

LECCIONES PITAGÓRICAS PARA EL SIGLO XXI

MIGUEL DE GUZMÁN
Real Academia de Ciencias

Con el pitagorismo, en el siglo VI a. C., nació la matemática tal como hoy la concebimos, como una ciencia deductiva, paradigma de todas las otras ciencias y, al mismo tiempo, instrumento esencial para el desarrollo de todas ellas. Pero el pitagorismo primitivo no concibió el pensamiento matemático tan sólo como una ciencia llena de armonía y belleza en sí misma y un instrumento para mejor explorar e interpretar la propia armonía del Universo, sino como una escala para ascender hacia los orígenes divinos del Universo o, tal como afirmaban los propios pitagóricos, para profundizar «en las raíces y fuentes de la naturaleza». De esta forma se puede concluir que los pitagóricos constituyeron lo que al tiempo se puede considerar como «una comunidad científica y hermandad religiosa» (B. van der Waerden), cuya pervivencia como grupo organizado duró muchos siglos y cuya influencia fue decisiva para el desarrollo de la cosmovisión científica predominante en la cultura occidental. A lo largo de los siglos de desarrollo de la ciencia y de la matemática, y en nuestros mismos días, la impronta del pitagorismo ha estado siempre presente de modo implícito en la comunidad científica y también muy explícitamente en miembros destacados de ella. En este artículo trataremos de recoger algunas de las lecciones que el espíritu del pitagorismo legó a la matemática de todos los tiempos y de examinar su vigencia al proyectarlas hacia el futuro de nuestra ciencia. Para ello intentaremos primero desentrañar algunos de los aspectos más importantes del pitagorismo que han conformado nuestra cultura occidental, inicialmente sobre todo a través de Platón, el gran transmisor de muchas de las ideas y actitudes pitagóricas. Parte de las ideas aquí recogidas han sido expuestas más ampliamente en un trabajo dedicado a los pitagóricos que fue publicado por la Real Academia hace unos años. En segundo lugar examinaremos los rastros del pitagorismo presentes en algunos de los momentos más trascendentales para la evolución de la ciencia y de la matemática, tales como el Renacimiento y el siglo XVII. Finalmente exploraremos las consecuencias y retos que esta actitud entraña para los diferentes aspectos de nuestro quehacer matemático en sus distintos aspectos.

TRES AFIRMACIONES SORPRENDENTES

Para quien está acostumbrado a ver la matemática como una mera técnica, más o menos rutinaria, ciertamente útil para muchas actividades relacionadas con las diversas ciencias y tecnologías, pero bastante neutral y apartada del pensamiento humanístico y filosófico, pueden resultar un tanto chocantes los siguientes testimonios de tres eminentes matemáticos bastante cercanos a nosotros en el tiempo.

En 1973, la Academia de Ciencias de Göttingen concedió a I. R. Shafarevich el premio Heinemann por la importancia de su investigación matemática. Con tal motivo, el matemático soviético pronunció un discurso titulado «Sobre ciertas tendencias en el desarrollo de la matemática», publicado en ruso y en alemán en *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Göttingen* (1973, págs. 37-42), y más tarde traducido al inglés en *The Mathematical Intelligencer*. En él, Shafarevich, después de argumentar que el objetivo último que justifica la actividad matemática no puede encontrarse en su mera aplicabilidad, se remonta a los pitagóricos con las siguientes palabras:

La matemática como ciencia nació en el siglo VI a. C. en la comunidad religiosa de los pitagóricos y fue parte de esta religión. Su propósito estaba bien claro. Revelando la armonía del mundo expresada en la armonía de los números, proporcionaba un sendero hacia una unión con lo divino. Fue este objetivo elevado el que en aquel tiempo proporcionó las fuerzas necesarias para un logro científico del que en principio no puede darse parangón. Lo que estaba en juego no era el descubrimiento de un bello teorema ni la creación de una nueva rama de la matemática, sino la creación misma de las matemáticas.

Entonces, casi en el momento de su nacimiento, habían aparecido ya aquellas propiedades de la matemática gracias a las cuales las tendencias humanas generales se manifiestan más claramente que en ninguna otra parte. Esta es precisamente la razón por la que en aquel tiempo las matemáticas sirvieron como modelo para el desarrollo de los principios fundamentales de la ciencia deductiva.

En conclusión, quiero expresar la esperanza de que por esta misma razón la matemática ahora pueda servir como modelo para la solución del problema fundamental de nuestro tiempo: revelar un supremo objetivo y propósito religioso para la actividad cultural humana.

El segundo testimonio proviene de Hermann Weyl (1885-1955), uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, que, aparte de sus muchas contribuciones en importantes temas del análisis matemático, se ocupó con profundo interés y reconocimiento de aspectos filosóficos de la matemática. Su obra más importante en esta dirección es *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences* (Princeton University Press, Princeton, 1949), que es una reelaboración de un tratado escrito en los años veinte en alemán.

En la página 125 de la edición americana, tratando de explicar las raíces profundas del pensamiento matemático, Weyl dice:

El mundo externo como postulado no garantiza que tal mundo vaya a surgir a partir de los fenómenos a través de la acción cognitiva de la razón que trata de crear una concordancia con ellos. Para que esto tuviera lugar sería necesario que el mundo estuviera gobernado por leyes simples elementales. Por lo tanto el proponer el mundo externo como una mera construcción de la razón no explica realmente lo que se pretendería explicar con ello. La cuestión de la realidad del mundo se mezcla inseparablemente con la cuestión relativa a su armonía con las leyes matemáticas. Esto último apunta claramente en otra dirección de transcendencia distinta de la de un mundo transcendente; apunta hacia el origen, más bien que hacia el producto. Así la razón última se encuentra más allá de todo conocimiento, solamente en Dios; emanando de él, la luz de lo consciente, con su propio origen oculto a ello mismo, se acoge a sí misma en autopenetración, dividida y suspendida entre sujeto y objeto, entre significado y ser.

Por otra parte, en 1932 Weyl fue invitado por la Universidad de Yale para impartir las Terry Lectures, uno de los acontecimientos intelectuales que cada año tenían lugar en dicha universidad, en forma de tres conferencias solemnes. El tema elegido por Hermann Weyl fue «El Universo abierto» y la primera de las conferencias llevaba por título *Dios y el Universo*. En ella se puede leer:

Mucha gente piensa que la ciencia moderna está muy apartada de Dios. Yo opino, por el contrario, que es mucho más difícil hoy para la persona interesada aproximarse a Dios a partir de la historia, a partir del aspecto espiritual del mundo y a partir de la experiencia moral. Porque ahí nos encontramos con el sufrimiento y el mal en el mundo, que es difícil de armonizar con un Dios todomisericordioso y todopoderoso. En este campo no hemos logrado aún, evidentemente, levantar el velo con el que nuestra naturaleza humana cubre la esencia de las cosas.

Pero en nuestro conocimiento de la naturaleza física hemos penetrado tan lejos que podemos obtener una visión de la armonía sin manchas que está en congruencia con la razón sublime.

Aquí no hay ni sufrimiento, ni mal, ni deficiencia alguna, sino sólo perfección. Nada nos impide tomar parte como científicos en la adoración cósmica que encontró tan poderosa expresión en el más sublime poema de la lengua alemana, la canción de los arcángeles al comienzo del *Fausto* de Goethe:

«El sol resuena con acorde antiguo
en fraterna unión con las esferas,
y con paso de trueno acompaña
su prescrito viaje.
Su presencia presta su fuerza a los ángeles,
cuando ningún otro puede fortalecerlos;
los excelsos engranajes de la altura
mantienen su señorío como el primer día».

El tercer testimonio proviene de Ludwig Wittgenstein (1889-1951). En la última parte de la famosa obra de su primer periodo de vida filosófica, el *Tractatus Logico-philosophicus* (1921), la parte final que se suele denominar «mística» y que revela lo que para Wittgenstein era el sentido profundo, ético, del *Tractatus*, aparecen las siguientes afirmaciones:

6.52. Percibimos que, incluso aunque todas las posibles preguntas científicas sean contestadas, los problemas referentes a nuestra vida no han sido tocados en absoluto. Es cierto que precisamente entonces no queda ninguna pregunta; y exactamente esto es la respuesta.

6.521. La solución del problema de la vida se caracteriza por la desaparición de este problema (¿no es este el motivo por el que personas para quienes el sentido de la vida resultó claro tras largas dudas no pudieron decir en qué consistía este sentido?).

6.522. Existe ciertamente lo inexpresable. Esto se muestra, es lo místico.

Lo inexpresable, para el Wittgenstein de esa primera época y para el de una época un poco posterior, era lo más importante, como él mismo afirmaba en «*Vermischte Bemerkungen*», un texto publicado en 1931:

Lo inexpresable (aquello que me parece misterioso y no puedo expresar) proporciona tal vez el fondo sobre el que alcanza sentido aquello que pude expresar.

En versión original:

Das Unaussprechbare (das, was mir geheimnisvoll erscheint und ich nicht auszusprechen vermag) gibt vielleicht den Hintergrund, auf dem das, was ich ausprechen konnte, Bedeutung bekommt.

¿Cuál es la explicación de estas afirmaciones, que pueden sonar tan extrañas en boca de los matemáticos? Es evidente que no provienen de individuos aislados del quehacer común de los matemáticos de su tiempo. A mi parecer, estas voces aparecen como una resonancia de algo muy antiguo y permanente en la matemática... y que nos vendría muy bien recordar.

EL PENSAMIENTO PITAGÓRICO

Los orígenes del pitagorismo

El nacimiento y la pervivencia del pitagorismo es uno de los fenómenos más interesantes en la historia de la ciencia y de la cultura en general. Surgió, se desarrolló y se expandió como un modo de vida religioso. Su armazón intelectual estaba basado en la visión del Universo como cosmos, en contraposición al caos, es decir, como un todo ordenado y organizado de acuerdo con leyes asequibles a la razón humana. El mismo impulso religioso conducía hacia la búsqueda y contemplación de la armonía intelectual, implantada en este Universo como paradigma de conducta humana y como camino y método de elevación espiritual, en búsqueda de las raíces y fuentes de la naturaleza.

En nuestra cultura, fuertemente impregnada por el espíritu científico, que acepta esta cosmovisión de fondo como base implícita e indiscutida, transmitida en sus líneas generales a través de los siglos desde las mismas raíces pitagóricas, el brillo de la idea fundamental de la racionalidad del Universo se nos presenta apagado y desgastado por la costumbre. La armonía de las esferas no es para nosotros más que el constante ruido de fondo que escuchamos en nuestro quehacer racional.

Pero el mundo del siglo VI en que a Pitágoras le tocó vivir era muy distinto. Las invasiones persas habían aproximado hacia los griegos las milenarias culturas orientales, con su abigarrado espíritu religioso y su actitud mística y contemplativa, que originaban una especial forma de racionalidad. El espíritu religioso oriental no buscaba, ni busca, el camino hacia la comunión con lo divino a través de la contemplación racional del Universo, sino más bien mediante la negación de la búsqueda misma de la razón, merced a formas de comunicación internas del espíritu. Pero junto con esta vena mística del espíritu, la cultura oriental había realizado admirables conquistas de la razón, plasmadas, por ejemplo, en los desarrollos astronómicos y aritméticos realizados por los babilonios más de un milenio antes de que Pitágoras naciese. Tal vez una de las razones profundas del hondo enraizamiento del movimiento pitagórico en la cultura griega y en su heredera, la cultura occidental en que hoy vivimos, consistió en el acierto de Pitágoras al unificar ambas tendencias, racional y contemplativo-religiosa, dando forma a lo que llegó a ser, mucho más que una escuela de pensamiento, una forma de vida.

Pitágoras

La figura de Pitágoras nos aparece coloreada y fuertemente fabulada por la pluma de sus hagiógrafos tardíos Diógenes Laercio y Porfirio, del siglo III d. C., y Iámblico, del siglo IV. Pero, ya incluso en el siglo V a. C., Heródoto mismo presenta un Pitágoras mítico, confundido con una figura tan fabulosa como Zalmoxis, medio héroe,

medio dios. Y también la figura que dibuja Aristóteles en los fragmentos que se conservan aparece entre las brumas de la leyenda. Es una lástima que la obra que Aristóteles dedicó a los pitagóricos, bajo este título, *oi pythagorikoi*, no haya llegado hasta nosotros, pues sin duda con ella tendríamos una visión mucho más cabal del pitagorismo primitivo, aunque probablemente no de Pitágoras mismo.

Lo que sobre la vida de Pitágoras se sabe con relativa seguridad es lo siguiente. Nació en la isla de Samos, junto a Mileto, en la primera mitad del siglo VI a. C. Fue hijo de Menesarco, tal vez un rico comerciante de Samos. Probablemente viajó a Egipto, Fenicia y Babilonia. Volvió a Samos durante la dictadura de Polícrates (538-522 a. C.). Hacia 529 a. C. viajó al sur de Italia y fundó en Crotona la fraternidad pitagórica. Murió muy anciano en Metaponto.

Se discute sobre los siguientes datos de su vida: año de su nacimiento (600 a. C., según Eratóstenes; 570 a. C., según Aristoxeno); cronología exacta de sus viajes; qué sucedió con él cuando los ciudadanos de Crotona expulsaron a los pitagóricos en 509 a. C.; si murió violentamente o no en Metaponto.

Se pueden distinguir tres etapas en su vida: la primera en el mundo griego, la segunda de viajes a Babilonia y Egipto y la tercera en lo que más tarde se llamó la Magna Grecia (sur de Italia), con un intermedio en Samos entre la segunda y la tercera etapas.

Poco se sabe de las dos primeras. Iámblico cuenta que Pitágoras visitó a Tales en Mileto, lo que cronológicamente es factible y geográficamente muy posible por la proximidad entre Samos y Mileto. También allí pudo conocer al filósofo Anaximandro personalmente. Como su maestro se cita sobre todo a Ferecides de Siros (Aristóteles, Aristoxeno, Dicaearcos) a quien Aristóteles caracteriza como teólogo y taumaturgo.

Sobre los viajes a Oriente de Pitágoras existen muchas leyendas, que sus biógrafos posteriores narran en detalle. Pero el hecho de sus estancias en Egipto y Babilonia aparece ya atestiguado en escritores mucho más antiguos, como Isócrates (siglo IV a. C.), Heródoto (siglo V a. C.) y Aristoxeno (siglo IV a. C.). Por otra parte, el parentesco de muchas de las ideas pitagóricas primitivas, tanto matemáticas y astronómicas como religiosas, delatan claramente el fuerte influjo oriental y egipcio, y se puede pensar con confianza que pertenecen al acervo de enseñanzas iniciales de Pitágoras mismo.

Según algunas tradiciones, al volver Pitágoras a Samos se le pidió que enseñase sus ideas a sus propios conciudadanos. Al parecer les resultó demasiado abstracto y su enseñanza tuvo poco éxito. Esto, junto con la opresión del tirano Polícrates, le debió de conducir a tomar la decisión de emigrar.

En 529 a. C. Pitágoras se trasladó a la polis (ciudad-estado) de Crotona, fundación aquea del siglo VIII a. C., en la parte sur del golfo de Tarento. Las colonias griegas del sur de Italia gozaban entonces de una gran prosperidad,

especialmente Síbaris, famosa en el mundo griego por sus riquezas y su vida lujosa. Crotona era su principal rival y vecina. Allí llegó Pitágoras con un sistema de pensamiento más o menos perfilado después de su larga experiencia por Oriente y Egipto. La ciudad le pidió que expusiera sus ideas y, según la tradición, Pitágoras dirigió por separado cuatro grandes discursos a los jóvenes, el Senado, las mujeres y los niños. El contenido de estos cuatro discursos, tal como ha sido transmitido por diversos conductos, está lleno de recomendaciones morales de gran perfección, fundamentadas especialmente en la necesidad de ajustar la conducta humana a los cánones de armonía y justicia que se derivan de la naturaleza misma de las cosas e ilustradas con elementos específicos de la mitología de los habitantes de Crotona. Como consecuencia de este primer contacto surgió, al parecer, no sólo en Crotona, sino en toda Italia, un gran entusiasmo por Pitágoras.

Durante algún tiempo, muchos historiadores contemporáneos consideraron a los biógrafos posteriores de Pitágoras como poco más que novelistas que pretendían exclusivamente transmitir una imagen edificante del santo patrón del pitagorismo de su tiempo, tanto en su actividad como en su enseñanza religiosa y científica. Hoy existe una cierta tendencia, representada sobre todo por la obra de Van der Waerden *Die Pythagoreer* (1979), que me sirve de pauta principal en mi exposición, a concederles una mayor verosimilitud, teniendo en cuenta que ellos, muy probablemente, pudieron disponer de documentos antiguos, hoy perdidos, testimonios de tradiciones mucho más cercanas a los orígenes del movimiento pitagórico.

La comunidad pitagórica. Generaciones de matemáticos

Los ciudadanos de Crotona propusieron, al parecer, a Pitágoras que continuase su labor de formación moral e intelectual de jóvenes y adultos. Los esfuerzos de Pitágoras se debieron de centrar, en lo que concierne a la formación personal completa, en los jóvenes a quienes encontró más flexibles y con más capacidad de absorber el espíritu pitagórico plenamente. Puesto que su sistema de pensamiento estaba basado en el descubrimiento y contemplación de la armonía del cosmos, y a ello se habría de llegar muy fundamentalmente a través de la introducción en consideraciones científicas, muy difíciles para los más adultos, ocupados en los asuntos de la ciudad, estableció de modo natural dos formas distintas de enseñanza. Así es como explica Iámblico (*Vita Pyth.*, 88) la existencia en la primitiva comunidad pitagórica de dos clases de miembros, los matemáticos (*mathematikoi*, 'concedores'), es decir, los iniciados a quienes Pitágoras comunicaba los conocimientos científicos a su disposición, y los acusmáticos (*akousmatikoi*, 'oidores'), que participaban de los conocimientos y creencias, de los principios morales, ritos y prescripciones específicas de la hermandad, si bien sin conocer en profundidad las razones de su credo y su proceder.

Esta distinción resultó ser de enorme trascendencia en la evolución de la comunidad pitagórica. Los acusmáticos se constituyeron en custodios de las enseñanzas de Pitágoras y su preocupación fue que éstas se conservaran tal como Pitágoras las había transmitido. Los matemáticos se consideraban continuadores más bien del espíritu de Pitágoras, basado en el conocimiento científico y, puesto que es connatural a éste su propia evolución, era claro para ellos que el conjunto de conocimientos de Pitágoras era susceptible de perfeccionamiento. Era natural que esta diversidad de pareceres condujera a la división de la comunidad con la desaparición de Pitágoras y, en efecto, así sucedió.

La distinción entre matemáticos y acusmáticos es transmitida por múltiples canales. Iámblico es quien narra más por extenso la división entre ellos y su narración parece haber sido tomada de la obra perdida de Aristóteles sobre los pitagóricos. Al parecer fue Hipaso el principal representante de los matemáticos. Se debió de ocupar con notable éxito de hacer avanzar los conocimientos matemáticos. A principios del siglo V a. C. (500-480) entró en conflicto con los acusmáticos, ya que fue el primero en ofrecer por escrito al público en general el «secreto de la esfera de los doce pentágonos» (Iámblico, *Vita Pyth.*, 88), y en castigo por ello murió en un naufragio. El «secreto de la esfera de los doce pentágonos» alude a cierta construcción relacionada con el dodecaedro regular que los pitagóricos primitivos deseaban mantener en secreto, como el grueso de su doctrina. En otro lugar, Iámblico (*Vita Pyth.*, 246-247) cuenta que aquél que reveló «la naturaleza del conmensurable y del inconmensurable a quienes no eran dignos de participar de tales conocimientos» fue expulsado de la comunidad. Los pitagóricos le erigieron una tumba como si para ellos ya hubiera muerto. Parece probable que fuera Hipaso mismo el personaje que reveló por primera vez la existencia de longitudes inconmensurables, y precisamente a través de un estudio del pentágono regular. Iámblico acusa a Hipaso de haberse atribuido el mérito de sus descubrimientos, «siendo así que todos proceden de Él», es decir, de Pitágoras. Se puede pensar razonablemente que Hipaso fue un gran matemático que, efectivamente, dio por primera vez con la existencia de longitudes inconmensurables, es decir, tales que una no es un múltiplo de una parte de la otra, dando con ello al traste con la acariciada creencia de los pitagóricos primitivos de que todo debe estar regido por los números enteros y las proporciones entre ellos. La versión que Iámblico cuenta, acusando a Hipaso de plagio, proviene, según la conjetura de Van der Waerden, del círculo de pitagóricos matemáticos anónimos de entre 480-430 a. C., de quienes la tomó Aristóteles. Estos pitagóricos fueron potentes matemáticos con la estrategia común de atribuir a Pitágoras mismo sus descubrimientos.

Sería interesante señalar el modo según el cual Hipaso pudo dar con el número irracional, pero esto nos alejaría demasiado de nuestro tema central.

Así como entre los pitagóricos acusmáticos, como es natural, apenas se pueden distinguir etapas evolutivas, entre los pitagóricos matemáticos que se dedicaron al desarrollo de la ciencia estas etapas se pueden diferenciar con cierta probabilidad. Así, Van der Waerden distingue cinco generaciones en el pitagorismo entre los años 530-360 a. C.:

- 1.^a generación (530-500 a. C.): Pitágoras.
- 2.^a generación (520-480 a. C.): Hipaso de Metaponto, Alcmeon.
- 3.^a generación (480-430 a. C.): Matemáticos anónimos.
- 4.^a generación (440-400 a. C.): Filolao, Teodoro.
- 5.^a generación (400-360 a. C.): Arquitas de Tarento.

Los matemáticos anónimos de la tercera generación debieron de constituir un grupo muy interesante, del que Aristóteles se hace eco con admiración. De ellos habla como de los fundadores de la matemática tal como se cultivaba en su tiempo, una matemática adulta, rigurosa y ampliamente evolucionada. «Estiman mucho la exactitud de la argumentación en las ciencias matemáticas, porque sólo ellas poseen demostraciones», decía Aristóteles (Iámblico, *De communi math. sci.*, 78).

Filolao, de la 4.^a generación, fue de estilo grandilocuente y ampuloso, sin mucho rigor matemático. Su astronomía también carece de rigor científico. Conocía y utilizaba los saberes matemáticos, pero su lógica y su matemática resultan más bien flojas.

Algunos fragmentos de la enseñanza pitagórica

Armonía del cosmos

Pocos han sido los filósofos y muchos menos los científicos que han sabido encarnar sus enseñanzas con elementos sensibles tan acertadamente como Pitágoras. La famosa armonía de las esferas de la enseñanza pitagórica primitiva era mucho más profunda que la mera conjetura de la consonancia de las notas que los astros producen en su movimiento. El elemento fundamental del pensamiento de Pitágoras es la visión del Universo como cosmos, un todo ordenado y armoniosamente conjuntado. El destino del hombre consiste en considerarse a sí mismo como una pieza de este cosmos, descubrir el lugar propio que le está asignado y mantener en sí y en su entorno, en lo que está de su parte, la armonía que es debida de acuerdo con el orden natural de las cosas.

La armonía cósmica entendida en este sentido fue probablemente una audaz conclusión de madurez, a la que Pitágoras llegó a través de la observación de la congruencia de sus consideraciones científicas sobre números, figuras y notas musicales, con las ideas orientales sobre el alma, los astros y la divinidad. Los números constituían el armazón inteligible de las formas en la aritmética figurativa de los pitagóricos, construida por ellos mediante pie-

dras (*psefoi*, 'cálculos'). Al mismo tiempo los números desvelaban las proporciones que regían las consonancias musicales. ¿No era natural ver en el número el principio inteligible a través del cual el cosmos divino gobernado por el espíritu manifestaba al hombre su armonía interna?

Según cuentan Porfirio (*Vita Pyth.*, 30-31) y Iámblico (*Vita Pyth.*, 64-66) en un pasaje que toman de Nicómaco de Gerasa (ca. 50-150 d. C.), quien por su parte parece hacerse eco de fuentes pitagóricas antiguas, Pitágoras «dirigía su oído y su espíritu hacia las sublimes consonancias del cosmos gracias a una inefable capacidad divina difícil de imaginar. Con ello oía y entendía él solo, según explicaba, toda la armonía y el concierto de las esferas y los astros que en él se mueven».

La música era entre los pitagóricos el símbolo de la armonía del cosmos, a la vez que un medio para lograr el equilibrio interno en el espíritu mismo del hombre.

El juramento pitagórico

Bajo diversas formas se ha conservado una breve fórmula pitagórica de difícil interpretación que, según es de suponer, contenía algo muy cercano a la quintaesencia del espíritu pitagórico. En la versión más corriente reza así: «No, por Aquél que ha entregado a nuestras almas la Tetraktis, una fuente que contiene las raíces de la naturaleza eterna».

Al parecer constituye un juramento de secreto sobre el contenido de la enseñanza pitagórica, reservado a miembros de la comunidad exclusivamente. «Aquél», por supuesto, es Pitágoras mismo, a quien los pitagóricos primitivos no osaban nombrar. La Tetraktis, o cuaterna, consiste probablemente en los números 1, 2, 3, 4, que conjuntamente solían representar los pitagóricos en esta forma figurativa:

$$\begin{array}{c} x \\ x \ x \\ x \ x \ x \\ x \ x \ x \ x \end{array}$$

¿En qué sentido la Tetraktis podía ser «fuente de las raíces de la naturaleza eterna»? Según parece, la Tetraktis alude a la iluminación pitagórica inicial y fundamental sobre las proporciones numéricas que rigen las notas musicales consonantes: el tono (1:1), la octava (1:2), la quinta (3:2) y la cuarta (4:3). Más adelante tendremos ocasión de considerar en detalle los experimentos musicales con cuerdas que pusieron de manifiesto tales proporciones. En la experiencia pitagórica esta observación debió de constituir el estímulo decisivo para la extrapolación cuasimística de que el cosmos es de algún modo alcanzable a través del número. Tal vez es en este sentido en el que se exalta la Tetraktis como fuente del conocimiento de las raíces de la armonía de la naturaleza eterna, en el cual se basa la existencia pitagórica.

Se puede uno preguntar: ¿cuál fue el sentido del secreto pitagórico que el juramento solemnemente impone? Entonces, como hoy, el secreto compartido constituía un fuerte vínculo de conexión entre los miembros de una comunidad reducida. La comunidad pitagórica llegó a tener una complicada organización interna, con largos periodos de noviciado, pruebas de silencio y de robustecimiento del espíritu a través de experiencias encaminadas a fomentar la humildad y la asimilación paulatina del espíritu pitagórico. Muchas de las doctrinas esotéricas de los pitagóricos se prestaban, fuera de su contexto integral, a malentendidos que era conveniente evitar. Las mismas enseñanzas matemáticas cobraban, probablemente, un halo especial en el ambiente de los iniciados pitagóricos, constituyendo para ellos un soporte de su camino de vida, con un significado que iba mucho más allá del carácter de mera curiosidad especulativa que podían atribuirles los espectadores externos. Por otra parte, en la vida religiosa de la Grecia contemporánea a Pitágoras abundaban extraordinariamente los misterios o ceremonias secretas de iniciación y purificación progresiva, con la finalidad de provocar en el espíritu del iniciado un estado de veneración, fervor religioso y entusiasmo místico, llevados a cabo en una parte oculta del templo. Los festivales nacionales de Delfos o Eleusis incluían misterios celebrados con genuina exaltación religiosa. Parece muy probable que Pitágoras adoptase, en la tarea de formación de sus adeptos, métodos y técnicas cuya eficacia había constatado mediante la observación.

Este rasgo secretista de la enseñanza pitagórica primitiva fue mitigado más adelante. El *no* rotundo del juramento aparece convertido en *sí* en los *Versos áureos*, una compilación de enseñanzas pitagóricas escrita probablemente en el segundo o tercer siglo después de Cristo, teniendo a la vista fuentes mucho más antiguas, y destinada a expandir la doctrina pitagórica a todos los hombres.

He aquí algunas de sus consideraciones con más probabilidad de pertenecer al pitagorismo primitivo:

1. Honra ante todo a los dioses inmortales, como manda la ley,
2. y observa el juramento. Honra también a los nobles héroes
3. y a los dioses del mundo inferior con las ofrendas prescritas.
9. [...] acostúmbrate a ser señor
10. ante todo de tu vientre, del sueño, de la lascivia y de la ira.
11. Nunca hagas nada vergonzoso ni con otros ni contigo mismo; sobre todo avergüénzate de ti mismo.
17. Hay dolores que llegan a los humanos por designio divino. Por ello
18. cuando la fatalidad te alcance, sopórtala y no la llesves mal.
19. Remédiala, cuanto de tu parte esté, y piensa
20. que el destino al que es bueno no le reserva mucho de ella.

40. No dejes que el sueño suave llegue a tus ojos
41. antes de que hayas repasado en tu mente por tres veces cada una de tus acciones del día.
42. «¿En qué he faltado? ¿Qué he hecho? ¿Qué he omitido?».
43. Comienza desde el principio y recórrelo todo.
44. Si has hecho algo mal, arrepíentete; si has hecho algo bien, alégrate.
46. Esto te conducirá por las huellas de la virtud divina.
47. Sí, por Aquél que ha entregado a nuestra alma la Te-traktis
48. fuente de la naturaleza eterna.

Immortalidad del alma

Porfirio, en su biografía de Pitágoras (*Vita Pyth.*, 19) transmite un testimonio de Dicaíarcos, un alumno de Aristóteles, que resume las enseñanzas de Pitágoras en estos cuatro puntos:

1. El alma es inmortal.
2. Las almas cambian su lugar, pasando de una forma de vida a otra.
3. Todo lo que ha sucedido retorna en ciertos ciclos y no sucede nada realmente nuevo.
4. Hay que considerar todos los seres animados como emparentados entre sí.

La creencia pitagórica del origen divino del alma viene expresada en los *Versos áureos* con las siguientes palabras:

63. Pero tú ten ánimo. De naturaleza divina son los mortales.

Este aspecto de la filosofía pitagórica aparece fuertemente emparentado con la mentalidad del orfismo, un movimiento religioso que, probablemente procedente de Oriente, se instaura en Grecia, empezando por Tracia, en el siglo VI a. C. La antigua Grecia tenía en los libros homéricos un equivalente de las escrituras sagradas de otros pueblos. El pensamiento de un alma inmortal es totalmente ajeno al espíritu griego antiguo. Pero al parecer esta situación cambió radicalmente a partir del siglo VI a. C., muy posiblemente bajo la influencia de multitud de movimientos religiosos que, originarios de Persia, la India y Egipto, se extendieron por el mundo griego. De hecho el panorama de creencias religiosas es totalmente diferente en el siglo IV a. C. El orfismo tenía a Dionisos como dios y a Orfeo como su sacerdote, reuniendo cierto sentido místico con una ascética de purificación. El espíritu humano procede de otro mundo y se encuentra como desterrado en este, encadenado al cuerpo por la sensualidad. Existe un mundo de acá y otro de más allá y la vida debe vivirse como una fuga de lo terreno.

Muy probablemente Pitágoras amalgamó elementos órficos con otros de posible origen persa, como el del eterno retorno que aparece mencionado en el punto 3 de Dicaíarcos, y con sus propias concepciones sobre la constitución del cosmos y sobre el modo concreto de pu-

rificación a través de la contemplación, dando primacía al elemento racional y matemático sobre el poético de aquellas cosmogonías primitivas, para producir una síntesis que resultó profundamente atrayente no sólo para sus contemporáneos, sino para los muchos movimientos de inspiración pitagórica surgidos durante más de diez siglos.

Al parecer, en el modo de vida de los pitagóricos primitivos la metafísica como tal era poco importante. Lo que verdaderamente importaba era la vida pura, concretada en la armonía del alma con el cosmos, que habría de concluir con la liberación del alma del círculo de reencarnaciones. Lo relevante era la elevación del alma al cielo de los bienaventurados tras la muerte.

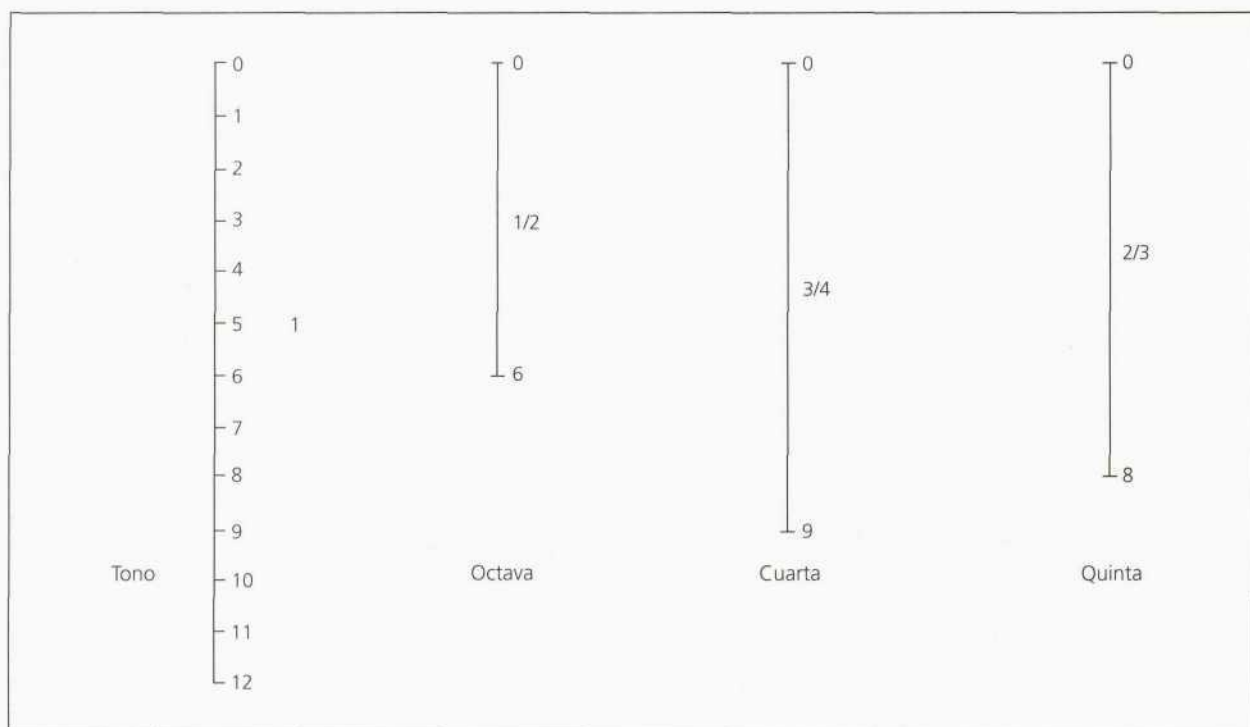
Armonía científica de los pitagóricos

La armonía, como hemos visto anteriormente, está en el corazón mismo del pitagorismo. La música era el método de elevación y purificación del alma y al mismo tiempo objeto de contemplación intelectual que revelaba, con sus congruencias expresables mediante relaciones numéricas, la armonía más profunda del cosmos. La capacidad cuasimágica de la música es elemento heredado por el pitagorismo de las corrientes órficas más primitivas. El análisis científico de los sonidos armónicos es, en cambio, rasgo muy específicamente pitagórico, que casi con toda seguridad se remonta al mismo Pitágoras.

Existen varias versiones sobre el modo concreto mediante el cual Pitágoras llegó a desentrañar las relaciones numéricas entre los sonidos consonantes, es decir, aquellos cuya producción simultánea origina una sensación agradable en nuestro oído: el tono, la octava, la quinta y la cuarta.

Nicomaco de Gerasa, Gaudencio y Boecio hablan de la observación de Pitágoras de los diferentes sonidos producidos en el yunque del herrero por martillos de diferentes pesos. Un martillo cuyo peso era 6 producía el tono; otro con peso 12, la octava; otro con peso 9, la quinta, y otro de peso 8, la cuarta. Pitágoras volvió a casa, colgó tales pesos de cuatro cuerdas iguales y observó que se producían los sonidos consonantes correspondientes. Este es el ejemplo típico de una de esas historias cuya falsedad podría haber comprobado un historiador con sentido crítico con sólo repetir la experiencia. La frecuencia del sonido producido por una cuerda vibrante no está en proporción con la tensión, sino con la raíz cuadrada de la tensión.

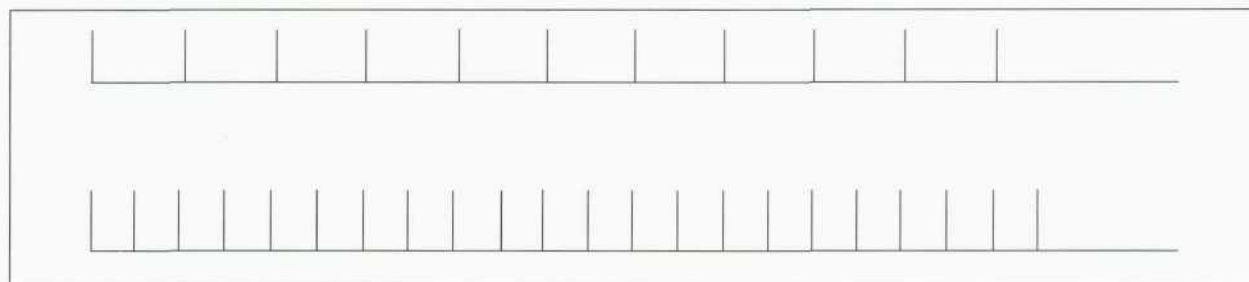
Diógenes Laercio propone a Pitágoras mismo como inventor del *monocorde*, no un instrumento musical, sino más bien un aparato científico para verificar la teoría musical utilizado por los pitagóricos. Gaudencio explica pormenorizadamente el experimento más verosímil con el que Pitágoras pudo comprobar y cuantificar su intuición genial de la conexión de la armonía musical con los números. Pitágoras tensó una cuerda musical que producía un sonido que tomó como fundamental, el tono. Hizo señales en la cuerda, dividiéndola en doce partes iguales. Pisó la cuerda en el 6 y observó que se producía la octava. Pisó luego en el 9 y resultó la cuarta. Al pisar en el 8 obtuvo la quinta. ¡Las fracciones $1/2$, $3/4$ y $2/3$ correspondían a la octava, la cuarta y la quinta! Los sonidos producidos al pisar en otros puntos resultaban discordes o, al menos, no tan acordes como los anteriores. ¡Los números 1, 2, 3, 4, la Tetraktys, determinaban con sus proporciones relativas los sonidos más consonantes!



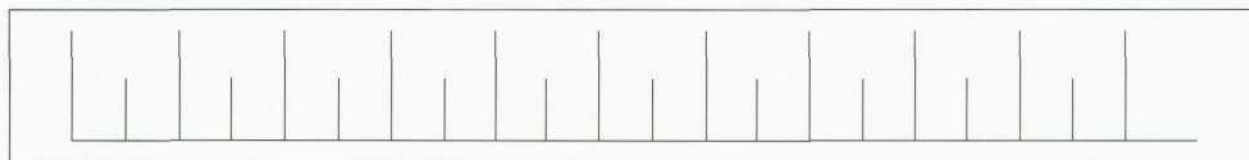
La armonía fue una ocupación constante de la escuela pitagórica en todas las etapas de su evolución. Platón manifestó su descontento con el carácter empírico tanto de la armonía como de la astronomía de los pitagóricos.

De entre los desarrollos ulteriores de la armonía científica de los pitagóricos se puede destacar la explicación, asombrosamente acertada, de la naturaleza del sonido como una sucesión de percusiones en el aire, haciendo depender el tono del número de percusiones que se pro-

ducen por unidad de tiempo, es decir, de la frecuencia. Con ello se explica de modo natural y exacto la producción de sonidos fisiológica y psicológicamente agradables, consonantes, en las cuerdas cuyas longitudes se comportan como los números más sencillos. Las percusiones del aire producidas simultáneamente por una cuerda y la cuerda con la misma tensión, de longitud mitad, tono y octava, llegan al tímpano de una forma representable en el eje del tiempo de la manera siguiente:



Su composición da lugar a una estructura de percusiones como la que sigue:



que es sencilla y previsible, armoniosa para nuestro oído. En cambio la producción de dos sonidos de frecuencias de percusión arbitrarias dará lugar a una estructura un tanto caótica que para nuestro oído resulta opaca, no previsible, en una palabra, disonante. Para mayor información sobre estos problemas profundamente interesantes puede consultarse el artículo «Die Harmonielehre der Pythagoreer», de B. L. van der Waerden.

Vigencia del pitagorismo

La estela del pitagorismo en la historia del pensamiento científico es incomparablemente más brillante y duradera que la de cualquier otro movimiento. La fe pitagórica en la tarea humana de entender el cosmos es la misma que ha inspirado toda la actividad científica a lo largo de más de veinticinco siglos. Es llamativo observar cómo, a través de un periodo tan dilatado, las armonías del cosmos que impresionaron tan hondamente a Pitágoras y a sus discípulos han sido capaces de seguir admirando y atrayendo la capacidad contemplativa de los hombres. Pitágoras se apoyó en el sentimiento religioso de la época para constituir una síntesis científico-religiosa con una gran capacidad de pervivencia.

Platón, con su profundidad filosófica y su incomparable sensibilidad estética, se convirtió en vehículo de trans-

misión de una gran porción del núcleo de pensamiento pitagórico. Platón (ca. 427-347) es en el fondo, a tres siglos de distancia en el tiempo, el gran transmisor del espíritu pitagórico. Gracias a la honda originalidad de su pensamiento y a su capacidad poética para plasmar sus ideas, consiguió que el pensamiento pitagórico calara en nuestra cultura con una intensidad que el tiempo no ha debilitado.

El espíritu pitagórico, incluso con fervores que emulan los de las primitivas comunidades griegas, ha aparecido en momentos y personas que representan verdaderos puntos de cambio de rumbo en la evolución del pensamiento científico.

Galileo (1564-1642) se expresa de esta manera plenamente pitagórica:

El gran libro de la naturaleza permanece siempre abierto ante nuestros ojos y la verdadera filosofía se encuentra escrita en él... Pero no lo podemos leer sin haber aprendido antes el lenguaje y los caracteres en los que está escrito... Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos, y otras figuras geométricas...

Se puede pensar también en Kepler (1564-1630), cuya vida científica está preñada toda ella de pitagorismo, desde los momentos de su *Mysterium Cosmographicum* (1595), con sus ideas sobre la estructura del sistema planetario ba-

sadas en la estructura de los cuerpos platónicos (poliedros regulares), hasta su culminación en *Harmonices Mundi* (1619), con las tres leyes del movimiento de los planetas:

1. La órbita de cada planeta es una elipse con un foco en el Sol.
2. Las áreas barridas por el segmento que va del Sol al planeta en tiempos iguales son iguales.
3. El cuadrado del periodo de cada planeta dividido por el cubo de la longitud del eje de la elipse que recorre es el mismo número para todos los planetas.

Estos hechos enunciados por Kepler fueron los que consagraron la teoría de Newton sobre la gravitación universal, cuando Newton fue capaz de demostrarlos con rigor a través de ella.

Con razón A. N. Whitehead, al observar la influencia de Pitágoras en su obra *Science in the Modern World*, concluye así:

Verdaderamente Pitágoras, con su fundación de la filosofía europea y de la matemática europea, la dotó con la más afortunada de las conjeturas, ¿o acaso fue un resplandor de genio divino que penetró hasta la naturaleza más íntima de las cosas?

UNA RECAPITULACIÓN SOBRE LAS ACTITUDES DE CARÁCTER ÉTICO QUE LA MATEMÁTICA PROMOCIONA

El mensaje profundo del pitagorismo en torno a la interpretación de la naturaleza se puede resumir en la contemplación de la armonía del mundo, de la que se deriva el deber del hombre de contribuir activamente a dicha armonía. De ahí resulta el sentido de su existencia, la observación de su asociación con los otros seres vivos de este mundo. La inteligibilidad del Universo culmina en la consideración de la matemática como método interpretativo de ella, al mismo tiempo que es guía de contemplación y escala hacia la divinidad.

Para concluir, ¿se pueden señalar algunos aspectos más concretos y tangibles de naturaleza ética que sean específicamente estimulados por el quehacer propio de la matemática? A mi parecer, ciertamente sí, y éstos están fundamentados en la raíz misma de la matemática.

La matemática es una exploración de ciertas estructuras omnipresentes y más o menos complejas que se presentan en nuestra realidad y que admiten ese acercamiento racional, manipulable mediante símbolos, que pone en nuestras manos un cierto dominio de la realidad a que se refieren y que llamamos matematización.

La matemática se acerca a la multiplicidad de las cosas y se crea la aritmética, se aproxima a la forma y se origina la geometría, explora el propio símbolo surgido de la mente y nace el álgebra, analiza los cambios y transformaciones en el espacio y en el tiempo y surge el análisis matemático, ...

En este quehacer el cometido de la mente humana consiste en interpretar racionalmente, lo mejor que puede, unas realidades, unos hechos que se le presentan como dados, como previos. Esto constituye una de las experiencias profundas que todo matemático vive en su tarea ordinaria, que consiste en percibir que está siguiendo unas huellas que hasta cierto punto le están guiando en su trabajo.

Este sometimiento a la verdad y a la realidad, que está normalmente tan enraizado en el científico, constituye sin duda uno de los rasgos importantes que deberíamos apreciar y estimular en todos nosotros.

La aceptación gozosa de esta verdad, sea quien sea el que la haya encontrado y contradiga o no nuestras expectativas previas, es otro de los rasgos de generosidad que se dan en el trabajo matemático.

El goce en la contemplación de la verdad y en la participación con otros de la belleza que suele resultar de su contemplación es el premio que el matemático recibe de esa actitud abierta y generosa.

El sentimiento de profunda humildad ante la multitud de verdades aún por descubrir es otra de las actitudes interesantes que la matemática puede estimular. Newton lo expresó en bellas palabras:

No sé lo que la posteridad pensará de mí, pero a mí me parece haber sido solamente como un muchacho jugando a la orilla del mar y divirtiéndose al encontrar de vez en cuando un guijarro más suave o una concha más bonita que de ordinario mientras que el gran océano de la verdad yace sin descubrir ante mí.

El quehacer matemático nos hace sentirnos, más que en ninguna otra ciencia, cercanos a todos nuestros antecesores en las mismas tareas. Los teoremas que fueron alcanzados por los babilonios o por los antiguos griegos siguen siendo tan válidos hoy como entonces. Como decía Hardy son «colegas de otra universidad». El trabajo matemático es tarea común y participada. Newton mismo decía: «Si algo he conseguido, es porque me he encaramado a hombros de gigantes».

La matemática se fundamenta en su mismo comienzo sobre el consenso. La aceptación del consenso es otra de las actitudes éticas que la matemática puede estimular.

La matemática es consenso, es sometimiento a la realidad, pero es también, y de forma muy importante, libertad. Como Georg Cantor, el creador de la teoría de conjuntos afirmaba solemnemente al comienzo del siglo XX, «la esencia de la matemática es la libertad».

De estas consideraciones se deriva un gran reto para nosotros, los matemáticos. ¿Cómo empaparnos de tales actitudes, hacernos conscientes de ellas y tratar de compartirlas con nuestros compañeros, con los más jóvenes? Yo propondría como medios: la consideración de la matemática más allá de la mera técnica, el conocimiento de la historia de la matemática, el conocimiento y lectura de las obras de los grandes matemáticos, la aceptación bien ex-

plícita y consecuente de las responsabilidades que implican el saber y el quehacer matemático ante nosotros mismos, ante los más jóvenes, ante la sociedad en la que vivimos.

BIBLIOGRAFÍA

- SHAFAREVICH, I. R., «Sobre ciertas tendencias en el desarrollo de la matemática» (en ruso), en *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Göttingen*, 1973, págs. 37-42.
- —, «On certain Tendencies in the Development of Mathematics», en *Mathematical Intelligencer*, n.º 3, 1981, págs. 182-184.
- VAN DER WAERDEN, B. L. «Die Harmonielehre der Pythagoreer», en *Hermes*, n.º 78, 1943, pág. 163.
- —, *Die Pythagoreer*, Artemis Verlag, Zurich, 1979.
- WEYL, H., *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*, Princeton University Press, Princeton, 1949, pág. 125.
- —, *The Open Universe* (Terry Lectures 1932), Yale University Press, 1932.
- WHITEHEAD, A. N., *Science in the Modern World*, The Free Press, Nueva York, 1967.
- WITTGENSTEIN, L., *Tractatus Logico-philosophicus*, 1921.
- —, «Vermischte Bemerkungen», en *Werkausgabe Band*, n.º 8, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, pág. 472.