Cálculo de diferencias

por

JULIO REY PASTOR

CAPÍTULO I

(Continuación.)

4. *Funciones exponencial-circulares.*

Las funciones sen x y cos x están caracterizadas por las ecuaciones:

$$u^1 = \alpha u + \beta v, \qquad v^1 = \alpha v - \beta u \tag{24}$$

y estas mismas, donde los índices representan diferencias, definen las funciones correlativas. Sin entrar ahora a deducir la solución general, se comprueba inmediatamente que las satisfacen las expresiones:

$$u = e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx, \qquad v = e^{ax} \cdot \cos bx$$

siendo $a = \alpha$, $b = \beta$ para las ecuaciones diferenciales, y siendo en cambio

$$1 + \alpha = e^{a} \cdot \cos b, \qquad \beta = e^{a} \cdot \operatorname{sen} b$$

para las ecuaciones en diferencias.

Las derivadas y diferencias de estos dos pares de funciones correlativas están dadas por las expresiones anteriores perfectamente correlativas; pero no lo son en cambio de sí mismas sen bx y cos bx, pues al caso particular $a = 0$ corresponde la función circular-exponencial de parámetros ligados por la condición $(1 + \alpha)^2 + \beta^2 = 1$.

Las diferencias de las funciones circulares sen $(bx + c)$, cos $(bx + c)$, pueden obtenerse también con regla parecida a la de derivación, pero multiplicando por el factor constante $2 \operatorname{sen} \frac{b}{2}$ e incrementando x en $\frac{1}{2}$.

Véase la tabla de diferencias de varias funciones que incluiremos después.

§ 5. Funciones exponenciales y logarítmicas

1. *La función exponencial.*

Es correlativa de sí misma la función $p \cdot a^{u(x)}$, pues su derivada y su diferencia se deducen de ella multiplicándola por una expresión, que en un caso es $\mathrm{l}a \cdot \mathrm{D}u$ y en el otro es $a^{\Delta u} - 1$.

En particular, son correlativas las funciones e^x y 2^x, pues la derivada de la primera es ella misma y lo mismo sucede a la diferencia de la segunda.

La subtangente en la gráfica de e^x y la subcuerda en la gráfica de 2^x son constantes e iguales a 1, es decir, la tangente en cada punto, o la cuerda que lo une con el siguiente, cortan al eje de las x en el punto de abscisa inferior en 1.

Veremos que ambas funciones (que llamaremos exponenciales *naturales)* se comportan de modo perfectamente correlativo en sus desarrollos en serie, etc.

2. *Las funciones* $\mathrm{l}x$ *y* $\mathrm{h}x$.

Así como la función $\mathrm{l}x$ se puede introducir mediante la integral de $1/x$, correlativamente se puede definir una función, que designamos por $\mathrm{h}x$, como suma de fracciones $1/x$; pero tal definición sólo serviría para valores naturales de x. Daremos una definición general que vale también para valores cualesquiera, reales o complejos (con excepción de los enteros negativos), y que es la siguiente:

$$\mathrm{h}x = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1}\right)\right] \quad [1]$$

Para x natural: $x = m$, resulta, reduciendo las fracciones de denominadores m a n y pasando al límite:

$$\mathrm{h}m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{m-1} \quad [2]$$

Tomando logaritmos en la expresión de Gauss que define la función $\Gamma(x)$ y recordando la definición de la constante de Euler: $\gamma = 0{,}577215\ldots$ (*) resulta después de tomar logaritmos y derivar:

$$\mathrm{D}\,\mathrm{l}\,\Gamma(x) = \mathrm{h}x - \gamma.$$

(*) *Análisis algebraico,* 2.ª ed. pág. 392.

Esta derivada logarítmica, o sea $\Gamma'(x) : \Gamma(x)$ suele designarse por la letra Ψ, de modo que entre ambas funciones existe la relación simplicísima:

$$\mathrm{h}x = \Psi(x) + \gamma; \tag{3}$$

pero usaremos la función $\mathrm{h}x$, que es la correlativa de $\mathrm{l}x$.

Introduciendo la constante de Euler, resulta la nueva expresión:

$$\mathrm{h}x = -\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1} - \mathrm{l}n \right) + \gamma \tag{4}$$

Evidentemente, para valores reales de x desde 0 a ∞ la función $\mathrm{h}x$ es creciente desde $-\infty$ a $-\infty$.

3. *Las funciones* $\mathrm{h}^{\mathrm{m}} x$.

Puesto que $\Delta\, \mathrm{h}x = \frac{1}{x}$, si derivamos m veces resulta:

$$\Delta\, \mathrm{h}^{m} x = (-1)^{m} \frac{m!}{x^{m+1}} \quad \text{y} \quad \Delta\, \mathrm{h}^{m}(x+a) = (-1)^{m} \frac{m!}{(x+a)^{m+1}} \tag{5}$$

De estas funciones $\mathrm{h}^{m}(x) = \Psi^{m}(x)$, la $\Psi'(x)$ fué estudiada por Gauss, quien la designaba por $\chi(x)$; y todas ellas son instrumento necesario en Cálculo de diferencias, como veremos.

El desarrollo de $\chi(x)$ resulta inmediatamente del de $\mathrm{h}(x)$ y es:

$$\chi(x) = \mathrm{h}'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots \tag{6}$$

y en general:

$$\mathrm{h}^{m}(x) = (-1)^{m-1} m! \left[\frac{1}{x^{m+1}} + \frac{1}{(x+1)^{m+1}} + \frac{1}{(x+2)^{m+1}} + \cdots \right] \tag{7}$$

siendo todos válidos para cualquier valor no entero negativo de x.

§ 6. Derivadas y diferencias de productos y determinantes.

1. *Derivadas y diferencias de productos.*

La diferencia

$$\Delta\, u.v.w. = u\,(x+1)\; v\,(x+1)\; w\,(x+1) - u\,(x)\; v\,(x)\; w\,(x)$$

se calcula cómodamente incrementando sucesivamente la variable en una, dos, tres funciones, es decir, sumando y restando los productos en que sólo está incrementada una o dos funciones, y así resulta:

$$\Delta\, uvw = u^1\,(x)\; v\,(x+1)\; w\,(x+1) + u\,(x)\; v^1\,(x)\; w\,(x+1) +$$
$$+\; u\,(x)\; v\,(x)\; w^1\,(x).$$

La diferencia de un producto es la suma de los productos obtenidos incrementando cada función y la variable en las que le siguen.

Cuando el incremento se hace infinitésimo, resulta la regla usual de derivación.

Otras veces puede ser más cómoda esta otra regla que resulta inmediatamente desarrollando la expresión:

$$\Delta\, uvw = (u + u^1)\;(v + v^1)\;(w + w^1) - uvw.$$

La diferencia de un producto es la suma de los productos obtenidos incrementando de todos los modos posibles los factores.

Por ejemplo:

$$\Delta\, uvw = u^1vw + uv^1w + uvw^1 + uv^1w^1 + u^1vw^1 + u^1v^1w + u^1v^1w^1.$$

Para incremento infinitésimo, únicamente quedan los términos en que está incrementada una sola función, resultando como límite la derivada.

2. *Derivada y diferencia de un determinante.*

La diferencia resulta de dos modos distintos, completamente análogos a los que se han aplicado en el párrafo anterior.

Si se incrementa la variable en una columna o en una fila, después en dos, luego en tres, etc., resulta:

$$\Delta \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1{}^1(x) & u_2{}^1(x) & u_3{}^1(x) \\ v_1(x+1) & v_2(x+1) & v_3(x+1) \\ w_1(x+1) & w_2(x+1) & w_3(x+1) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ v_1{}^1(x) & v_2{}^1(x) & v_3{}^1(x) \\ w_1(x+1) & w_2(x+1) & w_3(x+1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) \\ w_1{}^1(x) & w_2{}^1(x) & w_3{}^1(x) \end{vmatrix}$$

y en general: *La diferencia de un determinante es la suma de los determinantes obtenidos incrementando una fila y las variables de las filas siguientes.*

O bien, si en vez de $u(x+1)$ se pone $u + u^1$, y se descompone el determinante en suma de determinantes de elementos monomios, resulta:

La diferencia de un determinante es la suma de los determinantes obtenidos incrementando una, dos,... filas de todos los modos posibles.

Reglas análogas valen para las columnas.

Ejemplo:

$$\Delta \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1{}^1 & u_2{}^1 & u_3{}^1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1{}^1 & v_2{}^1 & v_3{}^1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1{}^1 & w_2{}^1 & w_3{}^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1{}^1 & v_2{}^1 & v_3{}^1 \\ w_1{}^1 & w_2{}^1 & w_1{}^1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} u_1{}^1 & u_2{}^1 & u_3{}^1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1{}^1 & w_2{}^1 & w_3{}^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1{}^1 & u_2{}^1 & u_3{}^1 \\ v_1{}^1 & v_2{}^1 & v_3{}^1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1{}^1 & u_2{}^1 & u_3{}^1 \\ v_1{}^1 & v_2{}^1 & v_3{}^1 \\ w_1{}^1 & w_2{}^1 & w_3{}^1 \end{vmatrix}$$

3. *Derivadas y diferencias sucesivas de un producto.*

Aplicando la primera de las reglas para incrementar un producto, resulta:

$$\Delta\, uv = uv^1 + u^1 v,$$

y aplicada reiteradamente, resulta la fórmula general:

$$\Delta^n uv = u \cdot v^n + \binom{n}{1} u^1 \cdot v_1{}^{n-1} + \binom{n}{2} u^2 \cdot v_2{}^{n-1} + \cdots + u^n v_n$$

conviniendo en poner un subíndice 1 cuando la variable está incrementada en 1, y en general n, si la variable está incrementada en n.

Aplicando la segunda regla dada en el párrafo anterior (1) se obtiene otra expresión para la diferencia n-sima de un producto, que el lector puede deducir como ejercicio, y lo mismo las correspondientes a la diferencia n-sima de un producto de cualquier número de factores y de un determinante, resultando expresiones simbólicas análogas al desarrollo de la potencia de un polinomio, que no interesan para nuestro plan.

Como límites de todas ellas resultan las conocidas reglas de derivación de productos y determinantes.

§ 7. Tabla de diferencias

Para los desarrollos sucesivos es útil una tabla de las funciones de uso más frecuente, de las que se deducen muchas otras sin dificultad.

Funciones		Diferencias	
$x^{(m}$	(m número real o complejo)	$mx^{(m-1}$	[1
$\binom{x}{m} = \binom{x}{x-m}$	»	$\binom{x}{m-1} = \binom{x}{x-m+1}$	[2
$(-x)^{(-m}$	»	$m(-x-1)^{(-m-1}$	[3]
$\frac{1}{x^{(m}}$	»	$\frac{-m}{(x+1)^{(m+1}}$	[4]
$\frac{1}{(-x)^{(m}}$	»	$\frac{m}{(-x)^{(m+1}}$	[5]
$x^{(m)} = x(x+1)\cdots(x+m-1)$		$m\frac{x^{(m)}}{x}$	[6]
a^x		$a^x(a-1)$	[7]
$\frac{a^x}{x}$		$a^x(ax-x-1):x^{(2)}$	[8]
$a^{(x}$		$a^{(x}\cdot(a-x-1)$	[9]
$\frac{1}{a^{(x}}$		$a^{(x}\frac{1-a+x}{a-x}$	[10]
$a^{(x)} = a(a+1)\cdots(a+x-1)$		$a^{(x)}(a+x-1)$	[11]

$\mathrm{l}\,(x+a)$	$\mathrm{l}\,\dfrac{x+a+1}{x+a}$	[12]
$\mathrm{h}\,(x+a)$	$\dfrac{1}{x+a}$	[13]
$\operatorname{sen}\,(a\,x+b)$	$2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\,.\,\cos\left[a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+b\right]$	[14]
$\cos\,(a\,x+b)$	$-2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\operatorname{sen}\left[a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+b\right]$	[15]
$\operatorname{tg}\,(ax+b)$	$\operatorname{sen} a\cdot\sec\,(a\,x+b)\cdot\sec\,(a\,\overline{x+1}+b)$ $=\operatorname{tg} a\cdot\left[1+\operatorname{tg}\,(a\,x+1)\operatorname{tg}\,(a\,\overline{x+1}+b)\right]$	[16]
$\operatorname{ctg}\,(a\,x+b)$	$-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{cosec}\,(a\,x+b)\cdot\operatorname{cosec}\,(a\,\overline{x+1}+b)$ $=-\operatorname{tg} a\left[1+\operatorname{ctg}\,(a\,x+b)\cdot\operatorname{ctg}\,(a\,\overline{x+1}+b)\right]$	[17]
$\operatorname{arctg}\,a\,\dfrac{x+b}{x+c}$	$\operatorname{arctg}\dfrac{a\,(c-b)}{\mathrm{A}\,x^2+\mathrm{B}\,x+\mathrm{C}}$	[18]
$\mathrm{A}=1+a^2,\quad \mathrm{B}=2\,c+1+a^2+2\,a^2\,b,\quad \mathrm{C}=c\,(c+1)+a^2\,b\,(b+1)$		
$c^x\operatorname{sen}\,(a\,x+b)$	$2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\cdot c^x\cos\,(a\,\overline{x+\tfrac{1}{2}}+b)+$ $+\,c^x\,(c-1)\operatorname{sen}\,(ax+b)$	[19]
$c^x\cos\,(a\,x+b)$	$-2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\cdot c^x\cdot\operatorname{sen}\,(a\,\overline{x+\tfrac{1}{2}}+b)+$ $+\,c^x\,(c-1)\cos\,(ax+b)$	[20]
$\operatorname{ctg} 2^x\,a$	$-\operatorname{cosec} 2^{x+1}\,a$	[21]
$2^{-x}\operatorname{ctg} 2^{-x}a$	$2^{-x}.\operatorname{tg} 2^{-x}\,a$	[22]
$\left(2^x\operatorname{sen} 2^{-x}\,a\right)^2$	$4^{x+1}.\operatorname{sen}^4 2^{-x-1}\,a$	[23]
$\left(2^{-x}\operatorname{cosec} 2^{-x}\,a\right)^2$	$-4^{-x-1}.\sec^{-2} 2^{-x-1}\,a$	[24]
$(-3)^{-x}\cos 3^x\,a$	$(-3)^{-x-1}\,4\cos^3 3^x\,a$	[25]
$\Gamma\,(x+a)$	$y\cdot(x+a-1)$	[26]

$(x+a)\,!$	$y \cdot (x+a)$	[27]
$\Gamma(-x+a)$	$-y \cdot \dfrac{x-a+2}{x-a+1}$	[28]
$(-x+a)\,!$	$-y \cdot \dfrac{x-a+1}{x-a}$	[29]
$\Gamma(2x)$	$y \cdot (4x^2+2x-1)$	[30]
$\Gamma(nx)$	$y \cdot \left[nx^{(n)}-1\right]$	[31]
$c^{x+a}(x+b)\,!$	$y \cdot (cx+bc+c-1)$	[32]
$(\mathrm{l}x+a)\,!$	$\mathrm{l}(x+a-1)$	[33]
$\mathrm{l}\,\Gamma(x+a)$	$\mathrm{l}(x+a)$	[34]
$\mathrm{l}(-x+a)!$	$-\mathrm{l}(-x+a)$	[35]
$\mathrm{l}\,\Gamma(-x+a)$	$-\mathrm{l}(-x+a-1)$	[36]
$c^x\,\Pi\,\Gamma(x-a_i)$	$y \cdot [\Pi(x-a_i)-1]$	[37]
$1:\Pi\,\Gamma(x-a_i)$	$[\Pi(x-a_i)^{-1}-1]$	[38]