939

De estas consideraciones es fácil deducir "Los Elementos" es una obra casi perfecta y adelantada muchos siglos a su tiempo, lo que llevó a que Don Julio Rey Pastor, el más emblemático de los matemáticos españoles fallecidos durante el siglo XX, afirmase:


Rey Pastor
1888 - 1962

"Si pretendieras agregar o quitar algo de Los Elementos de Euclides reconocerías de inmediato que te alejas de la ciencia y te acercas hacia el error y la ignorancia".

Algunas influencias de Los Elementos

Los Elementos han influido decisiva y significativamente, bien directa o indirectamente, en casi todos los científicos posteriores al siglo III a. J.C. Por limitaciones de espacio y tiempo daremos un bosquejo de la influencia de Los Elementos en Arquímedes, en los matemáticos árabes y en Newton.

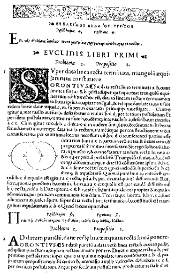
Los Elementos y Arquímedes


Arquímedes
298 – 212 a.C.

En la vida científica de Arquímedes de Siracusa (287 – 212 a.C.) tuvieron influencia estos tres hechos:

El ser hijo del astrónomo Phidias, célebre astrónomo que junto Eudoxo y Aristarchus había propuesto un sistema heliocéntrico.

La visita en su juventud a Egipto, donde estudió con lo sucesores de Euclides y entabló amistad con muchos de ellos, particularmente con Conon de Samos, a quien Arquímedes admiraba por sus habilidades matemáticas. En el prólogo de su libro *Sobre las espirales* nos cuenta que tenía la costumbre de enviar a sus amigos de Alejandría las proposiciones geométricas que descubría y le respondían en muchas ocasiones que eran resultados que ya conocían, por lo que para averiguar quienes estaban faltos de espíritu científico decidió en lo sucesivo enviar algunas proposiciones falsas intercaladas entre las correctas para descubrir quien era capaz de atribuirse hasta lo erróneo.



Proposiciones 1 y 2 del Libro 1 de *Los Elementos* (Edición de 1536)

El tercer hecho es su parentesco y amistad con el rey Heron II de Siracusa, quien le convenció que dedicase parte del tiempo que empleaba en sus razonamientos sobre matemática pura a idear artefactos de guerra para defenderse de los romanos, gracias a los cuales el comandante romano Marcellus fue derrotado cuando sitió Siracusa en la primera guerra púnica.

Arquímedes adquirió gran fama en vida por sus aplicaciones, bélicas y no bélicas, consecuencia de sus descubrimientos físicos de las leyes de la palanca, la polea y del empuje de un cuerpo sumergido en un fluido, que, además de derrotar a Marcellus le permitieron mover un barco sobre la arena y comprobar la estafa en la corona que Herón II había mandado hacer para ofrecerla a Júpiter. Sobrevive su frase de que si existiese un punto de apoyo cercano a la Tierra conseguiría moverla.

La fama que las invenciones mecánicas dieron a Arquímedes no influyeron en su creencia de que ***lo más valioso era el desarrollo de la matemática pura***. No hacía comentarios sobre las invenciones aplicadas que le habían dado la fama. Parecía repudiar lo que sólo tenía una utilidad práctica, y ponía su interés en las especulaciones teóricas sin referencia a las necesidades ordinarias de la vida. Su interés y admiración se concentraba en estudiar los objetos que tenían belleza y grandeza, así como en las demostraciones precisas y contundentes.

Plutarco matiza más esta idea diciendo que Arquímedes utilizaba sus descubrimientos mecánicos para obtener resultados de geometría pura, afirmación confirmada en el verano de 1906 cuando J.L. Heiberg, profesor de filosofía en la Universidad de Copenague, accidentalmente descubrió en

Estambul la obra de Arquímedes ***"El Método"*** un original uso de la estática como guía de sus descubrimientos[5], pues *"ciertos hechos* – escribe Arquímedes en El Método – *me parecen claros por un método mecánico, que no suministra una prueba real. Por tanto, deben ser probados después por el método geométrico. El conocimiento inicial por el método mecánico facilita la posterior demostración geométrica"*. Arquímedes asocia los razonamientos mecánicos con intuición y exploración y la demostración, como buen seguidor de Euclides, la vincula al razonamiento geométrico.

Los Elementos de Euclides en la matemática árabe.

Un complot provocó la huida de Mahoma de la Meca a Medina en el año 622 y el comienzo de la Era Mahometana. El éxito de Mahoma en Medina le convirtió en un líder militar y religioso que formó un estado con capitalidad en La Meca. Su muerte repentina en Medina el año 632, mientras planeaba atacar el Imperio Bizantino, no fue obstáculo para la extensión del estado islámico. Mahoma había logrado unir a las tribus árabes e inspirarles un gran fervor que les permitiría conquistar el mundo. Damasco fue tomada en el 635, Jerusalén en el 637, la conquista de Egipto se terminó en el 641 con la toma de Alejandría, centro matemático del mundo en los últimos mil años, y con la destrucción de muchos tesoros documentales de la que había sido la mayor biblioteca del mundo. La conquista de Persia, al año siguiente, puso a los árabes en contacto con la refinada cultura iraní. Cuando en el 712 conquistaron España, los seguidores del profeta gobernaban una ancha zona del mundo que se extendía desde el Asia central hasta el lejano Occidente.

Durante más de un siglo los conquistadores árabes lucharon entre sí y con sus enemigos hasta que, al fin, hacia el 750 el espíritu guerrero cedió,

---

[5] Los descubrimientos físicos y teoremas matemáticos de Arquímedes están en sus libros *El calculador de la arena*, *Sobre las espirales* y *El Método*, *Mediciones en un círculo* (donde utilizando polígonos de 96 lados inscritos y circunscritos a una circunferencia obtuvo que $223/71 < \pi < 22/7$), *Teoría del equilibrio* (dos tomos, donde da los principios fundamentales de la Mecánica), *Cuadratura de la parábola, Sobre la esfera y el cilindro* (dos tomos), *Sobre las espirales, Sobre los conoides y esferoides* y *Sobre los cuerpos flotantes* (donde obtiene los principios fundamentales de la hidrostática). Estos descubrimientos están muy por encima de su época, siendo considerado por muchos historiadores de la matemática como uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos. La elevación de su espíritu, la profundidad de su alma y el tesoro de su conocimiento científico le llevó al interés por los ***métodos y principios generales***. Le debemos diversos métodos de aproximación y un método de integración por aproximaciones sucesivas que le llevó a obtener áreas y volúmenes de muchas figuras. Chasles le ve como el fundador de la integración que Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz y Newton llevaron a la perfección. Heath considera *los libros de Arquímedes, sin excepción, monumentos de exposición matemática que sobrecogen al lector por el razonamiento, claridad y belleza.* Desgraciadamente no se han conservado todas las obras de Arquímedes, ya que Pappus hace referencia a un tratado de Arquímedes sobre las balanzas y las palancas y Theon hace referencia a otro libro de Arquímedes sobre los espejos.

surgió un cisma entre los árabes de Occidente que ocupaban España y Marruecos y los árabes de Oriente que durante el califato de Al-Mansur establecieron su capital en Bagdad. Esta ciudad pronto iba a convertirse en el centro mundial del desarrollo de la matemática debido a la combinación de varias fuerzas: La cultura persa, el deseo de los árabes de asimilar las civilizaciones que habían invadido y la pasión por el conocimiento que demostraron los califas al-Mansûr, Hârûn al-Rashîd y al-Ma`mûn, bajo cuyos mandatos la nueva civilización se desarrolló con increíble velocidad y Bagdad se convirtió en una nueva Alejandría. Sabios de Siria, Irán y Mesopotamia, incluidos judíos y cristianos fueron llamados a Bagdad. Se llama "milagro árabe" a la celeridad con que asimilaron la cultura de sus vecinos en cuanto empezaron a saborearla. Su mérito se pondera mejor si se considera el escaso bagaje intelectual con que comenzaron sus conquistas.

Sus tutores persas les incitaban a beber hasta saciarse en las antiguas fuentes del saber sánscrito y griego. De los hindúes aprendieron aritmética, álgebra, trigonometría, y química; de los griegos, lógica, geometría, astronomía y medicina.

El grado de uniformidad cultural árabe no resultó alto, pues siempre hubo en el mundo árabe una división muy sensible en facciones que desembocó en conflictos. Vínculo común en el mundo islámico fue el idioma, conservado por la obligación de leer el Corán en árabe. La gran extensión del dominio musulmán les hizo asimilar culturas muy variadas, fundidas por el ecléctico carácter árabe, a las que incorporaron elementos propios. La matemática árabe consta de:

- Una aritmética basada en el principio posicional que provenía de la India.
- Un álgebra con orígenes en Grecia, India y Babilonia que adoptó una forma nueva y sistemática en manos de los árabes.
- Una trigonometría proveniente de Grecia e India. Los árabes se inclinaron por los métodos indios de la semicuerda, o función seno, ampliándolos con nuevas funciones y relaciones.
- Y una geometría que venía de "Los Elementos" de Euclides, que los árabes enriquecieron con generalizaciones y estudios críticos relativos al axioma del paralelismo de Euclides, que ya hemos considerado.

Los Elementos llegaron al pensamiento árabe durante el califato Al-Raschid, conocido por los cuentos de Las mil y una noches, con la traducción al árabe parte de la obra de Euclides. En el califato de Al-

Mamun[6] se tradujeron al árabe muchas de las joyas de la antigüedad, como el Almagesto de Ptolomeo, y una versión completa de Los Elementos de Euclides.


Al-Khowarizmi
¿ - 840

Al-Mamun fundó en Bagdad la Casa de la Sabiduría, comparable al antiguo Museo de Alejandría. Era una especie de Universidad en la que estuvo Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi, matemático y astrónomo de cuyo nombre deriva la palabra algoritmo[7] y que iba a hacerse, junto con Euclides, muy popular en la baja Edad Media. Durante la primera mitad del siglo XX escribió una docena de libros, basados en la obra hindú Sindhind, que versaron sobre el astrolabio, el reloj de sol, aritmética y álgebra.

En el primero de los dos libros sobre aritmética y álgebra, del que sólo se conserva la traducción latina "De numero indorum" (Sobre el arte de calcular hindú), dio una exposición completa del sistema de numeración hindú, responsable de la extendida y falsa creencia de que nuestro sistema de numeración es de origen árabe.

De otra obra de Al-Khowarizmi, "Al-jabr wa'l muqäbalah", aprendería más tarde Europa la parte de la matemática que lleva ese nombre. Contiene una exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente las de segundo grado. Esta obra representa para el Álgebra lo mismo que Los Elementos para la Geometría, por haber sido, hasta tiempos modernos, la mejor exposición elemental de álgebra conocida, debido, en opinión bastante generalizada, a que el marco geométrico y lógico con que justifica sus soluciones tiene el sello griego de "Los Elementos" de Euclides.


Ibn-Qurra
826 - 901

Al-Khowarizmi murió poco antes del 850. En la segunda mitad del siglo IX Thabit Ibn-Qurra (826 – 901) fundó una importante escuela de traductores desde el griego y el sirio. Le debemos la traducción al árabe de las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo y Eutocio, impidiendo así que fuese menor el número de obras árabes que han llegado hasta nosotros. Su traducción de "Los Elementos" de Euclides tuvo una gran influencia en la matemática árabe. En el siglo X vemos que Al-Karki sigue

[6] Dice una tradición que al Califa tuvo un sueño en el que se le apaeció Aristóteles y decidió traducir al árabe todas la obras griegas que se tuvieran a mano.
[7] "Algoritmo", que significa procedimiento operativo para resolver un problema.

Al-Karki

con la costumbre griega de utilizar la geometría de Euclides en la resolución de ecuaciones, si bien ya intenta su resolución por radicales, preparando así los primeros desarrollos matemáticos del Renacimiento. Al-Biruni (973 – 1048) aporta la traducción algebraica de problemas geométricos, siendo uno de los más notables la reducción del problema de inscribir el eneágono en una circunferencia a la resolución de la ecuación $x^3 = 1 + 3x$.

Al-Biruni
973 - 1048

Avicena
980 -1037

Otra traducción de Los Elementos de Euclides se debe a Avicena (980 – 1037), que fue el sabio enciclopédico persa más importante del Islam.

Los Elementos en Newton

Avanzando unos siglos llegó la reforma gregoriana del calendario, que no fue adoptada en Inglaterra hasta 1752. Por ello, con el calendario local inglés, Isaac Newton nació el día de Navidad de 1642 en Woolsthorpe, Lincolnshire (Inglaterra), que corresponde al 4 de enero de 1643 en el calendario gregoriano. Su padre, un rico granjero sin cultura, había muerto tres meses antes de su nacimiento en el enfrentamiento entre el Rey Jacobo I y los puritanos. Los primeros contactos escolares de Newton fueron malos, pues era holgazán y no atento. En que Newton estudiase tuvieron una influencia decisiva su tío, el reverendo William Ayscough, que le animó a seguir estudiando en la Free Grammar School en Granthman, y el director de este centro, apellidado Stokes y enamorado de Los Elementos *de Euclides*, quien transmitió a Newton la *pasión por aprender según el esquema de Los Elementos* y convenció a su madre que le enviase a la Universidad. El 5 de junio de 1661 ingresó en el Trinity College de Cambridge.

Newton
1642 - 1727

La enseñanza en Cambrige estaba dominada por la filosofía de Aristóteles, si bien se permitía cierta libertad de estudio en el tercer año, lo que permitió a Newton estudiar la filosofía de Descartes, Gassendi, Hobbes y Boyle. También le atraía la mecánica de la astronomía de Galileo y la *Óptica* de Kepler. Encabezó unos apuntes de 1664 titulados *Questiones Quaedam Philosophicae* (Ciertas Cuestiones Filosóficas) con la sentencia:

“***Platón es mi amigo, Aristóteles es mi amigo, pero mi mejor amigo es la verdad”***, mostrándose como un pensador libre a tan corta edad.

El interés de Newton por la matemática aumentó en otoño de 1663 cuando, en una feria en Cambrige, adquirió un libro de astrología y otro de trigonometría cuyos aspectos matemáticos no pudo entender. Entonces llegó Barrow a la cátedra Lucasiana del Trinity College de Cambridge y le orientó hacia el estudio de *Clavis Mathematica* de Oughtred, *La Geometría* de Descartes, las obras completas de Vieta, el *Álgebra* de Wallis y su método de obtener el área de segmentos de parábolas e hipérbolas con los indivisibles de Cavalieri.


Barrow
1630 - 1677

Barrow también facilitó a Newton su traducción de *Los Elementos de Euclides*, libro que Newton siempre admiró.

Después de terminar sus estudios en Abril de 1665, la peste obligó a cerrar la Universidad. Newton se retiró durante casi dos años a Lincolnshire, durante los cuales hizo revolucionarios avances en óptica, física, astronomía y matemáticas. Elaboró el método de las *fluxiones*, basado en su descubrimiento de que la integración de una función es el procedimiento inverso de la diferenciación. Utilizando la diferenciación como operación básica estableció los fundamentos del cálculo diferencial e integral con los que ***unificó técnicas dadas con anterioridad para resolver problemas aparentemente no correlacionados***, como calcular áreas, tangentes, longitudes de curvas y máximos y mínimos de funciones. La obra de Newton *De Methodis et Fluxionum* fue escrita en 1671, si bien no fue publicada hasta que en 1736 John Colson hizo la traducción al inglés.


Newton
1642 - 1727

Tras la peste se reabrió la Universidad de Cambridge (1667) y Newton recibió una beca en 1669, año en el que Barrow intentó que los descubrimientos de Newton fuesen universalmente conocidos. Barrow dimitió de la cátedra Lucasiana en 1669 para dedicarse al cultivo de la espiritualidad, y consiguió que le sustituyese Newton, que sólo tenía 27 años.

Las mayores aportaciones de Newton fueron sus grandes descubrimientos en Física y en Mecánica Celeste que culminaron con la teoría de la gravitación universal. En 1666 Newton tenía una primera versión de sus tres leyes de dinámica y había obtenido la ley de la fuerza centrífuga de un cuerpo moviéndose uniformemente en una circunferencia, lo que le permitió imaginar que la fuerza de gravedad de la Tierra equilibraba la fuerza centrífuga de la Luna. Esta idea y la tercera ley de Kepler del movimiento planetario le permitieron deducir la ley de atracción de dos masas ($F=GMm/r^2$).

Una discusión científica entre Edmond Halley, Robert Hooke y Sir Christopher Wren sobre el movimiento de un cometa[8] motivó una pregunta de Halley a Newton, quien dio respuesta inmediata de que la trayectoria del cometa sería una elipse.

De nuevo Halley interpeló a Newton cómo deducía que el cometa seguiría órbita elíptica y Newton respondió que "*por que lo había calculado*". Halley, impresionado por la respuesta y por la incapacidad de Newton de encontrar sus cálculos, le convenció para que escribiese un tratado sobre su nueva concepción de la Física y su aplicación a la Astronomía. En 1687, Newton publicaba su *Philosophiae naturalis principia mathematica* o *Principia*, como se la conoce generalmente, redactado en algo menos de un año de dedicación absoluta.

El *Principia* se reconoce como el mejor libro científico jamás escrito, que no hubiese podido nacer sin su anterior descubrimiento del cálculo infinitesimal y ***la confianza de Newton en la matemática como instrumento de investigación de la naturaleza y de expresión de sus leyes***.

Newton no usó el Cálculo Infinitesimal en sus "*Principia*". Cosa lógica porque quería que lo entendiesen y no iba a escribir una teoría nueva en una matemática también nueva y desconocida. Por eso el libro es difícil de leer para nosotros que estamos acostumbrados al cálculo integral y diferencial, en lugar de las demostraciones de Newton al modo geométrico de Euclides[9].

La influencia de "Los Elementos" de Euclides en "Principia" no es sólo en la forma, pues la estructuración del "Principia" es al modo matemático de "Los Elementos" con axiomas o postulados de los que se deducen las leyes o teoremas que describen el mundo físico. Gracias a la estructura euclídea y a su ley de atracción universal ***explicó un gran conjunto de fenómenos previamente no relacionados***, como los movimientos de planetas y satélites, las órbitas excéntricas de los cometas, las mareas y sus variaciones, la precesión del eje de la Tierra, el

---

[8] Halley dudaba de que los cometas tuviesen movimiento rectilíneo, pensando que el cometa que habían observado era el mismo visto por Kepler unos 70 años antes.

[9] Observación comunicada por el Presidente de la Real Academia de Ciencias de Madrid, Excmo. Sr. D. Carlos Sánchez del Río.

movimiento de cuerpos en caída libre, en medios resistentes y no resistentes, de proyectiles y de péndulos.

Conclusiones

Parece innegable que Los Elementos han sido un factor significativo en muchos descubrimientos y sueños científicos.

No sería aventurado suponer que el espíritu de Los Elementos estuvo junto a la idea medieval de encontrar una *Característica Universal* que permitiese la deducción absoluta y el captar cualquier esencia. Este deseo lo resucitó Leibniz en 1666 con su trabajo *Disertación sobre el arte de la Combinatoria*, intentando reducir todos los razonamentos y descubrimientos a una combinación de elementos básicos , como números, letras, sonidos y colores. Leibniz quería proporcionar un lenguaje simbólico al que se pudiesen trasladar todos los procesos del razonamiento para garantizar la corrección en la argumentación.


Leibniz
1646 - 1716

Se dice que los matemáticos, se declaren o no platónicos, casi siempre trabajan como si lo fuesen. El austriaco Kurt Gödel (1906 -1978), a quien debemos el teorema de incompletitud de la aritmética, decía que su platonismo le ayudó mucho en sus descubrimientos.

Me atrevería a decir que los científicos, hayan leído o no Los Elementos de Euclides, trabajan como si fuesen sus discípulos, pues los mensajes de Los Elementos conforman una parte de lo que llamamos mentalidad científica, cuyo rostro será más humano si no olvida que nació de la fusión de aportaciones orientales y occidentales.

He intentado justificar que Euclides fue mucho más que un gran recopilador, pues le debemos la formalización en “Los Elementos” de un método científico que seguimos utilizando, y al que se debe, en palabras y sentimiento del poeta Paul Verlaine, que las Matemáticas sea la más bella de las Ciencias.

BIBLIOGRAFÍA

1. A. Aaboe and J.L. Berggren, Didactical and other remarks on some theorems of Archimedes and infinitesimals, Centaurus 38 (4) (1996), 295 – 316.
2. E.N. da C. Andrade, Newton and the science of his age, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 181 (1943), 227 – 243.
3. R.C. Archibald, The first translation of Euclid's elements into English and its source, Amer. Math. Monthly 57 (1950), 443 – 452.
4. V.I. Arnol'd and V.A. Vasil'ev, Newton's "Principia" read 300 years later, Notices Amer. Math. Soc. 36 (9) (1989), 1148 – 1154.
5. G. Arrighi, Notes on Euclid's "Elements", Proceedings of the Study Meeting in Memory of Giuseppe Gemignani (Modena, 1995), 87 – 91.
6. B. Artmann, Euclid's "Elements" and its prehistory, On Mathematics (Edmonton, AB, 1992), 1 – 47.
7. A. Lo Bello, Descartes and the philosophy of mathematics, The Mathematical Intelligencer 13 (1991), 35 – 39.
8. J.L. Berggren, Spurious theorems in Archimedes' Equilibrium of planes. Book I, Arch. History Exact Sci. 16 (2) (1976/77), 87 – 103.
9. J.L. Berggren, A lacuna in Book T of Archimedes' "Sphere and cylinder", Historia Math. 4 (1977), 1 – 5.
10. M.G. Beumer, Archimedes and the trisection of the angle, Nieuw Tijdschr. Wiskunde 33 (1946), 281 – 287.
11. J. Blaquier, Sir Isaac Newton: the man and the mathematician (Spanish), Anales Acad. Nac. Ci. Ex. Fis. Nat. Buenos Aires 12 (1947), 9 – 32.
12. C.B. Boyer, Historia de la Matemática, Alianza Editorial S.A., 1986.
13. W.J. Broad, Sir Isaac Newton: mad as a hatter, Science 213 (4514)(1981), 1341 – 1344.
14. R.W. Brumbaugh, The philosophers of Greece (Albany, New York, 1981).
15. N. Bourbaki. Elementos de la Historia de las Matemáticas. Alianza Universidad, 1976
16. J.W. Dawson, the papers of Kurt Gödel, Historia Mathematica 13 (3) (1986), 277.
17. R. Descartes, Discurso del Método. Alianza Editorial, 1981.
18. J. Dieudonné. *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Alianza Editorial, 1989
19. E.J. Dijksterhuis, Die Integrationsmethoden von Archimedes, Nordisk Mat. Tidskr. 2 (1954), 5 – 23.
20. C. Dilworth, Boyle, Hooke and Newton: some aspects of scientific collaboration, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Sci. Fis. Natur. (5) 9 (1985), 329 – 331.
21. R. Dimitri'c, Sir Isaac Newton, Math. Intelligencer 13 (1) (1991), 61 – 65.
22. A.G. Drachmann, Archimedes and the science of physics, Centaurus 12 (1967/1968), 1- 11.
23. H. Erlichson, How Newton went from a mathematical model to a physical model for the problem of a first resistive force, Centaurus 34 (3) (1991), 272 – 283.
24. M. Feingold, Newton, Leibniz and Barrow too: an attempt at a reinterpretation, Isis 84 (2) (1993), 310 – 338.
25. E.G. Forbes, Newton's science and the Newtonian philosophy, Vistas Astronom. 22 (4) (1978), 413 – 418.
26. D.H. Fowler, Investigating Euclid's "Elements", British J. Philos. Sci. 34 (1983), 57 – 70.
27. D.H. Fowler, The mathematics of Plato's academy: a new reconstruction (Oxford U.P. 1987)
28. D.H. Fowler, An invitation to read Book X of Euclid's "Elements", Historia Math. 19 (3) (1992), 233 – 264.
29. F. De Gant, the mathematical style of Newton's "Principia", Mathesis 6 (2) (1990), 163 – 189.
30. García Barreno, Pedro (dir.): *La Ciencia en tus Manos*. Espasa Fórum. Espasa Calpe, 2000.
31. T.L. Heath, A history of Greek mathematics II (Oxford U.P. 1931)
32. M.D. Hendy, Euclid and the fundamental theorem of arithmetic, Historia Math. 2 (1975), 189 – 192.
33. J. Itard, Quelques remarques sur les méthodes infinitesimales chez Euclide et Archimède, Rev. Hist. Sci. Appl. 3 (1950), 210 – 213.
34. C.V. Jones, La influencia de Aristóteles en los fundamentos de Los Elementos de Euclides. Mathesis 3 (4) (1987), 375 – 387.
35. P. Kitcher, Fluxions, limits and infinite littlenesse: A study of Newton's presentation of the calculus, Isis 64 (221)(1973), 33 – 49.
36. M. Kline. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad 1992
37. W.R. Knorr, Archimedes and the measurement of the circle: a new interpretation, Arch. History Exact Sci. 15 (2) (1975/76), 115 – 140.
38. W.R. Knorr, Euclid's tenth book: an analytic survey, Historia Sci. 29 (1985), 17 – 35.

39. L.H. Lange, Hommage à Archimède, Fibonacci Quart. 19 (3) (1981), 214 – 219.
40. F. Le Lionnais, Las grandes corrientes del pensamiento matemático, (Eudeba., Buenos Aires, 1962)
41. F. Lleras, El teorema de Pitágoras. Mat. Ensañanza Univ. 19 (1981), 3-12
42. E.S. Loomis, The Pythagorean Proposition. Impresión privada, Edwards Brothers, 1940. Distribuido por The National Council of Teachers of Mathematics, Washington D.C.
43. D.E. Loomis, Euclid: rhetoric in mathematics, Philos. Math. (2) 5 (1-2)(1990), 56 – 72.
44. D. Maravall, Filosofía de las matemáticas. Dossat 1961.
45. D. Maravall, Teoría de la Investigación Matemática. Dossat 1966.
46. D. Maravall, Didáctica y Dialéctica Matemáticas. Dossat, 1969.
47. D. Maravall, Grandes problemas de la Filosofía Científica. Editora Nacional, 1973.
48. D. Maravall, Introducción a la investigación en Física y Matemáticas. Empeño 14, 1981.
49. A.I. Markusevic, On the classification of irrationalities in Book X of Euclid's "Elements", Trudy Sem. MGU Istor. Mat. Istor.-Mat. Issledov. (1) (1948), 329-342.
50. I. Mueller, Euclid's "Elements" and the axiomatic method, British J. Philos. Sci. 20 (1969), 289 – 309.
51. I. Mueller, Sur les principes des mathématiques chez Aristote et Euclide. Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique (Paris, 1991), 101-113.
52. T. Murata, A tentative reconstruction of the formation process of Book XIII of Euclid's "Elements", Comment. Math. Univ. St. Paul. 38(1)(1989), 101-127.
53. T. Murata, Quelques remarques sur le Livre X des "Elements" d'Euclide, Historia Sci.(2) 2(1) (1992), 51-60.
54. C. Pereira da Silva, On Archimedes of Syracuse, Bol. Soc. Paran. Mat. (2) 8 (1) (1987), 51 – 68.
55. B. Russell, Historia de la filosofía occidental (Colección Austral, Madrid, segunda edición, 1997)
56. B. Russell and A. Whitehead, Principia Matemática. Cambridge University Press, 1925.
57. K. Saito, Duplicate ratio in Book VI of Euclid's "Elements", Historia Sci. (2) 3 (2) (1993), 115 – 135.
58. T. Sato, Archimedes' "On the measurement of a circle", Proposition 1: an attempt at reconstruction, Japan Stud. Hist. Sci. 18 (1979), 83 – 99.
59. J.J. Schäffer, La personalidad científica de Arquimedes, Fac. Ingen. Agrimens. Montevideo. Publ. Didact. Inst. Mat. Estadist. 1 (1958), 57 - 93.
60. W. Theisen, Euclid, relativity, and sailing, Historia Math. 11 (1) (1984), 81 – 85.
61. G. Toussaint, Una nueva visión de la segunda proposición de Euclides, Mathesis 9 (3) (1993), 265 – 294.
62. D.T. Whiteside, The mathematical principles underlying Newton's Principia, Journal for the history of Astronomy 1 (1970), 118 – 119.
63. D.T. Whiteside, Newton the mathematician, Contemporary Newtonian research (Dordrecht, Boston, 1982), 109 –127.
64. D.T. Whiteside, The mathematical principles underlying Newton's "Principia mathematica", J. Hist. Astronom 1(2) (1970), 116 – 138.