MOMENTOS ESTELARES EN EL DESARROLLO DE LAS MATEMÁTICAS

VICENTE MONTESINOS SANTALUCÍA Y MANUEL VALDIVIA UREÑA
Real Academia de Ciencias

INTRODUCCIÓN

Este breve artículo pretende trazar una línea a lo largo de la historia de las matemáticas que subraye los acontecimientos que han tenido, a nuestro entender, mayor transcendencia en el sentido de haber establecido direcciones de investigación nuevas y modos de pensamiento fructíferos. Una selección se hace necesaria, con lo que, indefectiblemente, el lector detectará omisiones considerables, pues los intentos de totalidad son irreconciliables con la vastedad del tema.

En relación con el inicio de la actividad matemática del ser humano es necesario decir que no disponemos de fuentes precisas. Además, esa misma actividad está presente desde el mismo momento en que hay racionalidad.

LOS ORÍGENES

Entre los hallazgos arqueológicos relacionados con las matemáticas, uno de los más espectaculares quizá sea un hueso encontrado en las orillas del lago Edward, en la República Democrática del Congo, datado entre el 9000 y el 6500 a. C. Posee unas marcas en su asta, que corresponden a un sistema de numeración decimal, a los números primos entre 10 y 20, así como a una tabla de duplicación y a un calendario de fases de la Luna (la interpretación es tentativa). Pero es un objeto (si se confirma la interpretación, de un grado de sofisticación sorprendente) entre miles: pequeñas piedras de colores anudadas a cuerdas, palitos de diferentes longitudes, trazos regulares en las paredes de las cuevas, «pizarras» de arena, primitivos ábacos, sin olvidar al «artilugio» más usual: el cuerpo como instrumento de numeración [1].

Cuando se consultan los libros de historia de las matemáticas, en muchos casos se constata que se desecha toda

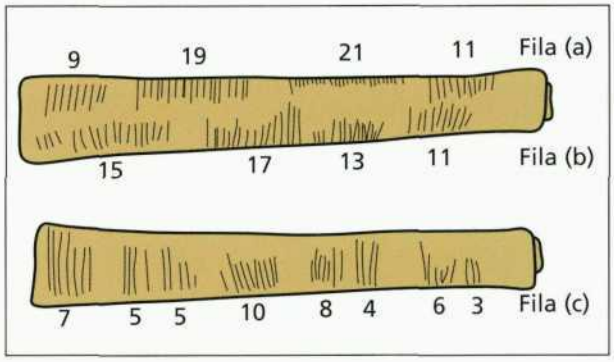


Fig. 1.– El hueso de Ishango.

la tradición pre-helénica para considerar que no se hicieron «verdaderas» matemáticas hasta el advenimiento de la cultura griega. Sin embargo, lo que ocurrió en Grecia, a pesar de ser verdaderamente excepcional, fue, en parte, el resultado de siglos precedentes de acumulación de datos, de procedimientos particulares de cálculo, de observaciones muy precisas, de habilidosas construcciones. Es verdad que antes no se detecta, al menos hasta donde conocemos, la tendencia hacia el establecimiento de resultados o teorías generales, hacia la abstracción especulativa que llamamos «matemática pura» y que, sin ninguna duda, es el legado de la cultura griega, junto con la filosofía, la literatura y las bellas artes (incluida la arquitectura), que más radicalmente ha conformado nuestra visión del mundo y nos ha «civilizado».

LAS MATEMÁTICAS EN MESOPOTAMIA Y EGIPTO

Consideremos, pues, brevemente, algunos de los hallazgos de las matemáticas en Mesopotamia (la tradición de escribir sobre tabletas de arcilla, luego secadas, ha he-

[1] Es muy interesante observar cómo ciertas denominaciones usuales asociadas al hecho de contar o medir provienen de la anatomía, como, por otra parte, no podía ser menos. Por ejemplo, una *brazada*, un *pie*, una *toesa*, un *codo*, una *pulgada*. Por otra parte, todos nos reconocemos a nosotros mismos usando los dedos para contar o realzando nuestras afirmaciones numéricas con las manos.

Una tablilla babilónica.

cho posible que llegara hasta nosotros una enorme colección de tales documentos).

En primer lugar, y sirva para constatar que un simbolismo adecuado es uno de los hallazgos más importantes que el hombre pueda hacer, utilizaron la notación posicional para los números [2]: ¿Qué quiere decir una notación posicional? Nuestra notación es posicional, ya que no es lo mismo 01 que 10. La posición importa, pero esto no es sólo una cuestión de leer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda; representa mucho más, puesto que, con pocos signos, repitiéndolos de forma adecuada, es posible escribir números muy grandes. De hecho, nosotros usamos sólo diez de estos signos, y decimos que nuestro sistema de numeración es decimal, o de base 10. En principio, podemos escribir cualquier número, y no sólo eso, sino también realizar con una técnica simple las operaciones básicas de sumar, restar, multiplicar y dividir.

La división se puede automatizar con el empleo de tablas si el divisor es un número regular, es decir, si sus factores primos son sólo los de la base. Así, cuantos más factores primos tenga ésta, más útiles serán las tablas. El número 60 tiene más divisores primos que el 10, luego aparecen más números regulares, por lo que, en principio, para hacer divisiones es más adecuado escribir los números en base 60 que en base 10. No está del todo claro que ésta haya sido la razón por la que los babilonios adoptaron la base 60 en su sistema de numeración, pero es bastante probable que así haya ocurrido. Este método ha persistido hasta nuestros días en la medida de los ángulos y en la del tiempo.

Es sorprendente el grado de precisión de ciertos cálculos realizados por los babilonios, lo que demuestra en ellos un interés por las matemáticas mayor que el puramente aplicado a sus necesidades. Sirvan de ejemplo los tres siguientes: una famosa tablilla existente en la colección de la Universidad de Yale, escrita en notación cuneiforme, y usando la base 60, contiene el resultado de extraer la raíz cuadrada de 2 con el equivalente a seis cifras decimales exactas. En una segunda tablilla babilónica, hoy en Berlín, está calculada la diagonal de un rectángulo de lados 40 y 10, por lo que resulta plausible que el escriba conociera de alguna manera el teorema de Pitágoras. Esto sucedía más de 1.500 años antes de su formulación por los griegos. En una tablilla de la colección de la Universidad de Columbia aparece una lista de números que, traducida a nuestra base 10, se recoge en la tabla adjunta. Es una lista de ternas pitagóricas datada más de 1.500 años antes de Pitágoras. El escriba conoce el procedimiento general para encontrarlas. Incluso el orden de la lista corresponde a los valores decrecientes de D^2 dividido por H^2.

Tabla I. Lista de ternas pitagóricas en una tablilla babilónica

H	*B*	*D*
120	119	169
3.456	3.367	4.825
4.800	4.601	6.649
13.500	12.709	18.541
72	65	97
90	56	106

Añadiremos que los matemáticos de esta época sabían resolver ecuaciones particulares de segundo grado, y que su astronomía estaba extraordinariamente avanzada, como resultado de cuidadosas observaciones y de su magnífica capacidad de cálculo, teniendo como objetivo el establecimiento de calendarios útiles para la agricultura y para las fiestas religiosas.

Por otra parte, los egipcios tenían conocimientos de geometría y aritmética suficientes para la agrimensura, arquitectura y astronomía. Hay dos documentos importantes a este respecto: los papiros Rhind, en el Museo Británico, y Golenishchev [3], en el Museo de Arte de Moscú.

[2] Pierre-Simon, marqués de Laplace, escribía acerca del sistema posicional: «La idea es tan sencilla, que esa misma sencillez es la razón por la que no reconocemos que merece toda nuestra admiración».

[3] El papiro Golenishchev, datado alrededor de 1850 a. C., contiene veinticinco problemas que ya eran conocidos cuando el papiro fue redactado. Fue comprado en Egipto en 1893. El problema mencionado es el número 14 y en él se reproduce la fórmula que empleaban para rea-

Cada uno de ellos contiene una colección de problemas propuestos acompañados de métodos de resolución. Las matemáticas egipcias fueron de un tipo esencialmente aplicado y sus procedimientos apenas cambiaron con el paso de los siglos. Su importancia relativa estriba, para nosotros, en el aprendizaje que los griegos de los siglos VI al IV a. C. realizaron de sus técnicas, sobre todo en el entorno de la Escuela de Alejandría.

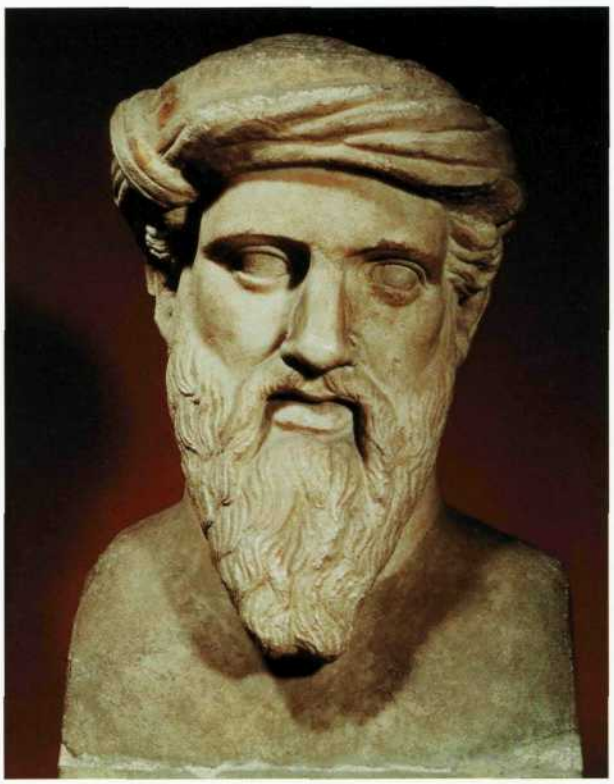
Si nos hemos detenido un momento en este periodo es porque una parte importante de estos conocimientos pasan a Grecia y son el fermento de una revolución en el pensamiento, de la que ahora nos ocuparemos, pero que no es concebible sin referencia a sus precursores babilonios y egipcios.

LAS MATEMÁTICAS EN GRECIA

Desde el siglo VI a. C. hasta el predominio romano, los griegos son el pueblo más importante del mundo civilizado. Su presencia en toda la cuenca mediterránea y más allá de estas fronteras les hace asimilar los hallazgos precedentes. Sus matemáticas, como las de sus predecesores, son en sus inicios de un carácter eminentemente práctico, pero surge un elemento característico, nuevo respecto al legado recibido de formulaciones particulares y ejemplos numéricos, del que estaba ausente cualquier procedimiento deductivo, y es que los matemáticos griegos elevan su actividad a una disciplina teórica. Esto significa dos cosas: sus enunciados tienen ahora carácter general y, además, son confirmados mediante demostraciones.

Esta nueva forma de entender las matemáticas ocurre alrededor del final del siglo VI y durante el V a. C., asociada a nombres como Pitágoras de Samos, Hipócrates de Chios, Archytas de Tarento, Theaetetus de Atenas y Eudoxio de Cnido. Es difícil conocer la verdadera razón, o razones, por las que se produce este cambio de actitud, entre otras cosas porque no han sobrevivido documentos originales y la información que poseemos procede de autores muy posteriores. Como resultado de esta nueva forma de proceder se descubren los números irracionales.

Los primeros pitagóricos afirman que los números son la esencia de las cosas. Esta creencia la aplican no sólo a las matemáticas sino también a la naturaleza como un todo, al sistema del mundo, al espíritu, la ética, las costumbres, la relación con lo desconocido... Es una mística que, en particular, y con respecto a la geometría, afirma que, dados dos segmentos cualesquiera, existe una



Pitágoras.

unidad de medida común, lo que se expresa diciendo que los dos segmentos son conmensurables. De pronto, Hippasus de Metaponto, un pitagórico, en el siglo V a. C., demuestra, al estudiar el pentágono regular, símbolo de su comunidad, que no existe una unidad de medida común para el lado y una diagonal, lo que obligó a introducir pares de segmentos no conmensurables y como consecuencia los números irracionales. En los *Elementos* de Euclides, en el siglo III a. C., se demuestra que el lado del cuadrado no es conmensurable con su diagonal, y esta demostración es uno de los primeros ejemplos conocidos de un tipo común en matemáticas, la llamada *reductio ad absurdum,* en la que se supone lo contrario de lo que se quiere demostrar, y argumentando a partir de ella se llega a una contradicción, con lo que se concluye que el punto de partida es falso, lo que afirma la verdad de la proposición [4]. La estupefacción de los pitagóricos ante la existencia de números inconmensurables fue enorme. Parece ser que intentaron, durante el tiempo que les fue posible, mantener el descubrimiento ocul-

lizar el cálculo del volunen de un tronco de pirámide: «Se te da una pirámide truncada de 6 para la altura por 4 para la base por 2 para la tapa. Eleva al cuadrado este 4, resulta 16. Duplica el 4, resulta 8. Eleva al cuadrado 2, resulta 4. Suma el 16, el 8 y el 4, resulta 28. Toma la tercera parte de 6, resulta 2. Tienes que tomar 28 dos veces, resulta 56. ¿Ves? Obtienes 56. Lo has calculado bien» (citado por H. Eves, *Great Moments in Mathematics. Before 1650,* Dolciani Mathematical Expositions 7, p. 11).

[4] En su obra *A Mathematician's Apology,* el eminente matemático británico G. H. Hardy ha hecho un comentario sobre esta técnica: en el juego de ajedrez, un gambito es un movimiento en el que se sacrifica una pieza a fin de obtener una posición ventajosa. Hardy dice que la reducción al absurdo «es, con mucho, un gambito más sutil y delicado que cualquier gambito en ajedrez: un jugador puede ofrecer en sacrificio un peón u otra pieza, pero un matemático ofrece *el juego entero*».

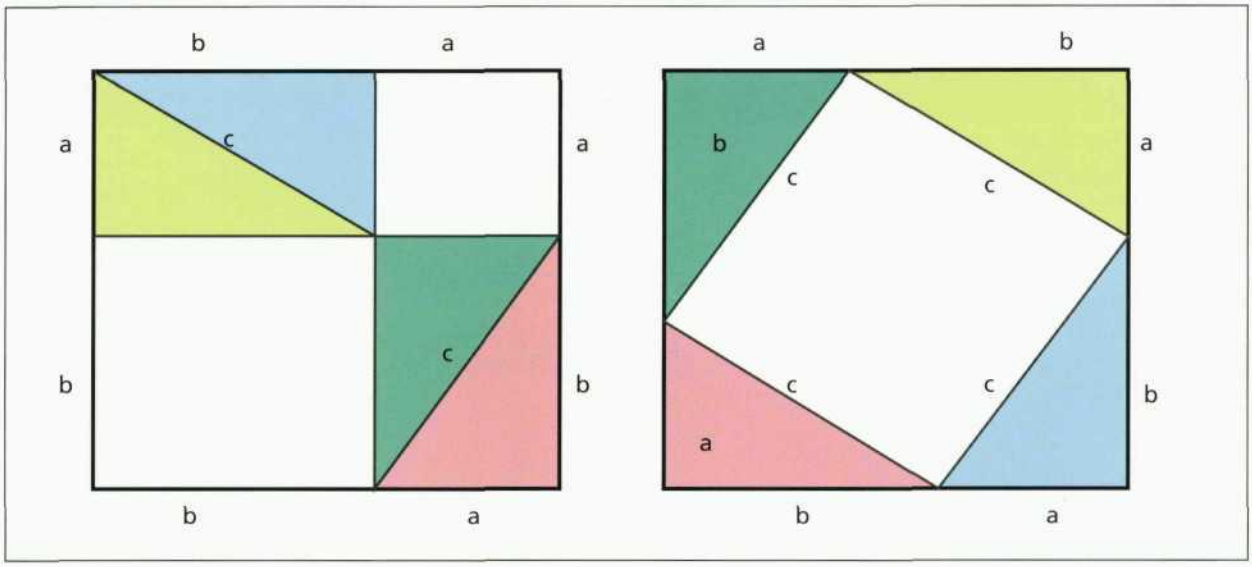


Fig. 2.– Una demostración del teorema de Pitágoras.

to. Finalmente, la noticia se expandió. Una historia, posiblemente apócrifa, nos dice que la comunidad pitagórica arrojó al mar, donde pereció ahogado, a Hippasus, acusado de haberla divulgado.

Por tanto, la aritmética es insuficiente para los objetivos de la geometría. Es necesario rehacer todos los argumentos previos que suponen la conmensurabilidad de dos cantidades cualesquiera, lo que Eudoxio de Cnido consiguió con su teoría de las proporciones, recogida en los *Elementos* de Euclides [5]. El radical cambio de actitud que se impone a los matemáticos y su impacto sobre los filósofos es posiblemente la aportación más importante de la matemática griega, al evidenciar que todos los resultados conocidos hasta el momento resultan, cuanto menos, sospechosos y, por tanto, requieren una prueba. Es necesario establecer lo que se entiende por un argumento de demostración válido. Finalmente, la evidencia puede no ser tan evidente y el recurso a la intuición como método de razonamiento, no como método de descubrimiento y guía del pensamiento, pues en estos lances es insustituible, es sencillamente peligroso [6]. A título de ejemplo, hemos indicado más arriba que el teorema de Pitágoras, probablemente el primero y más famoso de los resultados de la geometría griega, era conocido más de mil años antes de Pitágoras. Sin embargo, el establecimiento riguroso del mismo mediante una prueba de carácter general es un producto genuino de esta nueva forma de pensamiento [7].

Se produce un intenso debate entre los pensadores griegos acerca de lo que sea *conocimiento, prueba* y *verdad.* Las paradojas de Zenón de Elea, en el siglo V a. C., acerca de la infinita divisibilidad del tiempo y del espacio, estrechamente ligadas al problema de la inconmensurabilidad, están también conectadas con el atomismo: si un átomo es la mínima unidad constituyente, dos magnitudes cualesquiera deberían tener una unidad de medida común; por otra parte, si fuera posible dividir indefinidamente un segmento, la porción «final», si de longitud cero, sería inalcanzable; si de longitud positiva, aún podría dividirse. Este tipo de argumentos volverá a aparecer mu-

[5] Esta teoría es precursora de las que, en el siglo XIX, sirvieron para la fundamentación de los números reales. El filósofo, matemático, astrónomo y poeta persa Omar Khayyam, en el siglo XI, perfecciona la teoría de Eudoxio. El *Álgebra* de Khayyam fue traducida al francés en 1851.

[6] Una de las más fascinantes reflexiones sobre la matemática es la que trata de clarificar su carácter de «verdad». En realidad, prácticamente todos los filósofos han manifestado su perplejidad por el tipo de verdad que supuestamente establecen las proposiciones matemáticas, y seguir la variedad de respuestas dadas a este problema es recorrer la historia de la filosofía. Fruto del desconocimiento de la forma como el matemático procede en sus investigaciones es la afirmación del carácter indiscutible de las proposiciones matemáticas. Es muy clarificador considerar la aproximación realizada por I. Lakatos (ver Lakatos, 1976), así como las obras de P. J. Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience,* y R. Hersh, *What is Mathematics, really?* Podemos decir, brevemente, a riesgo de deformar su pensamiento, que Lakatos considera que el matemático crea su ciencia de una forma no muy distinta a como el científico natural investiga la naturaleza, utilizando aproximaciones sucesivas, rectificando progresivamente sus resultados a medida que depura su instrumento de análisis, o a medida que revisiones, a veces dramáticas, de sus conclusiones le obligan a hacerlo. ¡Cuán alejada esta visión de los que piensan en la construcción matemática como una acumulación de resultados obtenidos con una certeza inhumana por una máquina infalible!

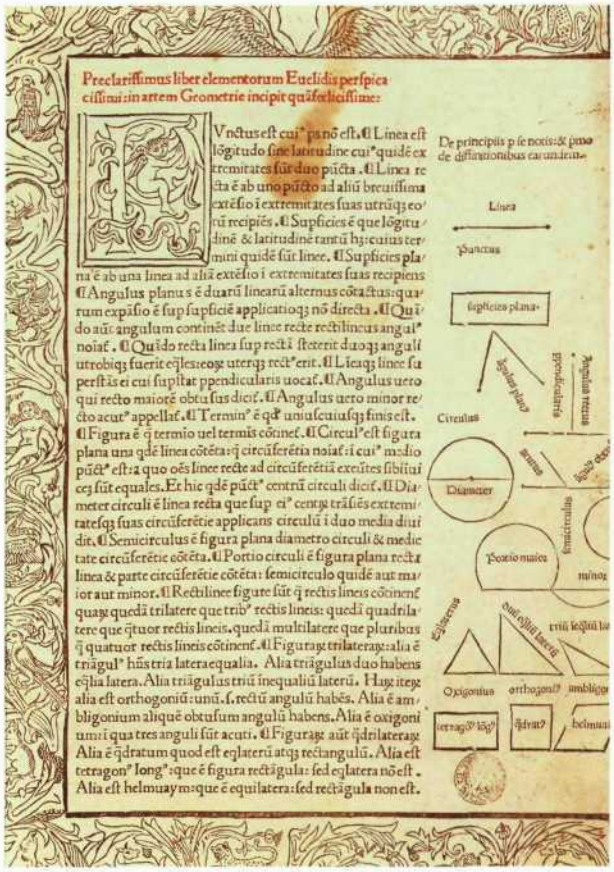
[7] Existen catalogadas más de 370 demostraciones distintas de este teorema (ver Loomis, 1940). Como curiosidad, una de ellas fue proporcionada por el vigésimo presidente de los Estados Unidos, James Abram Garfield (ver H. Eves, *Great Moments in Mathematics. Before 1650,* Dolciani Mathematical Expositions 7, p. 34).

cho más tarde, y representará un papel importante en el intento de entender algunos conceptos matemáticos [8].

Se inaugura una tradición expositiva matemática que llega hasta nuestros días: la forma hipotético-deductiva del razonamiento, una novedad cuyo alcance es inmenso, y que distingue a las matemáticas griegas de todo lo que les ha precedido. Recogiendo sistematizadamente los resultados de esta nueva forma de proceder, aparece una de las obras más influyentes de todos los tiempos, los *Elementos* de Euclides, ya citados.

Euclides recoge en sus trece libros [9] muchos resultados conocidos en su época (hacia el 300 a. C.), y aporta también algunos nuevos. Lo que es magistral es la organización, el método. Los *Elementos* desarrollan toda la geometría y la aritmética elemental partiendo de cinco «postulados» [10] y estableciendo teoremas y proposiciones sólo a partir de los postulados, de los resultados ya demostrados, y mediante el único procedimiento de aplicar las reglas del razonamiento deductivo. La fascinación intelectual que produjo la presentación de las matemáticas tal como aparece en los *Elementos* los ha elevado al rango de modelo del discurso de la razón desde entonces. Pondremos tres ejemplos: Descartes, en el *Discurso del método* dice:

> Esas largas cadenas de trabadas razones muy simples y fáciles, que los geómetras acostumbran a emplear para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginar que todas las cosas que entran en la esfera del conocimiento humano se encadenan de la misma manera [11].


Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quãfelicissime:

Página de los *Elementos* de Euclides.

Spinoza desarrolla su *Ética* [12] a la manera de los *Elementos* de Euclides, *more geometrico*. Hobbes aplica el mismo procedimiento a la teoría política [13].

Notemos de paso un subproducto de los *Elementos*. Dado que la recta y la circunferencia aparecen explícitamente en la formulación de los postulados, parece natural que los geómetras griegos se interesaran especialmente por las construcciones que requieren el uso de regla y compás. Citemos tres problemas famosos, en los que se trabajó intensamente ya en el siglo V a. C., y que aparecen

---

[8] Es interesante la aproximación que Hofstadter hace al ciclo de ideas encerrado en estas profundas reflexiones de Zenón en su obra *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, 1979, usándolas para estructurar su discurso en torno a tres autores sumamente interesantes, el artista M. C. Escher, el músico J. S. Bach y el matemático K. Gödel. La narración usa, en ciertos momentos, el recurso platónico al diálogo entre el maestro y sus discípulos, aquí trastocados en Aquiles y la tortuga. Un tributo a esta forma expositiva aparece también en la obra de I. Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.*

[9] El contenido de los mismos es el siguiente:

Libro I: Congruencia de triángulos, paralelas, áreas de triángulos y rectángulos. Libro II: Relaciones de igualdad en triángulos, cuadrados y rectángulos. Libro III: Círculos. Libro IV: Construcción de polígonos en círculos. Libro V: Teoría de proporciones. Libro VI: Semejanza de figuras rectilíneas planas. Libro VII: Proporciones, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, primos relativos. Libro VIII: Progresiones, números cuadrados y cúbicos. Libro IX: Factorización de primos, infinitud de los primos, números perfectos. Libro X: Teoría de líneas irracionales. Libro XI: Relaciones entre figuras sólidas. Libro XII: Relaciones entre círculos y esferas, volúmenes de pirámides y conos. Libro XIII: Construcción de sólidos regulares en esferas.

[10]
1. Dos puntos arbitrarios se pueden unir por un segmento de recta.
2. Cualquier segmento de recta se puede extender indefinidamente a una recta en ambas direcciones.
3. Dados dos puntos cualesquiera, hay una circunferencia con centro en el primero pasando por el segundo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dos rectas tales que, cortadas por una tercera, ésta forma ángulos interiores al mismo lado que suman menos de dos rectos, se cortan en algún punto a ese lado.

[11] R. Descartes, *Discurso del método*, segunda parte, p. 83. Descartes, desde luego, está especialmente preparado para desarrollar un programa de este tipo. Como menciona en la misma obra, primera parte, p. 73, refiriéndose a sí mismo, «gustaba, sobre todo, de las matemáticas por la certeza y evidencia de sus razones; (...)».

[12] B. Spinoza, *Ethica in Ordine Geometrico Demonstrata*. 1677. *Ethics*. Trad. de W. H. White y A. Stirling, 1894.

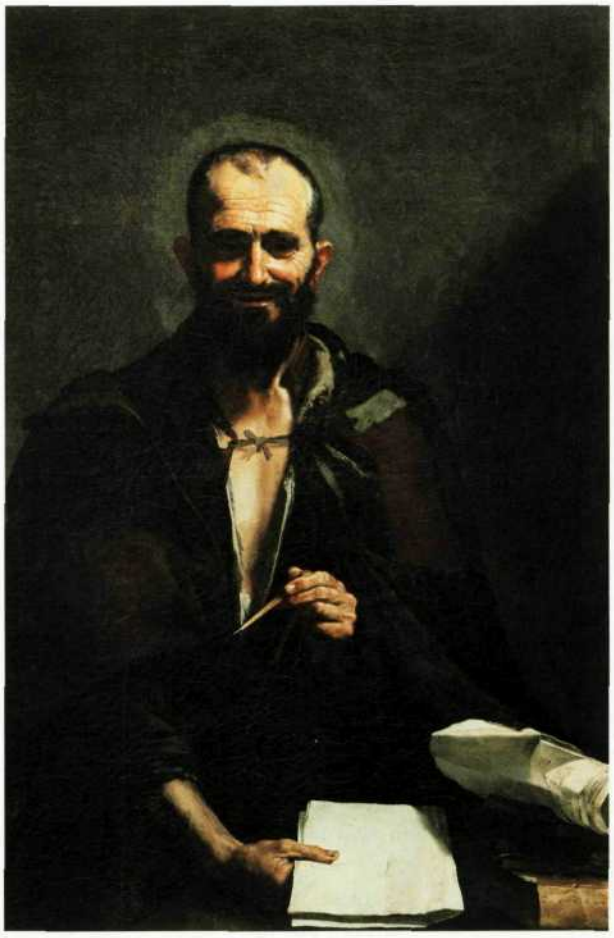
[13] T. Hobbes, *The English Works of Thomas Hobbes*. Ed. Sir William Molesworth (ed.), 1839-1845 (reed., 1962).

recogidos en los *Elementos:* la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Ninguno de los tres problemas puede resolverse mediante regla y compás, conclusión a la que sólo se llegó veintidós siglos después. Estos problemas han tenido una gran influencia en la historia de las matemáticas.

Podemos decir, pues, que la matemática griega, junto con la filosofía, es el desarrollo intelectual más importante de la Antigüedad, producto del ideal de belleza y armonía del genio griego, de su gusto por el rigor, por la ciencia desinteresada y por la depuración de las formas.

¿Cómo se entiende, entonces, que este enorme impulso sufriera un evidente estancamiento en los siglos posteriores y no se vuelva a encontrar un avance del mismo orden hasta trece siglos después? Una posible explicación está en el propio programa griego. Su perfección y depuración llevan en sí el germen de su parálisis: los matemáticos griegos acotan artificialmente el campo de sus investigaciones, y sólo consideran aquellas construcciones que utilizan unos rígidos procedimientos (aunque rígidos, geniales) que excluyen otras aventuras menos rigurosas y, quizá, más fructíferas. Su geometría es el eje en torno al cual giran sus argumentos. Su método expositivo, extraordinariamente preciso, no permite la comunicación efectiva del pensamiento intuitivo que se oculta detrás del discurso formal. La desconfianza del infinito junto con la limitación a las construcciones con regla y compás son corsés que sólo algunos heterodoxos, como los matemáticos de los siglos III y II a. C. Arquímedes de Siracusa, Diofanto de Alejandría y Apolonio de Perga, osan quitarse, aunque sólo parcialmente. Algunas partes de la producción de estos autores han representado un papel extraordinario en dos revoluciones absolutamente decisivas en la historia de la ciencia, la llamada revolución copernicana del siglo XVI y la aparición del nuevo cálculo en el XVII, sobre las que volveremos más adelante.

Las aportaciones más significativas de Arquímedes se realizan en varios tratados [14]. Sus extraordinarios logros en el cálculo de longitudes de curvas, áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos, entre otros muchos, preparan la aparición del cálculo integral veinte siglos después [15]. Arquímedes reconoce en el *Método,* pergamino palimpsesto descubierto accidentalmente en Estambul en 1906 y el único manuscrito que sobrevive de la Antigüedad, un original uso de la estática como guía de sus descubrimientos.



Arquímedes.

Las nociones cruciales, que los sólidos están constituidos por sus secciones planas y que se puede asignar un peso a las figuras geométricas, no son válidas dentro de las concepciones usuales de la geometría griega, y Arquímedes lo sabía. Sin embargo, mantiene que, aunque algunos de estos argumentos no eran «demostraciones», tenían el valor de la exploración y del descubrimiento.

Respecto a Apolonio, sus aportaciones al estudio de las cónicas resultaron, con el tiempo, imprescindibles en la descripción de los movimientos planetarios [16].

Por otra parte, Diofanto de Alejandría hizo contribuciones magistrales a la teoría de números. Su tratado *Arit-*

[14] *Sobre la esfera y el cilindro, El método, Sobre los conoides y esferoides, Sobre las espirales, Sobre la medida del círculo, Cuadratura de la parábola.*

[15] A propósito de ello G. Pólya, en *Ciencia y método,* p. 53, dice: «La verdad es que somos retorcidos. Aunque se reconoce a Arquímedes (...) como el más grande de los matemáticos griegos, se acostumbra a negarle el crédito de lo que hizo y a atribuirle lo que no hizo. Su ingenioso método de calcular áreas y volúmenes acercó a las matemáticas al umbral del cálculo integral y, sin embargo, los libros de texto lo atribuyen por entero a Newton y Leibniz. Él inició la ciencia de la mecánica estableciendo las condiciones de equilibrio de la palanca y sin embargo se dice que lo que hizo fue inventarla –a pesar de que los constructores egipcios de pirámides usaban palancas miles de años antes de su nacimiento».

[16] Como se afirma en *The New Encyclopaedia Britannica,* vol. 1, p. 485.1.b, las *Cónicas* es una de las más importantes obras científicas de la Antigüedad. El tratado constaba de ocho volúmenes (el octavo se ha perdido). En los cuatro primeros se recoge la teoría básica, en buena parte conocida por los predecesores, aunque una parte importante de los teoremas de los volúmenes tercero y cuarto son nuevos. Los libros quinto, sexto y séptimo son originales. Apolonio introduce los términos elipse, parábola e hipérbola, estudia rectas normales y determina centros de curvatura, entre otros resultados. En el *Almagesto,* Ptolomeo menciona que a Apolonio se debe la introducción del sistema de excéntricas y epiciclos para la explicación de los movimientos planetarios.

mética, además de tener una gran calidad intrínseca, ocupa un lugar destacado en la historia de las matemáticas.

LA PRESERVACIÓN DEL LEGADO CLÁSICO REALIZADA POR LOS ÁRABES

La transmisión del patrimonio griego es obra de los intelectuales árabes, quienes traducen y, eventualmente, amplían las obras clásicas griegas, como los *Elementos* de Euclides, algunos de los tratados de Arquímedes, las *Cónicas* de Apolonio y la *Aritmética* de Diofanto.

No todo se reduce, ni mucho menos, a una labor de documentación. Los avances más significativos se realizan en la incipiente álgebra (este término, así como la palabra algoritmo, proviene de las obras de Al-Khwarizmi), en particular en teoría de ecuaciones, teoría de números (con la introducción del sistema hindú de numeración decimal), trigonometría (con la compilación de las tablas de senos y tangentes de minuto en minuto de arco con precisión de cinco cifras sexagesimales y al establecer las relaciones entre senos y tangentes), astronomía (con el invento del astrolabio y de otros instrumentos de cálculo) y en el estudio de la geometría (con la investigación del quinto postulado de Euclides, y la resolución de problemas de secciones cónicas y su aplicación a la óptica geométrica). Toda esta actividad se extendió entre los siglos X y XV. Aunque no se detuvo aquí, a partir de este momento el centro de gravedad de las matemáticas comenzó a desplazarse a Occidente, gracias, precisamente, a la difusión del legado clásico realizada por los árabes, de forma que sus tratados pasan a las recién creadas universidades.

LA ALGEBRIZACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

La adquisición de una notación algebraica adecuada en los siglos XIV y XV fue un logro extraordinariamente influyente. La disponibilidad de un simbolismo efectivo fue un proceso paulatino asociado a nombres como Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Regiomontano, Gerhart, Widman y, sobre todo, Viète, que tuvo unas consecuencias muy importantes en el desarrollo del nuevo cálculo.

Se produce una transición sumamente interesante. La algebrización permite una codificación de la escritura matemática e introduce sus métodos en el análisis de curvas y superficies, cuyo desarrollo es exigido por las nuevas astronomía, mecánica y óptica, y cristaliza en los nuevos procedimientos de la geometría analítica. Fermat y Descartes aplican las nuevas técnicas a la teoría de lugares geométricos de Apolonio. Es significativo que Descartes, en su famoso apéndice *La Geometría* a su no menos famoso *Discurso del método* (1637), quisiera excluir de su estudio las curvas generadas mecánicamente, limitándose a las descritas por polinomios de dos variables. Sin embargo, una vez destapada la caja de Pandora nada pudo retener dentro situaciones más complejas, lo que llevó, indefectiblemente, y hacia el final del siglo siguiente, a la formulación más general de función y a la exhibición de

René Descartes.

sus patologías, provocando una nueva crisis y una consiguiente revolución. De momento, incluso los métodos restringidos de Descartes produjeron la suplantación del programa clásico de la geometría por el nuevo de su algebrización y el dominio casi absoluto del análisis matemático. Este filósofo y matemático francés es, sin duda, figura clave en una revolución del pensamiento que ha sido denominada «racionalismo», y que coincide, en matemáticas, con el inicio de una de las etapas más fructíferas de su desarrollo.

La demanda de cálculos más precisos por parte de la astronomía, trigonometría, cartografía y navegación desemboca en una revolución notacional y computacional. No se trata sólo de una aceptación del simbolismo hindú y árabe, ni tampoco una cuestión de grado, sino que se produce una auténtica revolución en la noción de magnitud. En la geometría euclídea hay una distinción neta entre magnitud, como algo continuo y, de acuerdo con ello, infinitamente divisible, y número, realización de lo discreto, de lo indivisible, más en la dirección marcada por los pitagóricos. Simon Stevin propone, en 1585, usando el sistema indo-arábigo, la ampliación notacional y calculística de los números enteros a las fracciones decimales, implicando algo más sutil que el mero artificio de la escritura: la capacidad de infinita divisibilidad del número en partes, el «número continuo», a lo que los matemáticos les gusta referirse simplemente como «el continuo»; es decir, la maravillosa estructura del número real.

2 3 7⓪5①7②8③
= 237.578

Fig. 3.– Representación de los números según Stevin.

Volviendo a los aspectos computacionales, mencionemos que, como ayuda a los laboriosos cálculos de los astrónomos y de los cartógrafos, en 1614, John Napier introduce los logaritmos, a los que hoy, en reconocimiento, se les asocia su nombre. La idea es muy sencilla: es más fácil sumar que multiplicar. Así, en lugar de multiplicar dos números, se expresan como potencias de una misma base y se suman los exponentes. Una idea efectiva si se consigue tener una tabla de conversión de números en potencias. Desde luego, no es Napier el único que llega a la susodicha idea. El mismo Kepler prepara una extensa tabla de logaritmos para ser ayudado en sus cálculos.

El historiador Carl Boyer [17] ha llamado al cálculo «el instrumento más efectivo para la investigación científica que las matemáticas hayan creado nunca». Es el producto característico de la revolución científica al permitir el análisis de los procesos de variabilidad y cambio. Frente a este punto de vista, enfatizado por el nuevo aparato, las matemáticas anteriores aparecen más como el análisis de lo inmutable [18]. Alrededor de 1680, y de la mano de dos geniales matemáticos, el alemán Gottfried Leibniz y el inglés Isaac Newton, surgen nuevas técnicas que son capaces de tratar el movimiento, lo infinitamente pequeño y lo infinitamente numeroso, captar un instante entre la multiplicidad de ellos: delicados problemas de máximos y mínimos, de tangencia, de aproximación mediante procesos recursivos... Es difícil dar una idea del impacto que produce en el desarrollo de la ciencia y, en general, del pensamiento, pues los conceptos últimos son tan delicados y tan controvertidos que habrá que esperar a una nueva revolución, la aritmetización del cálculo, para que éste siente sus bases sobre terreno sólido.

Los precursores de esta revolución intentan obtener técnicas aplicables a la solución de dos tipos de problemas: el cálculo de áreas encerradas por curvas y la determinación de tangentes, dos problemas aparentemente independientes. El matemático que había avanzado más en estos terrenos fue Arquímedes, de forma que, como mencionamos más arriba, había proporcionado métodos de cálculo de áreas que llevaban implícita la idea de fragmentación de las mismas en secciones «infinitamente pequeñas» y su recomposición de tal manera que la suma fuera realizable. También, en sus estudios de curvas, por ejemplo de la espiral, había sido capaz de calcular la posición de su tangente en un punto.

Cavalieri, en su tratado *Los Indivisibles,* retomó la idea del cálculo de áreas de Arquímedes. Su método, difícil de aplicar, fue reformulado por Wallis mediante procesos de sumación de series.

Nicolás Copérnico.

El cálculo de tangentes había sido considerado también en casos particulares por Descartes. Roberval aplicó ciertos conceptos de dinámica a este problema, pero fue Fermat quien expuso un procedimiento precursor del método de los infinitésimos. Posteriormente Barrow, en su tratado *Lectiones Geometricae* (1670), adelantó importantes ideas sobre el futuro cálculo expuestas de modo geométrico, y fue el primero que evidenció la relación existente entre tangentes y áreas. Este tratado influyó en las ideas de Newton y Leibniz.

Lo que ocurre entre los años 1665 y 1670 es uno de los ejemplos clásicos de un revolucionario «cambio de paradigma» [19]. Existía una teoría, la de los epiciclos de Apolonio, recogida por el astrónomo Hiparco y sistematizada por Ptolomeo, modificada por este último a medida que se requerían más ajustes para describir las aparentes irregularidades de los movimientos de los cuerpos celestes, que, mal que bien (en ciertos casos muy bien), daba cuenta del comportamiento de esos cuerpos. Posteriormente, en el siglo XVI, Copérnico adopta otra posición, otro punto de

[17] Carl B. Boyer, *The Concepts of the Calculus...*

[18] ¿Qué puede ser más eterno, como los filósofos platónicos han argumentado siempre, que los números, o las figuras geométricas, según ellos preexistentes a cualquier realidad contingente, de forma que si Sócrates pregunta adecuadamente por ellos a un niño, a un esclavo en el famoso diálogo Menón («Menón, o de la Virtud», Platón, *Obras completas,* pp. 435-462), éste acaba descubriendo sus propiedades, señal inequívoca, según Platón, de que en él existían antes de su nacimiento?

[19] Ver T. S. Kuhn, *La revolución copernicana.* Esta obra, junto con su fundamental contribución a la epistemología científica *La estructura de las revoluciones científicas,* recoge lo esencial de su pensamiento. En la primera, el autor formula su definición de paradigma científico y analiza con gran profundidad el mecanismo de lo que es una revolución en el terreno de la ciencia, distinguiendo entre la misma y lo que denomina «ciencia normal», y caracterizando lo que debe entenderse como una «escuela».

vista, y propone una descripción alternativa. Supone que es el Sol el que ocupa el centro del sistema planetario, y que los planetas se mueven a su alrededor. Desde luego se trata de una hipótesis arriesgada, pues contradice la creencia establecida [20].

La formulación por Kepler de su teoría del movimiento planetario, resumida en tres famosas leyes [21], sirvió de base a las ideas de Newton. En esta teoría [22], las descripciones son más simples, los hechos encajan sin necesidad de añadir hipótesis *ad hoc* y, sobre todo, es posible realizar predicciones muy precisas, aunque para ello sea imprescindible el trabajo de Newton. Pues toda la potencia de la nueva teoría no se descubre hasta la puesta en pie de un aparato matemático que permite la realización de cálculos antes considerados imposibles. Queremos que el lector perciba la inmensa capacidad intelectual de este hombre, Isaac Newton, quien reconoce, sin embargo, que «si ha llegado a ver más lejos, es porque se aupó a hombros de gigantes», haciendo alusión a un conocido episodio [23]: cierto día del año 1684, en Londres, tres amigos, astrónomos y matemáticos, Edmund Halley, el descubridor de la periodicidad de la aparición del cometa que lleva su nombre, Christopher Wren, también importante arquitecto, y Robert Hooke, discuten acerca del movimiento planetario. Los tres reconocen la superioridad de la teoría heliocéntrica respecto a la ptolemaica. Los tres conocen las leyes de Kepler, que éste ha propuesto después de uno de los análisis más exhaustivos de datos producido en la Historia de la Ciencia por un solo investigador a partir de las tablas de su maestro Tycho Brahe. Reflexionando sobre la tercera ley de Ke-

Johannes Kepler.

[20] Nuestra expresión es un poco retórica. Como argumenta Kuhn en su obra *La revolución copernicana*, pp. 196-197, «Copérnico no fue el primero en sugerir el movimiento de la Tierra ni tampoco pretendió jamás haber redescubierto por sí mismo tal idea. (...) Lo que sí carecía de precedentes era el sistema matemático elaborado por Copérnico y basado en el movimiento terrestre. Copérnico fue el primero, a excepción quizá de Aristarco, en dar cuenta de que un movimiento de la Tierra podía resolver un problema astronómico existente, o mejor aún, un problema estrictamente científico». El sistema copernicano considera para los planetas movimientos circulares uniformes centrados en un punto próximo a un sol fijo (como dice A. Elena en *Nicolás Copérnico...*, edición crítica de varias obras que incluye el *Commentariolus*, un pequeño tratado divulgativo que precedió a la gran obra de Copérnico, *De Revolutionibus Orbium Coelestium libri VI*, el sistema, más que «heliocéntrico», debería llamarse «heliostático»), considerando que es el movimiento de la Tierra el responsable de los aparentes movimientos del Sol y de las estrellas fijas, a las que sitúa a mucha mayor distancia de la tierra que en el sistema ptolemaico, y de las irregularidades de los descritos por los planetas. Mantiene, aunque de forma simplificada, el mecanismo de los epiciclos y de las deferentes del sistema de Ptolomeo.

[21] 1. Los planetas describen órbitas que forman elipses con el Sol en uno de los focos.
2. El segmento que une el foco con el planeta barre la misma área en el mismo tiempo.
3. El cuadrado del cociente de los periodos de revolución de dos planetas coincide con el cubo del cociente de sus respectivos semiejes.

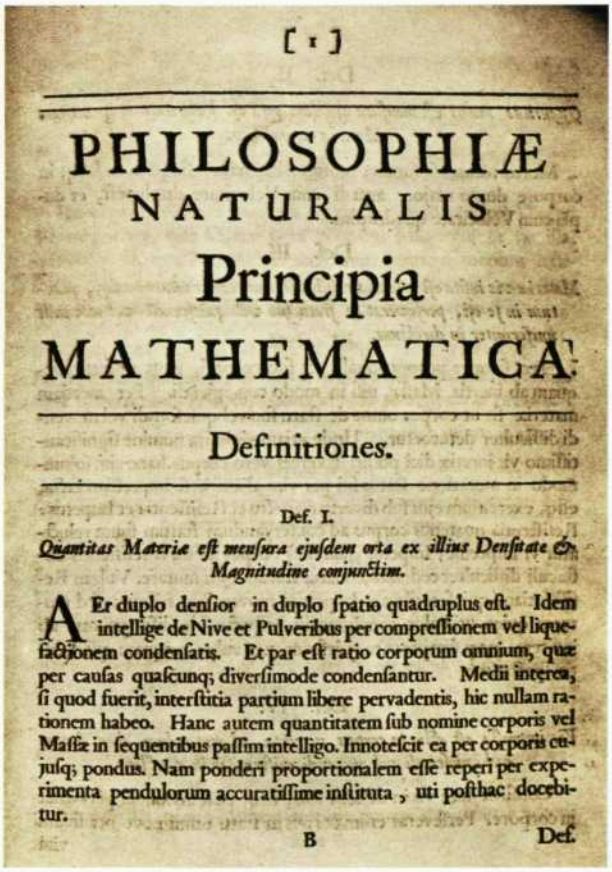
[22] Hay que referirse a la subyugante capacidad que tienen las matemáticas para crear ideas y conceptos, aparentemente extraños, inútiles, ajenos a la «experiencia cotidiana», y que, a veces, como en este caso, mucho después, se manifiestan insustituibles en la comprensión profunda de los fenómenos naturales. Mencionamos anteriormente las cónicas de Apolonio. Sin aquella magistral teoría de curvas, los movimientos planetarios, en su complejidad, hubieran sido simplemente ininteligibles. Éste es un estado de cosas recurrente en ciencia y que los matemáticos conocen bien. Una aproximación a esta capacidad, realizada por el físico teórico E. P. Wigner, se recoge en su artículo *The unreasonable effectivenes of Mathematics in the Natural Sciences*, donde aparece una versión ampliada de la conferencia impartida en la Universidad de Nueva York el 11 de mayo de 1959. Este artículo contiene una reflexión profunda en torno a la pregunta de por qué las matemáticas, «ciencia de las habilidosas operaciones con conceptos y procedimientos creados precisamente con este propósito» (el de hacer matemáticas) permiten una descripción extraordinariamente precisa de los fenómenos que el físico formula como leyes de la naturaleza. El artículo termina con la siguiente exclamación de júbilo: «El milagro de que el lenguaje de las matemáticas sea el apropiado para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que ni comprendemos ni merecemos. Debemos estar pues agradecidos por ello y desear que siga siendo así en futuras investigaciones y que se extienda, por bien o por mal, para nuestro placer, aunque quizás también para nuestro desconcierto, a más amplias ramas del aprendizaje». Una referencia muy interesante sobre este tema puede encontrarse en P. J. Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience*, pp. 68-76. No es por azar que estos autores citan a Wigner. Tanto uno como los otros recurren, en cierto momento, al ejemplo de la teoría ptolemaica frente a la heliocéntrica.

[23] Citado por G. F. Simmons en *Calculus Gems. Brief Lives and Memorable Mathematics*, pp. 133-134.

Isaac Newton.

pler, Halley había llegado a la conclusión de que la fuerza gravitacional que mantenía a los planetas en sus órbitas probablemente estaba en relación inversa al cuadrado de su distancia al Sol[24]. Sin embargo, era incapaz de hacer con esta idea nada más que conjeturarla. Halley recoge, en una carta fechada en 1686, sus impresiones sobre la reunión mencionada[25].

Pocos meses después, Halley tiene la oportunidad de visitar a Newton en Cambridge. Éste lo recibe. Le pregunta directamente: «Si los cuerpos celestes se movieran bajo el influjo de una fuerza central que disminuyera con el cuadrado de la distancia, ¿qué trayectoria seguirían?». Después de un momento, Newton responde: «Elipses». «¿Cómo lo sabe?», interroga Halley. «Porque lo he calculado», es la respuesta de Newton. Si el lector lo piensa un momento quedará tan atónito como Halley: no se trata de que Newton lo suponga, es que «lo ha calculado». Tiene en sus manos unas técnicas que le permiten realizar el análisis matemático de un complejísimo problema de mecánica. Halley quiere ver, fascinado, los cálculos. Newton busca entre sus papeles, y resulta que... los ha perdido. Le pide, por favor, que los vuelva a escribir, que le permita saber cómo ha realizado una hazaña de tal calibre. Y se produce uno de esos hechos que sólo ocurren en la historia unas pocas veces. Un creador se encierra durante dieciocho meses seguidos, totalmente concentrado (de hecho, parece que muchos días se olvidaba de recoger la comida que su asistenta le dejaba fuera, ya que no tenía permiso para interrumpirle), y produce uno de los monumentos intelectuales más influyentes de toda la historia: los *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687). Los científicos reconocen que es la obra más importante, en el sentido de haber cambiado profundamente el conocimiento del mundo, escrita por un solo hombre. Newton establece la forma moderna de la óptica, dinámica (no sólo del movimiento de un cuerpo, sino también de la forma como interactúan varios de ellos), mecánica teórica, dinámica de fluidos, mecánica celeste, in-



[1]

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
Principia
MATHEMATICA.

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

AEr duplo densior in duplo spatio quadruplus est. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunq; diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusq; pondus. Nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

B Def.

Los *Principia Mathematica* de Newton.

[24] *Como se menciona en G. F. Simmons, ob. cit., p. 133, Huygens había mostrado en 1673 que si un planeta se mueve en una órbita circular* con velocidad constante, su aceleración a está dada por v^2/r. Si T es el periodo, resulta $a = (4\pi^2/r^2) \cdot (r^3/T^2)$. Por la tercera ley de Kepler, (r^3/T^2) es constante, luego a es inversamente proporcional a r^2. Si se supone ahora que la fuerza de atracción F es proporcional a la aceleración, resulta así que F es también inversamente proporcional a r^2.

[25] «Me reuní con sir Christopher Wren y Mr. Hooke y, recayendo la conversación en ello, Mr. Hooke afirmó que aceptando tal principio podrían demostrarse todas las leyes de los movimientos de los cuerpos celestes, y que él mismo lo había hecho. Declaré que yo no lo había conseguido. Sir Christopher, para estimular la investigación, dijo que nos daría a Mr. Hooke y a mí dos meses para proporcionarle una demostración convincente y que se comprometía por su honor a entregar a quien de nosotros dos lo consiguiera un premio de cuarenta chelines. Mr. Hooke dijo entonces que él sabía cómo hacerlo, pero que se reservaba durante cierto tiempo la solución, de modo que otros, al intentarlo y fracasar, pudieran valorar mejor su logro cuando lo hiciera público. Sin embargo, recuerdo que sir Christopher quedó poco satisfecho con esta afirmación, así que Mr. Hooke prometió enseñarle sus aportaciones, aunque no creo que haya cumplido su palabra» *(Correspondencia,* Ítem 427; recogido en G. F. Simmons, op. cit., p. 133).

cluyendo la ley de gravitación universal, y el cálculo diferencial, una técnica tan potente que los matemáticos y físicos de los dos siglos siguientes se lanzan febrilmente a la explotación de sus potencialidades, resolviendo infinidad de problemas de cinemática, dinámica, hidrodinámica, óptica, elasticidad, etc.

Las consecuencias son tan extraordinarias para la ciencia que resulta imposible incluso enumerarlas. Es sólo un ejemplo, pero merece la pena mencionar hasta qué punto fue posible realizar predicciones constatables en el marco de la teoría newtoniana. Se había observado la existencia de pequeñas perturbaciones en el movimiento del planeta Urano respecto a las predicciones de la teoría. En 1845, dos matemáticos, Adams en Inglaterra y Le Verrier en Francia, realizan los delicados cálculos que les permiten precisar la trayectoria y la masa de un planeta, hasta entonces no detectado, Neptuno, sólo a partir de cómo perturba a Urano, de manera que indican el lugar exacto al cual los astrónomos deben apuntar sus telescopios para encontrarlo. El ignorado planeta acudió puntualmente a su cita. De una forma parecida se detectó Plutón en 1930.

Al lector le vendrá a la memoria la disputa científica que ha sido sin lugar a dudas más aireada, y con razón. Se trata de la famosa cuestión de prioridad entre Newton y Leibniz sobre la paternidad del nuevo cálculo infinitesimal. Hoy en día, y basándose en todos los indicios previos, la datación de cartas y notas, las memorias de los contemporáneos y la cronología precisa de los acontecimientos, es posible asegurar que ambos hombres llegaron a sus descubrimientos independientemente. El talante irascible de ambos, sobre todo de Newton, jaleado por algunos de sus colegas [26], quienes convirtieron el rifirrafe en una cuestión partisana entre la matemática inglesa y la del continente, hizo que la discusión adquiriera tintes de vesania. Tuvo consecuencias catastróficas, especialmente para la primera, la matemática inglesa, pues hay que reconocer que el énfasis analítico de los escritos de Leibniz, en contraste con la presentación geométrica de Newton, y la estupenda habilidad notacional del primero, decantaron la práctica del revolucionario análisis matemático más en la dirección del alemán que del inglés, con continuadores de la talla de los Bernouilli, Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Gauss, Cauchy..., y nos detendremos aquí, pues rozamos otra revolución a la que hay que dedicar más adelante algunos momentos.

Es una extraña ironía de la historia de las matemáticas que Newton, quien casi sin dudarlo puede ser considerado como el mayor intelecto que haya existido, merezca este comentario del historiador Michael Mahoney [27]: «Sin menoscabo de la influencia revolucionaria de los *Principia,* las matemáticas hubieran tenido prácticamente el mismo aspecto aunque Newton no hubiera existido. En esta tarea, él era parte de una comunidad, para la cual no fue indispensable».

Gottfried Leibniz.

Así pues, es posible decir que Leibniz fue capaz de establecer un paradigma, no distinto del propuesto por Newton, que tuvo como consecuencia la creación de una escuela que adoptó el programa de investigación del nuevo cálculo en los términos indicados por él, y que fue reforzado por su propio ímpetu, incluyendo la creación de revistas de matemáticas como *Acta Eruditorum,* así como la Sociedad de Ciencias de Brandeburgo, luego Academia de Ciencias de Berlín.

EL PERIODO DE DESARROLLO DEL CÁLCULO

Se ha producido un cambio sustancial desde una concepción marcadamente geométrica a un tratamiento de carácter más algebraico-analítico.

Quizá las figuras más importantes en esta nueva dirección sean el suizo Leonhard Euler y el francés Joseph-Louis Lagrange. El énfasis dado por Euler al concepto de función como pieza central del análisis, diciendo que «una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en forma arbitraria de la variable y de can-

[26] En 1695, Newton recibió una carta de su amigo John Wallis, advirtiéndole de que «sus ideas» eran conocidas en Holanda como el *Calculus Differentialis* de Leibniz. Fue el desencadenante de la tremenda discusión (ver G. F. Simmons op. cit., p. 137).

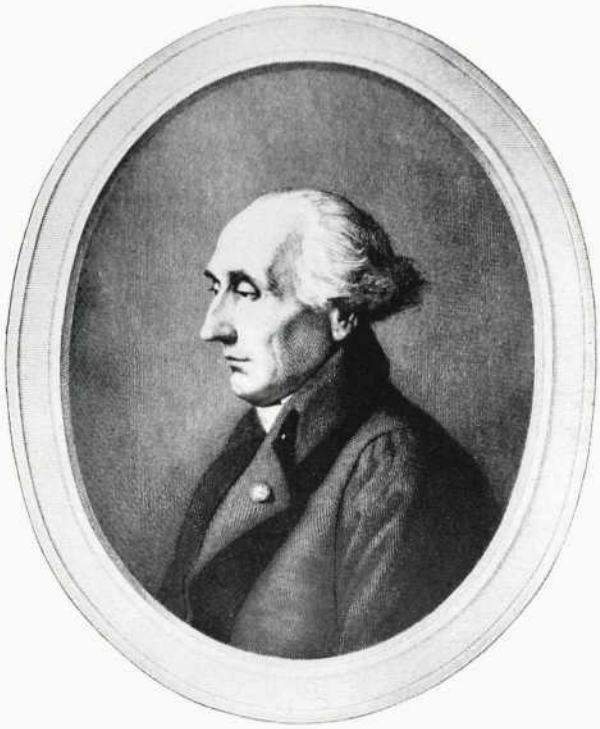
[27] M. Mahoney, *Mathematics.* Citado en *The New Encyclopaedia Britannica,* vol. 23, p. 620, 2.b.

Leonhard Euler.

tidades constantes»[28], es un ejemplo claro de esta nueva dirección. Su definición de las funciones trigonométricas como series de potencias se formula divorciada de cualquier conexión con la geometría; fruto de esta actitud es la aceptación de los números complejos como instrumento de gran potencia en el análisis intrínseco de la teoría de funciones[29].

Poniendo de manifiesto este tipo de ideas, citemos también a Lagrange, quien en su influyente obra *Teoría de las funciones analíticas*, de 1797, define la derivada en un punto simplemente como el coeficiente de la primera potencia en el desarrollo de Taylor de la función en ese punto.

El inmenso éxito del nuevo procedimiento en la resolución de problemas hacía que se percibiera como secundaria en esta fase la pausada reflexión sobre la solidez de sus fundamentos. No habían faltado objeciones más o menos perspicaces a los mismos. Una de las más difundidas, y atacando al método desde dentro, aunque sus intenciones no fueran sólo de clarificación científica, fue la del obispo George Berkeley, quien argumentaba contra la infinita divisibilidad del espacio, pues lo suponía constituido de indivisibles, y llegaba a negar la posibilidad de bisección de un segmento, que podría, según él, estar formado por un número impar de constituyentes. Consecuentemente, opinaba que el mismo concepto de infinitésimo era contradictorio en sus términos. La verdad es que no le faltaba razón[30]. Los intentos de explicación no eran, en realidad, muy convincentes y la propia nomenclatura indica el tipo de dificultad encontrada: cantidades evanescentes, últimas cantidades, infinitésimos... Johann Bernouilli enunciaba formulaciones que rayaban en lo místico y el absurdo[31]. La manipulación formal había producido resultados sorprendentes[32], aunque, en algunos



J. L. Lagrange.

[28] L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748, *Introduction to the Analysis of Infinites)*. Citado en *The New Encyclopaedia Britannica*, vol. 23, p. 621, 2.b.

[29] A Euler se debe la fórmula $e^{\pi i} = -1$, que relaciona los tres números más importantes del análisis. En G. J. O. Jameson, *Un primer curso de funciones complejas*, ed. CEAC, 1970, se propone esta fórmula y se dice: «Un matemático es alguien para quien esta fórmula es completamente evidente. Euler era un matemático».

[30] Por ejemplo, Newton, en su *Cuadratura de curvas* (1704), había calculado la derivada («fluxión», en su nomenclatura) de la función $f(x) = x^3$. Hay en el razonamiento una aparente incongruencia, pues desde el principio se supone que el incremento es distinto de cero. De pronto, al final del argumento, lo hace nulo.

[31] Por ejemplo, dice: «una cantidad que se incrementa o disminuye en una cantidad infinitamente pequeña no se incrementa ni se disminuye», ver H. Eves, «Great Moments in Mathematics. After 1650», p. 133.

[32] Por ejemplo, calculando de dos formas distintas un área, Leibniz obtuvo la fórmula siguiente:

$$\pi/4 = 1 - (1/3) + (1/5) - (1/7) + (1/9) - \ldots$$

casos, esas manipulaciones condujeran a contradicciones[33]. En muchos casos, sólo una especial intuición de los procesos válidos evitaba la falacia.

LA ARITMETIZACIÓN DEL ANÁLISIS

Llega un momento en el que los espíritus más perspicaces empiezan a preguntarse por la consistencia de sus construcciones.

Este cambio de rumbo está, en sus inicios, representado ejemplarmente por el francés Augustin Louis Cauchy alrededor de 1820, quien toma como elementos organizadores de su programa los conceptos de límite y continuidad. La estructura más estable conocida en ese momento en el análisis matemático es la de los números reales. Aparentemente, no hay base más sólida que la del propio número real, y decimos «aparentemente» pues en el siglo siguiente incluso este punto de partida va a ser discutido. Se inicia así el proceso de aritmetización del análisis. Como ejemplo consideremos la delicada y precisa formulación debida a Cauchy de la idea básica de continuidad, hoy en día universalmente incorporada a nuestros libros de texto: «una función f es continua en un punto p cuando, dado un número real positivo arbitrario ε, existe un número real positivo δ de modo que si la variable x difiere de p menos que δ, entonces $f(x)$ difiere de $f(p)$ menos que ε». Sobre la definición de límite, una variante de la anterior, Cauchy levanta el edificio del análisis: diferenciación, integración, series numéricas y series de funciones, funciones analíticas[34], etc.

El impacto de esta nueva precisión en la definición de los conceptos es inmenso. Sólo es aceptable aquello que queda definido en términos de estructuras previas bien establecidas. En realidad, este prurito creciente de precisión lleva en sí mismo el germen de un proceso retroactivo imparable. Se pondrán en cuestión, en lo sucesivo, todas las estructuras que, tradicionalmente, eran consideradas dadas, bien establecidas, o intuitivamente «verdaderas». Nada escapará a un análisis riguroso, a una formulación precisa, a una justificación exigente. La matemática se hace sinónimo de «prueba». Sin una prueba no hay nada. Y, más todavía, aparece por primera vez la necesidad de asegurar cuidadosamente que un cierto objeto matemático existe, al margen de consideraciones heurísticas o de analogías con el mundo físico, pues no hay que olvidar que el soporte geométrico inicial del análisis matemático o,

Augustin Louis Cauchy.

posteriormente, su extenso uso en mecánica, hacía que las entidades usadas por los matemáticos fueran percibidas como algo dado, cuya existencia era superfluo demostrar.

Cauchy es especialmente exigente en ello, y esta exigencia forma parte de su programa de fundamentación, demostrando, por ejemplo, que una ecuación diferencial tiene solución, o que una serie de funciones define realmente una función. Esta actitud aparece también en dos de los problemas que los más importantes matemáticos del siglo XVIII habían tratado en la teoría de ecuaciones: el primero, el establecimiento de que todo polinomio tiene un cero real o complejo y, el segundo, el intento de, precisamente, obtener los posibles ceros como funciones algebraicas de los coeficientes del polinomio.

En 1799, Gauss fue el primero en demostrar la existencia de un cero, lo que hoy se llama el «teorema fundamental del álgebra». El segundo problema, atacado por Edward Waring y por Lagrange alrededor de 1770, hubo de esperar hasta 1824 para que la cuestión quedara resuelta negativamente por Abel, quien demostró que la ecuación general de quinto grado no podía ser resuelta por radicales.

---

[33] Por ejemplo, basta sumar, agrupando de dos formas diferentes los sumandos de una serie como:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

para obtener resultados distintos:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0,\ 1 - (1 - 1) - (1 -) - \ldots = 1$$

Simplemente, la serie original no es convergente y, por tanto, no se le pueden aplicar la reglas de cálculo para este tipo de series. Una «solución» propuesta por varios autores fue asignar a la serie dada el valor ½, precisamente por ser la «media» de los valores obtenidos con ambos procedimientos. Teorías posteriores consideraron diversos «procesos de sumación», y no deja de ser interesante que uno de ellos «sume» precisamente ½. Ver, por ejemplo, G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*.

[34] Y, de paso, hace ver que la aproximación algebraica de Lagrange adolecía de un riguroso estudio de la convergencia.

Karl Friedrich Gauss.

Otra figura crucial de la primera mitad del siglo XIX en Francia es Joseph Fourier. Su contribución más importante, y que ha tenido una influencia extraordinaria en el desarrollo de las matemáticas, es la «teoría analítica del calor», de 1822. En ella afirmaba que una función arbitraria podía ser expresada como suma de una serie de funciones trigonométricas. Su aseveración encontró naturales reticencias entre sus contemporáneos. Sin embargo, estas series no eran completamente nuevas, pues Euler ya las había utilizado. Fourier se preocupó de manera especial de su convergencia. Sus resultados, que no fueron concluyentes, abrieron la vía a una investigación profunda precisamente para dilucidar estos aspectos (Dirichlet, Abel, Dini, etc.), exigieron la puesta a punto de teorías de integración de mayor alcance (Riemann, Lebesgue, etc.) e introdujeron la necesidad de un análisis riguroso de ciertos conjuntos de puntos de la recta real (Riemann, Weierstrass, Cantor, etc.). Es posible decir, pues, que una buena parte del avance del análisis matemático y del análisis funcional subsiguiente se debe en parte a los problemas planteados por el análisis de Fourier.

LA TRANSFORMACIÓN DE LA GEOMETRÍA

La historia del quinto postulado de Euclides[35] es una de las más fascinantes de las matemáticas (en la nota 10 proporcionamos la formulación original de éste). Es menos natural que la de los cuatro primeros postulados. Esto ya fue percibido desde el momento de su enunciado, de modo que el mismo Euclides, quizá un tanto incómodo con el mismo, pospone su utilización hasta la proposición I.29 de los *Elementos*. Proclo, en los *Comentarios sobre Euclides* (siglo V), hace notar que ya Ptolomeo, en el año 150, intentó demostrar que era una consecuencia de los otros cuatro postulados. Recurrentemente, el tema vuelve a aparecer en la matemática árabe, en la persa, en el Renacimiento, etc. Se formula una buena cantidad de equivalencias[36]. En realidad, muchas de ellas son el resultado de identificar suposiciones deslizadas subrepticiamente en pruebas erróneas, como las del mismo Proclo, Wallis (1663), Saccheri (1733) y Legendre (de 1794 a 1833); al final, siempre resulta que se ha utilizado una asunción equivalente al propio postulado. Saccheri es el primero que ataca el problema de una forma nueva: supone que el quinto postulado es falso e intenta llegar a una contradicción (el antiguo argumento de la reducción al absurdo). Fue una lástima que, después de un estudio muy cuidadoso, concluyera de forma precipitada la deseada contradicción. Lambert recorrió posteriormente, en 1766, un camino similar y, más prudente, se limitó a exponer sus muy perspicaces conclusiones alternativas.

Casi con simultaneidad, tres autores, Gauss en Alemania, quien ya explicita su sospecha de la posible independencia del quinto postulado de los cuatro precedentes, Bolyai en Hungría y Lobachevski en Rusia, alrededor de 1830, se percatan de algo que tiene una transcendencia extraordinaria: si, en lugar de suponer que por un punto exterior a una recta pasa exactamente una paralela (el quin-

[35] Una magnífica descripción de esta historia, con muchos más detalles que los proporcionados aquí, aparece en H. Eves, *Great Moments in Mathematics. After 1650*, pp. 63-87.

[36] He aquí algunas de las que han sido usadas a lo largo de la historia:

1. Existe un par de rectas coplanarias equidistantes.
2. Por un punto exterior a una recta pasa exactamente una paralela (J. Playfair, 1748-1819).
3. Existe un par de triángulos semejantes no congruentes (J. Wallis, 1616-1703).
4. Si en un cuadrilátero dos lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes a un tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos son también rectos (O. Khayyam, 1044-1123).
5. Si en un cuadrilátero hay tres ángulos rectos, entonces el cuarto es también recto.
6. Existe al menos un triángulo cuyos ángulos suman dos rectos.
7. Por un punto interior a un ángulo menor de sesenta grados se puede trazar una recta que corta a los dos lados del ángulo.
8. Por tres puntos no colineales pasa una circunferencia.
9. El conjunto de las áreas de los triángulos no tiene cota superior.

to postulado), se supone que pasa más de una (equivalentemente, que la suma de los ángulos en la segunda figura es menor que dos rectos o que el ángulo ϕ en la tercera figura es agudo), se obtiene una teoría diferente de la euclídea, posteriormente denominada «de Lobachevski» o hiperbólica.

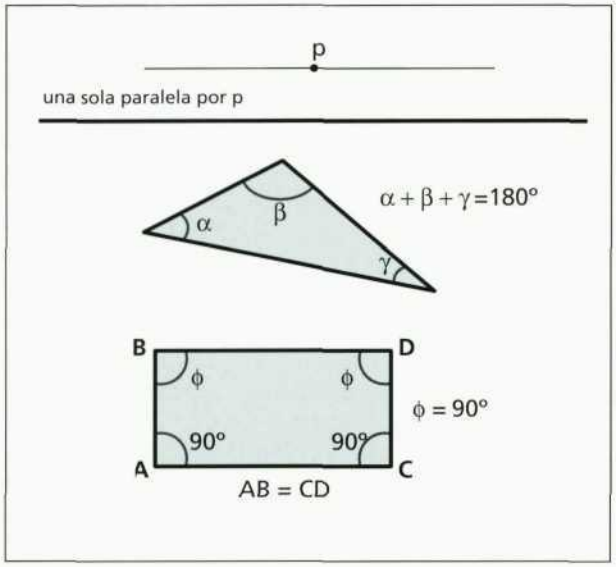


Fig. 4.– Algunas formulaciones equivalentes.

Además fue posible establecer modelos de esta geometría dentro de la geometría euclídea. Por ejemplo, Beltrami, utilizando la pseudoesfera, fue capaz de obtener una representación local, y demostrar que la geometría hiperbólica correspondía al estudio de superficies de curvatura constante negativa, lo que supuso el impulso definitivo para la aceptación de estas nuevas ideas. Otros modelos fueron dados por Poincaré y por Klein. Resulta, pues, que la nueva geometría no es ni más ni menos consistente que la euclídea. Tan sólo distinta[37].

Por otra parte, si se supone que por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela (equivalentemente, que la suma de los ángulos en la segunda figura es mayor que dos rectos o que el ángulo ϕ es obtuso) se obtiene otra, la llamada elíptica o «riemanniana», de aplicación en la teoría de la relatividad de Einstein.

Las consecuencias para las matemáticas y, en general, para la historia del pensamiento humano son extraordinarias: el punto de vista kantiano sobre las matemáticas (conocimiento sintético a priori), entendiendo que los conceptos de espacio (la geometría euclídea) y tiempo están indeleblemente forjados en nuestro pensamiento como marco de referencia del mismo se viene abajo[38]. No hay una geometría «natural» más válida que otra. La investigación del espacio de la física es una cuestión experimental y no es posible obtener juicios válidos para el mundo por el mero ejercicio deductivo. Como consecuencia, se abre la vía para la concepción de las teorías matemáticas como configuraciones autónomas e incluso desprovistas de todo carácter de verdad. Las matemáticas comienzan a interesarse rigurosamente por sus propios fundamentos, se realiza un análisis exhaustivo de sus sistemas formales y se presta una atención especial a los problemas de consistencia, completitud e independencia de los axiomas, al mismo tiempo que se independizan de las ciencias de la naturaleza. La geometría se libera de su molde tradicional y arrastra en ello a todas las matemáticas, que pasan a ser vistas como creación libre del espíritu humano. En cierta forma, y con reservas sobre la palabra que vamos a utilizar, se convierten en una actividad absolutamente «arbitraria»[39].

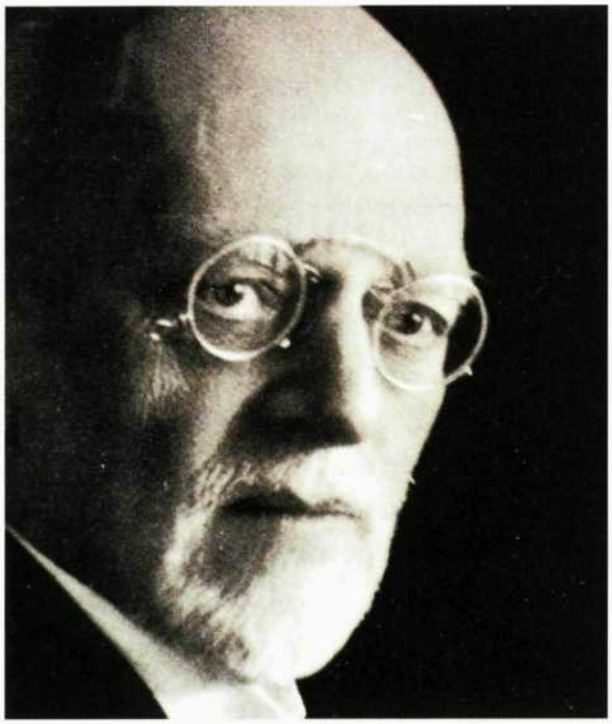
Esta transición revolucionaria está asociada a nombres como el de Felix Klein, quien propone una reorganización de las geometrías en su *Programa de Erlanger*[40], adoptando como elemento unificador el punto de vista de que una geometría es un conjunto de puntos llamado «espacio» y un grupo de transformaciones mediante las cuales las figuras conservan sus propiedades básicas. Esta descripción, que elimina toda referencia a experiencias sensibles o del mundo de la física, fue ampliada por David Hilbert, quien, por otra parte, en su obra *Fundamentos de la geometría* (1899) estableció las bases del formalismo ma-

[37] En expresión de Hersh, «(...) ¡la geometría no euclídea no sólo es consistente, sino que gobierna el universo! (...) La Física no prefiere Euclides a no-Euclides», R. Hersh, *What is Mathematics, really?*, p. 132.

[38] La reflexión sobre las matemáticas es central en Kant: la primera parte de sus *Prolegómenos a cualquier futura metafísica que pueda convertirse en ciencia* se titula *¿Cómo son posibles las matemáticas puras?* El supuesto fundamental es que «el conocimiento significativo independiente de la experiencia (el "sintético a priori") puede establecerse sobre la base de la intuición humana». Los ejemplos proporcionados en la *Crítica de la razón pura* son: 1) la intuición espacial o fundamentación de la geometría y 2) la intuición temporal o fundamentación de la aritmética. En la *Crítica de la razón práctica* añade una tercera intuición, aunque no usa el término «sintético a priori»: 3) la intuición moral o la fundamentación de la religión.

[39] H. Poincaré, en *Ciencia y método*, p. 24, dice: «¿Dirán que los geómetras debemos limitarnos a esperar los pedidos y, en lugar de cultivar nuestra ciencia para nuestro placer, no tener otra preocupación más que la de acomodarnos al gusto de nuestra clientela? Si las matemáticas no tienen otro objeto más que acudir en ayuda de los que estudian la naturaleza, es lógico que de estos últimos debemos esperar la palabra de orden. ¿Es legítima esta manera de pensar? De ningún modo; si no hubiéramos cultivado las ciencias exactas por ellas mismas, no habríamos creado el instrumento matemático, y el día en que hubiera venido la orden del físico nos hubiera encontrado desarmados».

[40] En 1872, Felix Klein (1849 - 1925) fue nombrado miembro de la Facultad de Filosofía y del Senado de la Universidad de Erlanger y pronunció, como era costumbre, una disertación inaugural sobre un tema de su especialidad, que ha pasado a ser conocida como el «Programa de Erlanger». Utilizó información procedente de sus propias investigaciones y de las del matemático noruego Sophus Lie (1842 - 1899) (ver H. Eves, *Great Moments in Mathematics. After 1650*, p. 119).



David Hilbert.

temático explícitamente, desproveyendo de carácter de «verdad» a los postulados de una teoría y exigiendo como único requisito a la construcción del sistema su preciso carácter deductivo. Como hemos dicho, este programa pasó a ser aplicado a todas las ramas de las matemáticas.

Las experiencias con las nuevas geometrías, los estudios cada vez más delicados de los problemas de convergencia en análisis matemático, la investigación de conjuntos de puntos de la recta real, así como la aparición de ideas conjuntistas y topológicas, prepararon el campo para investigaciones de un carácter más profundo y al mismo tiempo más fundamental. Si hasta ahora el sistema de números reales era la base más sólida con la que se contaba, la intrincadísima estructura de esos mismos números, que sólo en este momento empezaba a vislumbrarse, exigió que se retrotrajera su fundamentación a una estructura más simple, la de los números naturales, de modo que Weierstrass y Dedekind, entre otros, propusieron la construcción jerarquizada de los números reales desde los naturales pasando por los enteros y los racionales. Puesto que en todos los casos se manejaban conjuntos infinitos, fue natural prestar una especial atención al estudio de este tipo de conjuntos.

Heredero de las investigaciones sobre convergencia, G. Cantor (1845 - 1918) inició un estudio absolutamente revolucionario sobre conjuntos. Si una de las operaciones básicas es contar, argumenta Cantor, y ello equivale a asociar un número natural a cada conjunto finito, dos conjuntos en general, no necesariamente finitos, tienen el mismo número de elementos cuando, análogamente, a cada uno de los del primer conjunto se puede asociar exactamente otro del segundo, de modo que no quede en ninguno de ellos algún elemento por emparejar. Demuestra que hay tantos números naturales como racionales, algo que viola la intuición elemental de que el todo es mayor que la parte [41] y, todavía más sorprendente, que hay estrictamente más números reales que naturales. Cantor inicia un estudio del infinito de consecuencias más transcendentales que lo que en este terreno se había hecho hasta entonces. Según su clasificación, existe una jerarquía infinita de conjuntos en relación con el número de elementos que contienen (números cardinales) o según como puedan ser ordenados (números ordinales). La transcendencia de los resultados de Cantor va más allá que el ya de por sí muy importante estudio del infinito. Por una parte, amplía el concepto de número, permitiendo contar y ordenar conjuntos para los que el número natural es insuficiente y, por otra, minimiza la importancia de los naturales como base de todo el sistema de las matemáticas, haciendo depender sus fundamentos de cuestiones de lógica y de teoría de conjuntos. Los delicados problemas que surgen en estos análisis requieren una formulación precisa de ambas teorías.

Tres escuelas compiten por la orientación de esta búsqueda de base. La logicista propone derivar todo el edificio matemático de las proposiciones de la lógica formal. La formalista propone la matemática como un sistema de axiomas junto con un conjunto de reglas deductivas y, finalmente, la intuicionista exige que todas las matemáticas se basen constructivamente, en un número finito de pasos, en los números naturales, que nos son dados por una «intuición fundamental».

La primera escuela tuvo uno de sus más ardientes defensores en la figura de Bertrand Russell. Sin embargo, hay que hacer notar que éste revisó, con una honestidad intelectual digna del mayor encomio, parte de su propio punto de vista, de modo que, en realidad, la posición logicista (que tanto le debió) recibió un golpe mortal con la formulación por parte de él mismo y de Burali Forti de conceptos definidos dentro de la más estricta ortodoxia que probaban que, en el interior de la teoría de conjuntos, podían aparecer complicaciones extremadamente serias, pues llevaban indefectiblemente a contradicción [42]. La llamada

[41] Desde la Antigüedad era conocido que la noción de infinito conducía inmediatamente a construcciones aparentemente paradójicas. Galileo, en un famoso ejemplo, observó que los números naturales podían ser puestos en correspondencia biunívoca con los cuadrados, aunque los enteros aparecían como más numerosos que los cuadrados. Deduce de aquí que «los atributos "igual", "mayor" o "menor" no son aplicables a cantidades infinitas», ver S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, 1985.

[42] En el prólogo a la segunda edición de sus *The Principles of Mathematics*, prólogo que comentamos en la nota 43, Russell dice, con cierta dosis de humor: «Henri Poincaré, quien consideraba que la lógica matemática no podía ayudar al descubrimiento y, por tanto, era estéril, se regocijó con las contradicciones: "¡La lógica ya no es estéril; engendra la contradicción!"», B. Russell, ob. cit., p. XII.

Bertrand Russell.

«paradoja de Burali Forti» concierne a la existencia del mayor ordinal: si se supone que hay uno, N, el mayor, dado que el número de ordinales de 0 a N es $N+1$ se obtiene uno estrictamente mayor; si se considera, por el contrario, que no existe un mayor ordinal, la serie de todos los ordinales tiene como ordinal uno mayor que todos. Otra de las mencionadas en los *Principia* (Russell, 1925) surge cuando se considera el mayor cardinal: la clase que contiene todos los conjuntos tendría el mayor cardinal y, por otra parte, la clase de sus subconjuntos tiene, según Cantor, un cardinal estrictamente mayor. La tercera de las paradojas propuestas afecta a la propia definición de conjunto; nada impide considerar que un conjunto pueda contener como uno de sus elementos a él mismo. ¿Qué ocurre –propone Russell– cuando se toma el conjunto formado por todos aquellos conjuntos que no son elementos de sí mismos? Si ese conjunto es elemento de sí mismo, se obtiene una contradicción; si no lo es, también [43].

La segunda escuela, de la cual David Hilbert se erigió en adalid, tenía como programa la reducción de todas las matemáticas, incluyendo la lógica, a sistemas formales que debían poseer estas propiedades: ser consistentes (es decir, no debería poder probarse dentro de ellos una afirmación y su contraria), completos (es decir, cualquier proposición correctamente formada con sus elementos se derivaría de los axiomas) y decidibles (es decir, debería existir un algoritmo que permitiera decidir, en un número finito de pasos, cómo una proposición era deducible de los axiomas).

Pues bien, este programa fue echado abajo por las contribuciones revolucionarias de Gödel, quien probó que no había sistema formal consistente y completo que contuviera la aritmética elemental (1931) y por Gödel y Turing, quienes probaron que tampoco podía ser decidible [44]. Aspectos sorprendentes salieron a la luz, como la prueba de Cohen (1963) de que la hipótesis del continuo, es decir, la suposición de que el cardinal de los números reales es el siguiente al de los números naturales, es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos, otra instancia, junto con la ya discutida del estudio realizado en

[43] En 1903, Russell editó una de sus obras más ambiciosas (hasta en el título), *The Principles of Mathematics* (obra escrita evitando en lo posible el simbolismo lógico o matemático, y que luego, en colaboración con Whitehead, y con el título *Principia Mathematica* [1910, 1912, 1913], adoptaría un aspecto formal). En ambas, el propósito declarado es demostrar que las matemáticas y la lógica son idénticas. Es otra vez una extraña ironía que los creadores de una obra que «fue inmensamente influyente entre los lógicos durante muchos años» *(The New Encyclopaedia Britannica*, vol. 10, p. 250, 1.a) se hubieran percatado de las deficiencias de su construcción (y de la falta de carácter concluyente) casi en el mismo momento en el que escribían sus últimas proposiciones. Nada más reveladora que la lectura del prólogo escrito por el propio Russell a la segunda edición de sus *The Principles of Mathematics* (1937). En éste, inmediatamente después de decir que «el interés que el libro pueda poseer ahora es histórico y consiste en el hecho de que representa un cierto estadio en el desarrollo de la materia», pasa a discutir lo que, en su opinión, sigue siendo vigente de su contenido y lo que considera erróneo. Sigue adhiriéndose a su original punto de vista: «Desde entonces no he tenido ninguna razón para modificar la tesis fundamental de las páginas siguientes, que las matemáticas y la lógica son idénticas» (p. V). El grado de crítica que el propio autor, sin embargo, ejerce sobre su obra, se trasluce en los siguientes comentarios: «(...) una proposición puede satisfacer la definición con que se abre los *Principia*, y, a pesar de todo, puede ser imposible probarla matemática o lógicamente» (p. IX). Y también «Lo que se afirma acerca de teoremas de existencia en el último párrafo del último capítulo de los *Principia* (pp. 497-498) ya no es válido para mí: tales teoremas de existencia, con ciertas excepciones, son, debería decir ahora, ejemplos de proposiciones que pueden ser *enunciadas* en términos lógicos, pero que pueden ser sólo probadas o refutadas por evidencia empírica» (p. VIII). Las líneas de pensamiento que, según Russell, entran en oposición con la defendida por los *Principia*, son las de los formalistas y la de los intuicionistas. Respecto a los primeros, Russell argumenta que omiten el propósito de una teoría, y que asimilan «existencia» a «no-contradicción». En relación con los segundos, considera la posible refutación más difícil, y sólo indica que el aceptar su punto de vista «barrería toda la ciencia y todas las matemáticas» (p. VII). Por otra parte, Russell envió a Frege una carta que contenía su paradoja («antinomia», en términos más suaves) sobre la definición de conjunto, precisamente cuando este último estaba a punto de publicar el segundo volumen de una obra monumental que reconstruía la aritmética a partir de la teoría de conjuntos en su forma intuitiva, los *Grundgesetze der Arithmetik*. Frege añadió en una addenda: «Difícilmente un científico se puede encontrar con algo menos deseable que tener que desechar los fundamentos de su obra precisamente cuando ésta está acabada. En esta posición me he encontrado gracias a una carta de Mr. Bertrand Russell, cuando mi obra estaba prácticamente en prensa» (ver P. J. Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience*, p. 332).

[44] Ver la nota 8 y la referencia bibliográfica allí mencionada.

Kurt Gödel.

torno al quinto postulado de Euclides, de que existen en matemáticas afirmaciones que no son ni verdaderas ni falsas dentro de un sistema.

Respecto al intuicionismo o constructivismo (con Brouwer a la cabeza) quizá, como decía Russell [45], no sea posible su refutación o superación estrictamente hablando, pues no se trata exactamente de un programa, sino de la limitación de un programa existente. Los constructivistas no aceptan una buena parte de las pruebas matemáticas, aquellas que no son «constructivas» (por ejemplo, rechazan la ley del tercero excluido, así como el axioma de elección). La objeción es, simplemente, que esta posición tendría «consecuencias desastrosas» [46] para las matemáticas y para la ciencia.

Las matemáticas viven hoy sometidas a dos fuerzas aparentemente contrapuestas, pero que en realidad son manifestaciones de un mismo fenómeno; por una parte, su crecimiento es extraordinario, tanto en su desarrollo interno como en sus aplicaciones, habiéndose constatado de la forma más completa posible la afirmación de Galileo de que «el gran libro de la Naturaleza (...) está escrito en lenguaje matemático» [47]. Hemos mencionado algunos de sus desarrollos, pero es imposible presentar otros muchos, tanto en matemáticas puras (geometría algebraica, topología algebraica, teoría de categorías, teoría de grupos y álgebras, teoría de números, análisis funcional...), en sus aplicaciones a la física (álgebras y grupos de Lie, fibrados vectoriales, operadores elípticos...), en sus aspectos computacionales, así como en el impacto producido por el uso de ordenadores.

Por otra parte, en la dirección de las grandes síntesis, se ha agudizado progresivamente la percepción de que subyacen unos modelos generales y unas estructuras fundamentales que soportan el gran edificio, proporcionando un esqueleto simplificador, y le dan su coherencia interna [48]. Hemos mencionado el término «progresivamente», ya que la clarividencia no es y no ha sido nunca instantánea. A título de ejemplo, consideremos la teoría de ecuaciones. Las fundamentales aportaciones a la misma por parte de Gauss y Lagrange iniciaron la transformación del álgebra. El segundo atacó el problema de la solución de las ecuaciones polinómicas en términos de las permutaciones de sus raíces. Galois situó estas cuestiones en el más amplio contexto de la teoría de grupos, una estructura absolutamente básica y que sistematizó también la geometría y la teoría de números. Tomemos un

[45] Ver la nota 46.

[46] La frase es, otra vez, de Russell en el prólogo a su obra *The Principles if Mathematics,* p. VII. Precisamente dice que «Las consecuencias desastrosas, sin embargo, no pueden ser la prueba de que una teoría es falsa; y la doctrina finitista, si pudiera ser refutada, sólo lo sería desde una teoría completa del conocimiento. No creo que sea cierta, pero no pienso que exista una refutación breve y fácil».

[47] Galileo Galilei, *Opera Omnia,* Opere VI, Saggiatore, p. 232. La cita es: «El gran libro de la Naturaleza está continuamente abierto ante nuestros ojos y la verdadera filosofía está escrita en él (...). Pero no podríamos leerlo a menos que hubiéramos primero aprendido el lenguaje y los caracteres en los que está escrito (...). Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas».

[48] Una descripción de estas estructuras puede encontrarse en el artículo de N. Bourbaki *La arquitectura de las matemáticas,* en F. Le Lionnais y cols., *Las grandes corrientes del pensamiento matemático,* pp. 36-49. En un momento dado se afirma: «Ahora podemos comprender lo que, de una manera general, debe entenderse por una *estructura matemática.* El rasgo común de las diversas nociones agrupadas bajo este nombre genérico es que se aplican a conjuntos de elementos cuya naturaleza *no está especificada;* para definir una estructura, se dan una o varias relaciones en las que intervienen estos elementos (...); se postula luego que la o las relaciones dadas satisfacen ciertas condiciones (...) que son los *axiomas* de la estructura considerada. Hacer la teoría axiomática de una estructura es deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura, *con exclusión de toda otra hipótesis* acerca de los elementos considerados (en particular, toda hipótesis sobre su "naturaleza" propia», pp. 41-42. N. Bourbaki, un nombre que tomó prestado de un general de Napoleón III un grupo de matemáticos franceses (grupo que fue variando con el tiempo, y cuya composición era en principio secreta, pero que contó entre sus elementos más estables a H. Cartan, A. Weil, J. Dieudonné, C. Chevalley, R. De Possel, C. Ehresmann, P. Samuel, J. P. Serre, L. Schwartz y A. Douady), abordó la ambiciosa tarea de redactar un tratado de matemáticas que comprendiera todas las conocidas hasta el momento, expuestas de forma sistemática y con una aproximación estructural y organizativa irreprochable (el primer libro aparecido es la *Teoría de conjuntos).* Por supuesto, su tratado se denominó *Elementos de matemáticas.* El término «estructura» es el pilar fundamental de su gran proyecto.

segundo ejemplo. La constatación de que las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, las lineales, se podían expresar como sumas, quizá infinitas, con ciertos coeficientes, de unas soluciones básicas, alumbró la idea fundamental de la linealidad en términos de espacios vectoriales, de aplicaciones lineales entre ellos (teoría de operadores) y de matrices. El análisis lineal es hoy una teoría que permeabiliza diversos campos de las matemáticas. El análisis vectorial forma parte del lenguaje común de partes de la física e ingeniería.

Como tercer ejemplo consideremos que los estudios acerca de la naturaleza de conjuntos de puntos, iniciados, como se ha mencionado, en el análisis delicado de la convergencia de las series trigonométricas llevó, por una parte, al desarrollo de teorías de medida e integración adecuadas y, por otra, al desarrollo de una «geometría sin coordenadas», la topología, donde el énfasis se hace sobre aquellas propiedades de una figura que no cambian por transformaciones continuas con inversas continuas. Finalmente, la convergencia y la jerarquía del infinito son manifestaciones de estructuras asimismo abstractas y fundamentales, las de orden.

Estas estructuras no están de ninguna manera dadas de una vez por todas, sino que, al contrario, son cambiantes y polimorfas, se ramifican en subestructuras y se combinan en otras. El futuro, seguramente, proporcionará elementos aglutinantes y simplificadores de potencia ni siquiera hoy entrevista y, al mismo tiempo, expandirá las teorías existentes y creará otras nuevas en ese dialéctico movimiento de análisis y desarrollo, por una parte, y síntesis, por otra, de la más grande, libre y bella creación del intelecto humano. Podemos terminar diciendo, con Hardy, que la belleza es el test decisivo, pues «no hay lugar en el mundo para matemáticas feas» [49] y, con Cantor, que «la libertad es la esencia de las matemáticas».

BIBLIOGRAFÍA

1. Bell E. Temple (1987) *Mathematics, Queen and Servant of Science.* Ed.: MAA Spectrum. The Mathematical Association of America. Washington.
2. Boyer, Carl. B. (1949) *The Concepts of the Calculus: A Critical and Historical Discussion of the Derivative and the Integral.* Reeditado con el título (1959) *The History of the Calculus and its Conceptual Devlopment.* Citado en The New Encyclopaedia Britannica (15.th Ed. 1991), vol. 23, 633 F, 2.b.
3. Davis, P. J. y Hersh, R. (1981) *The Mathematical Experience.* Ed.: Houghton Mifflin Co. Boston. Birkhäuser.
4. Descartes, R. (1981) *Discurso del Método.* Ed.: Alianza Editorial.
5. Elena, A. (1983) *Nicolás Copérnico, Thomas Digges, Galileo Galilei: Opúsculos sobre el movimiento de la Tierra.* Ed.: Alianza Editorial.
6. Eves, H. (1983) *Great Moments in Mathematics. Before 1650.* Dolciani Mathematical Expositions No. 7. Ed.: The Mathematical Association of America.
7. Eves, H. (1983) *Great Moments in Mathematics. After 1650.* Dolciani Mathematical Expositions No. 7. Ed.: The Mathematical Association of America.
8. Galilei, G.: *Opera Omnia.* Opere VI. Saggiatore.
9. Hardy, G. H. (1941) *A Mathematician's Apology.* Ed.: Cambridge University Press.
10. Hardy, G. H. (1949): *Divergent Series.* Ed.: Oxford University Press.
11. Hersh, R. (1997) *What is mathematics, really?* Ed.: Jonathan Cape. London.
12. Hofstadter, D. R. (1979) *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.* Ed.: Basic Books.
13. Kline, M. (1979) *Mathematics in Western Culture.* Penguin Books. Ed.: Oxford University Press.
14. Kuhn, T. S. (1971) *La Estructura de las Revoluciones Científicas.* Ed.: Breviarios. Fondo de Cultura Económica.
15. Kuhn T. S. (1978) *La Revolución Copernicana.* Col. Ciencia de la Ciencia, Vol. 2. Ed.: Ariel.
17. Lakatos, I. (1976) *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* J. Worrall and E. G. Zahar. Ed.: Cambridge University Press.
17. LeLionnais, F. y colaboradores (1976) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Ed.: Editorial Universitaria de Buenos Aires.
18. Loomis, E. S. (1940) *The Pythagorean Proposition.* Ed.: Impresión privada, Edwards Brothers. Distribuido por The National Council of Teachers of Mathematics, Washington D. C. (citado en Eves, H. (1983) *Great Moments in Mathematics. Before 1650.* Dolciani Mathematical Expositions No. 7. Ed.: The Mathematical Association of America, p. 28).
19. Mahoney M. S. (1978) Mathematics. En: *Science in the Middle Ages* Editor D. C. Lindberg. (Citado en The New Encyclopaedia Britannica (15.th Ed. 1991), vol. 23, 633 F, 2.b.

[49] G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology.* Las declaraciones, tremendamente personales y, al mismo tiempo, tan universales que pocos matemáticos rechazarán, contenidas en esta obra, reflejan una concepción extraordinariamente «artística» de las matemáticas, asimiladas a «matemáticas puras». Ver, por ejemplo, esta frase: «Las mejores matemáticas son *serias* tanto como *hermosas* –"importantes" si se desea, pero la palabra es muy ambigua, y "serias" expresa lo que quiero decir mucho mejor», G. H. Hardy, ob. cit., p. 89. Y sobre el mismo tema: «Dije que un matemático era un hacedor de modelos de ideas, y que la belleza y la seriedad eran los criterios con los que sus modelos deberían ser juzgados», *ídem*, p. 98.

20. Platón (1966, 1969) *Obras Completas.* Ed.: Aguilar.
21. Poincaré, H. (1963) *Ciencia y Método.* Ed.: Espasa Calpe, Colección Austral.
22. Pólya G. (1977) *Mathematical Methods in Science.* Ed.: The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, 26.
23. Russell, B. (1964) *The Principles of Mathematics.* (8.ª Edición, 1.ª Edición: 1903). Ed.: George Allen and Unwin.
24. Russell, B. and Whitehead, N. (1925) *Principia Mathematica.* Ed.: Cambridge University Press.
25. Simmons, G. F. (1992) *Calculus Gems. Brief Lives and Memorable Mathematics.* Ed.: McGraw-Hill, Inc.
26. *The New Encyclopaedia Britannica,* 15.th Ed.: 1991.
27. Wagon, S. (1985) *The Banach-Tarski Paradox.* Ed.: Cambridge University Press.
28. Wigner, E. P. (1960) The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Comm. on Pure and Appl. Math.* **13**, 1-14.