LA ESTRUCTURA RACIONAL DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO. EL INFINITO MATEMÁTICO

MANUEL LÓPEZ PELLICER
Real Academia de Ciencias

INTRODUCCIÓN

Con naturalidad hablamos de conjuntos infinitos como el de los números pares. Su existencia parece estar vinculada a nuestro pensamiento, y, desde luego, no es posible construir un ordenador con suficiente memoria para almacenar físicamente un conjunto infinito de números.

Otra cuestión de interés sería la posibilidad de obtener un ordenador que pudiese responder a todas las cuestiones matemáticas. Si la respuesta fuese positiva, la estructura del pensamiento matemático se podría identificar con el *software* de ese ordenador y la creatividad matemática sufriría un serio descalabro. Afortunadamente, la respuesta también es negativa, lo que, por otra parte, complica el análisis de la estructura racional del pensamiento matemático, que estudiaremos a través de las aportaciones de algunos de sus creadores, muchos de los cuales exploraron con singular cariño el infinito matemático. Debido a lo reducido del espacio se notarán omisiones. La presentación se hace indicando el marco histórico con alguna anécdota para ilustrar el desarrollo del proceso creativo de la estructura matemática.

Las matemáticas nacieron por la necesidad de comparar, contar y medir, y su primer fruto fue un conjunto de resultados en los que ya se advertía cierta organización deductiva y que constituyen el legado egipcio y oriental que fue estructurado por el genio griego mediante la utilización sistemática de los procedimientos generales del pensamiento, incorporando la demostración que permite adjetivar a las proposiciones decidibles con los calificativos verdadero o falso. Los griegos utilizaron objetos matemáticos, que consideraban reflejos de la armonía del Universo, por lo que en parte redujeron la misión del matemático a la observación. Su matemática, más contemplativa que constructiva, estuvo vinculada a los ideales de la belleza y la armonía.

Los árabes sintetizaron los conocimientos matemáticos de los griegos y de los calculadores hindúes, popularizando la numeración decimal con la utilización posicional del cero. De este modo descubrieron que se puede operar con magnitudes sin saber su significado y así nació el álgebra, que Descartes transformó en una disciplina independiente que no apoya sus desarrollos en consideraciones extrañas al álgebra, pues parte de unas definiciones y unas propiedades elementales sobre las que va construyendo la larga cadena de razones de la que hablaba Descartes, y que la veía como la estructura por la que debe discurrir el razonamiento abstracto, idea recogida por Newton al decir que «para resolver un problema con números o relaciones abstractas basta con traducirlo al sistema algebraico».

Newton elaboró los fundamentos del cálculo diferencial e integral, y nos dio métodos simples aplicables a resolver problemas aparentemente no correlacionados. Lo mismo, con mayor éxito aún, hizo su genio sintético en física, con el apoyo del cálculo y la convicción de que las matemáticas eran el lenguaje del Universo.

Leibniz también llegó a los fundamentos del cálculo de forma independiente y quiso dar un paso más al pretender extraer las ideas subyacentes en las pruebas matemáticas rigurosas, para reducir todos los razonamientos y descubrimientos a una combinación de ciertos elementos básicos, buscando el álgebra del pensamiento.

Los dos últimos siglos han traído la teoría de conjuntos. La obra de Cantor ha permitido trabajar con conjuntos infinitos y con lo que hoy conocemos como infinito actual, que había sido evitado desde los griegos hasta Bolzano. Hasta poco después de Cantor se creía que de cualquier proposición se podría averiguar si era o no cierta, por lo que Cantor hizo esfuerzos en vano para demostrar la hipótesis del continuo, que supone que no hay ningún cardinal entre los cardinales de los conjuntos de los números naturales y de los reales.

Frege intentó reducir la estructura racional del pensamiento matemático a una axiomática del corte idealista de la teoría de conjuntos de Cantor que, invalidada por la paradoja de Russell, exigió la elaboración de otras axiomáticas para las que Gödel probó que al contener a la aritmética elemental eran capaces de darnos proposiciones cuya verdad o falsedad era indemostrable dentro del sistema axiomático, siendo una de esas proposiciones la hipótesis del continuo, con lo que probó que Cantor nunca hubiese podido demostrarla.

«Nunca, pues, podremos programar un ordenador para contestar a todas las preguntas matemáticas posibles», y la estructura racional del pensamiento matemático se reduce a entes abstractos y axiomas sobre esos entes que no lleven a ninguna contradicción. Las definiciones de los entes abstractos las sugieren los objetos reales (línea recta, sólido rígido...) o las crea el espíritu humano para resolver problemas físicos o matemáticos (números imaginarios, cardinales transfinitos...) [1].

EL INICIO MATEMÁTICO

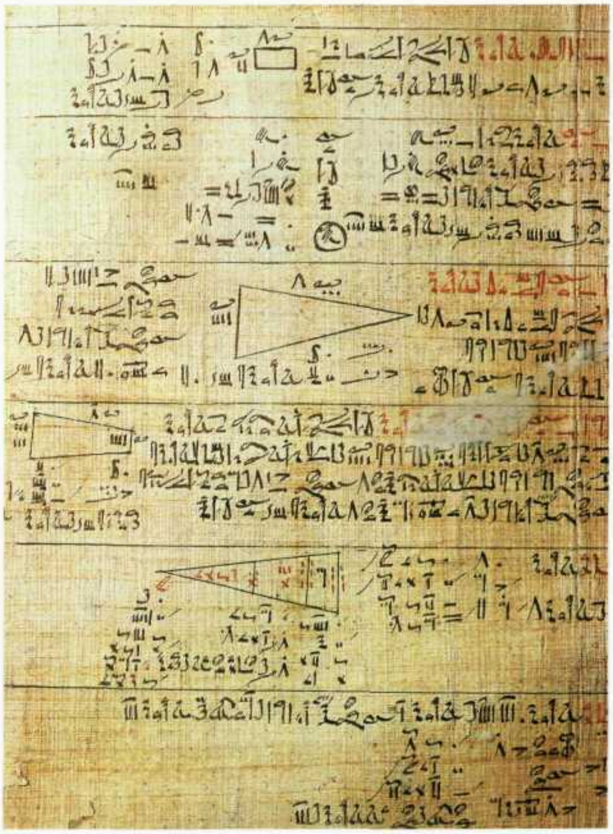
Las primeras manifestaciones matemáticas tuvieron carácter empírico y finalidad utilitaria, primero para comparar y después para contar, sentando la base del concepto de número. Luego, los problemas de medición y construcción llevaron a las primeras consideraciones geométricas. La necesidad de reponer los lindes de los campos después de las inundaciones del Nilo llevó a los egipcios a elaboraciones geométricas. El significado etimológico de geometría en griego es medida de la Tierra (de γή, *ge,* Tierra, y μέτρον, *metron,* medida).

Las culturas egipcia y babilónica ya manejaron fórmulas que exigen enlazar razonamientos y cierto grado de abstracción, como las fórmulas del volumen del tronco de pirámide de base cuadrada y la del área de la semiesfera, así como métodos para la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y de sistemas de ecuaciones lineales.

Gran parte de nuestro conocimiento de las matemáticas egipcias se debe al escriba Ahmes (hacia 1680 a. C. - 1620 a. C.), quien, alrededor del 1650 a. C., copió el hoy llamado Papiro Rhind o Papiro de Ahmes, que fue comprado en Egipto en 1858 por el egiptólogo escocés Alexander Henry Rhind. Desde 1863, el Papiro Rhind se encuentra en el Museo Británico. Ahmes dice que el material proviene de otra obra de alrededor del 2000 a. C. Contiene problemas relativos a las cuatro operaciones, soluciones de ecuaciones, progresiones y la primera referencia escrita al problema de la cuadratura del círculo, aproximando π por $(4/3)^4$.

LOS PITAGÓRICOS Y LA ESTRUCTURACIÓN CIENTÍFICA DE LAS MATEMÁTICAS

El tránsito del hombre de la experiencia al hombre de la razón lo da, fundamentalmente, el genio griego. Este paso intelectual, llamado *el milagro griego,* consiste en la ordenación deductiva *con demostración* de los legados matemáticos egipcio, oriental y de sus propias aportaciones, mediante el uso sistemático de los procedimientos generales del pensamiento, *análisis y síntesis,* que además les llevaron a las *generalizaciones* y *abstracciones.* Desde los griegos estos procesos mentales están al servicio del hombre.



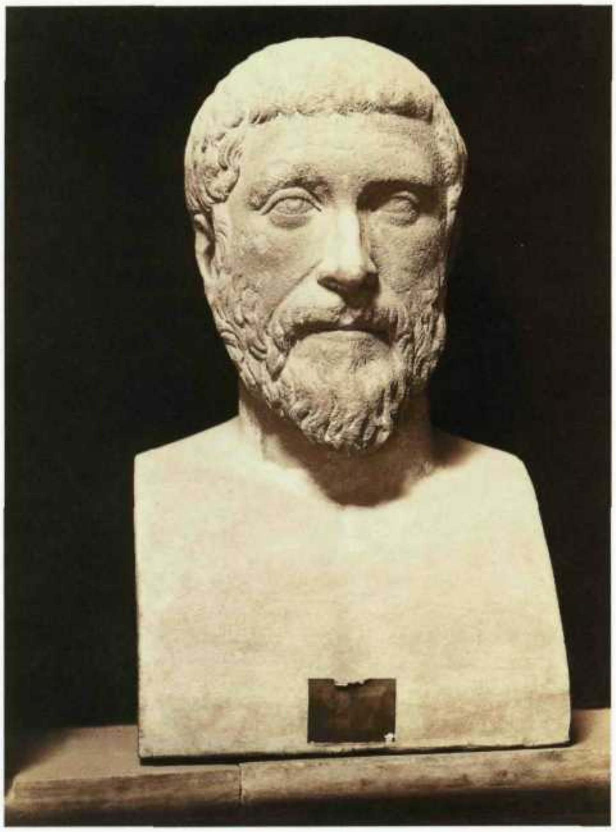
Papiro Rhind o papiro de Ahmes.

La cultura griega tuvo la influencia de los legados egipcio y oriental. Pitágoras y Platón, por ejemplo, estuvieron en Oriente. Sin embargo, al genio griego hay que atribuirle:

- La transformación de las técnicas utilitarias recibidas en *concepciones sistemáticas.*
- La consideración de *conceptos generales* y la introducción de *objetos matemáticos.*
- La incorporación de la *demostración* para discernir la *veracidad* de los razonamientos.
- Y la introducción de los *postulados,* que son enunciados que hay que admitir sin demostración.

La organización de las matemáticas como ciencia comienza a producirse en el siglo VI a. C., gracias a Pitágoras de Samos (hacia 570 a. C. - 480 a. C.), que creía en la transmigración de las almas, concebida como un castigo al verse el alma obligada a vivir varias vidas para conseguir la purificación, pasando de una persona a otra e incluso morando en animales o plantas, y afirmaba que la

[1] Algunas figuras de esta conferencia se encuentran en el índice de biografías de la dirección http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html



Pitágoras de Samos.

mejor purificación para librarse de la rueda de la reencarnación se obtiene dedicándose a la ciencia desinteresada. De ahí su interés en el estudio de los números, las figuras y sus relaciones. Además, esas relaciones las consideraba reflejos de la armonía de la naturaleza, por lo que sentía la convicción de que el conocimiento matemático puro le haría penetrar en lo intrínseco de la naturaleza y en el fondo de su belleza, a la que debía conformar su conducta ética. Esta convicción le llevó a fundar una sociedad científico-religiosa para descubrir lo más íntimo y bello del Universo a través de la penetración en la estructura interna de los números.

Así, los pitagóricos descubrieron la relación entre las longitudes de las cuerdas de una lira y los acordes fundamentales de la música, y trabajaron con *entes matemáticos abstractos, ideales, perfectos y eternos, que creían que existían fuera del espacio y del tiempo, independientes del hombre, captados por su pensamiento e independientes de sus representaciones*, ya que por muy perfectas que se dibujen las figuras de una recta, triángulo o círculo tienen irregularidades, lo que les llevó a las ideas o entes matemáticos de recta, triángulo o círculo. La relación entre los entes matemáticos y sus representaciones en figuras es la misma que la existente entre las ideas y sus concreciones en palabras, siempre imágenes imperfectas de las ideas. Más tarde, Platón irá mucho más lejos con su conocida teoría de las ideas, cuyo carácter general transciende las matemáticas.

También representaron los números por puntos y expresaron propiedades geométricas por relaciones numéricas, de las que la más famosa que se les atribuye, el teorema de Pitágoras, era conocido varios siglos antes de la época pitagórica. No se atribuye a Pitágoras ninguna de las 367 demostraciones reunidas por Elisha Scott Loomis a principios del siglo XX en el libro *The Pytagorean Proposition*. Las demostraciones están clasificadas en algebraicas, geométricas, dinámicas y cuaterniónicas. Una de ellas se debe a James A. Garfield, que llegó a ser presidente de Estados Unidos.

La admiración de sus logros llevó a los pitagóricos a proclamarse *amigos de la sabiduría*, a creer que habían penetrado en la estructura interna de los números y a intentar unificar los conocimientos matemáticos sobre el concepto de número. Un atrevimiento posterior les llevó a dar tanta importancia a los números que afirmaron que todas las cosas eran números. Con esta afirmación sin sentido parece que querían expresar que el mundo era atómico y que los cuerpos estaban formados por átomos, que agrupados según ciertas estructuras geométricas, definidas por secuencias numéricas, permitirían construir figuras.

LAS RESTRICCIONES PITAGÓRICAS Y LO IRRACIONAL

El trabajo matemático pitagórico no consistió en la creación de objetos matemáticos, que creían que ya existían, sino en descubrir sus propiedades, que debían ser reflejo de una armonía de la naturaleza supuesta a priori por los pitagóricos, lo que originaba unos ideales de claridad, orden, precisión, belleza y armonía, e imponía al pensamiento unos límites artificiales, creados por los mismos pitagóricos, que convertían a la razón en una máquina de fabricar lo irracional al chocar con inexistentes fronteras impuestas que les impedían lanzarse por los caminos oscuros que se abrían ante sus ojos.

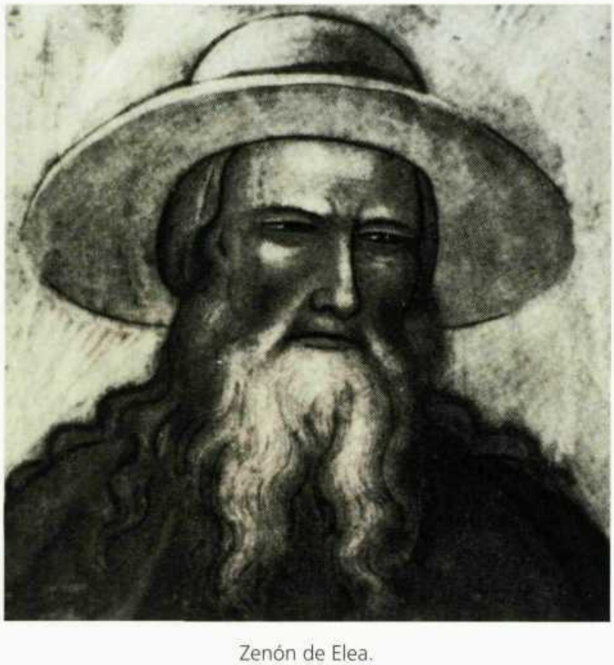
Los ideales de belleza llevaron a adoptar el pentágono regular como uno de sus símbolos, del que Hypaso de Metaponto encontró que la diagonal y el lado eran inconmesurables, lo que con nuestro lenguaje significa que el cociente de sus longitudes no es racional, descubrimiento que decidieron mantener en secreto dado que habían limitado a priori la existencia de números a los racionales. Tampoco el descubrimiento por reducción al absurdo de que no era racional el número $\sqrt{2}$, obtenido por el cociente entre las longitudes de la diagonal y el lado de un cuadrado, les curó de su desconfianza ante los inconmensurables.

Así quedó abortada la mayor aportación de los pitagóricos, el descubrimiento de los números irracionales, pues cometieron el error de apoyarse en unas afirmaciones que sostenían por encima de la audacia de la duda o del escrúpulo de la verificación. Antes de abordar la empresa científica propiamente dicha ya se suponían en posesión de los marcos en los que debía moverse la investigación y se atribuían el poder de fijar el carácter y el alcance de los resultados a que podían llegar.

Pronto, en el polo opuesto, se abrió paso la reflexión crítica que sigue modesta y seriamente los pasos que el pensamiento da para el planteamiento de los problemas y la demostración de los teoremas. Cuanto más originales, audaces e imprevisibles sean estos pasos, tanto más preciosos los considera para conseguir la conquista de los productos en los que el pensamiento tenga tendencia natural a concentrarse.

El propio Platón (427 - 347 a. C.) buscó en el estudio de las magnitudes irracionales el apoyo para su doctrina de la partición, en lo que llamó más allá del número mismo. Su intento no tuvo éxito, tal vez por coincidir con la decadencia de la Academia y por la multiplicidad de los temas tratados por la enseñanza platónica.

En la obra de Theaetetus de Atenas (417 - 369 a. C.), que fue discípulo de Sócrates, ya se ve que el estudio de las magnitudes irracionales no suponía el escándalo que aterrorizaba a los pitagóricos. Pappus escribió en la introducción del Libro X de los *Elementos* de Euclides, que el propósito del libro es «investigar los conmensurables e inconmensurables, magnitudes continuas racionales e irracionales, ciencia con origen en la escuela de Pitágoras, pero que ha tenido un importante desarrollo en las manos de Theaetetus, persona de talento que con paciente investigación estableció distinciones exactas y pruebas irrefutables entre las mencionadas cantidades». B. L. van der Waerden va un poco más lejos indicando que el Libro X de los *Elementos* de Euclides es la obra de Theaetetus.



Zenón de Elea.

LOS POSTULADOS INCOMPATIBLES Y ZENÓN DE ELEA

Dos postulados pitagóricos decían que la recta se podía dividir indefinidamente y que estaba formada por puntos con dimensión. También admitieron como postulados la divisibilidad infinita del tiempo y que estaba formado por instantes con duración. Los dos postulados de la recta, al igual que los del tiempo, resultaron ser incompatibles tras las paradojas de Aquiles y la tortuga, de la pista de carreras, de la flecha lanzada hacia la diana y la de los tres atletas elaboradas por Zenón de Elea (490 - 425 a. C.). En efecto, de ser ciertos los postulados pitagóricos se tendría, por ejemplo, que la persecución de Aquiles a la tortuga no acabaría nunca, pues cada vez que Aquiles se desplazase desde su posición a la ocupada por la tortuga se tendría que la tortuga estaría en otra situación. El objeto de las paradojas de Zenón era la defensa de las ideas filosóficas de Parménides, su maestro, frente a las de Pitágoras.

Como indica su nombre completo, Zenón era natural de Elea, una pequeña ciudad de la Magna Grecia, al sur de Italia, donde en el siglo VI a. C. habían llegado unos griegos procedentes de Focea, en Asia Menor, huyendo de los persas. Elea ha sido la cuna de un grupo de filósofos que han tenido gran influencia en el pensamiento occidental. El principal de ellos tal vez fue Parménides, de quien fue discípulo Zenón.

En el año 450 a. C., Parménides y Zenón visitaron Atenas, formando parte de una misión diplomática para convencer a Pericles que firmara un pacto de alianza entre las dos ciudades. Durante la visita, Parménides y Zenón se reunieron con Sócrates, que tenía veinticinco años, lo que debió enriquecer el pensamiento socrático, dado que la transmisión de las paradojas de Zenón de Elea la debemos a Aristóteles.

A la vista de los argumentos de Zenón se optó por admitir que un segmento de recta se puede dividir indefinidamente y que está formada por puntos sin dimensión, aceptación no fácil ya que parece que no existen en el mundo que nos rodea. Platón consideraba que esos puntos geométricos pertenecen al mundo de las ideas, siendo pensamientos de Dios, en tanto que Aristóteles los suponía abstracciones mentales de los puntos materiales.

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides de Alejandría (hacia 315 - 225 a. C.) recogió en trece libros, titulados los *Elementos,* los conocimientos matemáticos descubiertos hasta entonces, muchos de ellos obtenidos por los pitagóricos. Los recopiló ordenadamente en definiciones, postulados, axiomas y proposiciones, con tal perfección que don Julio Rey Pastor, uno de los más eminentes matemáticos españoles fallecidos en el siglo XX, afirmó: «Si pretendieras agregar o quitar algo de los *Ele-*

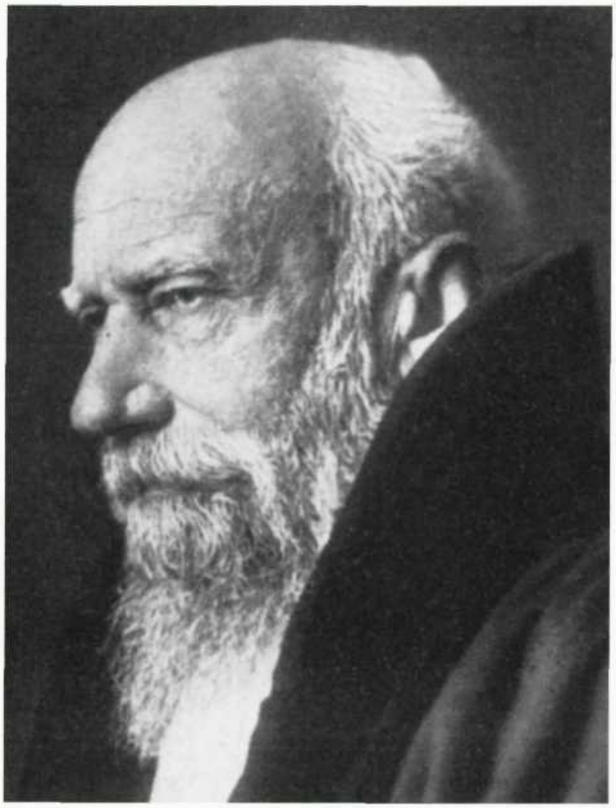
Euclides de Alejandría.

mentos de Euclides reconocerías de inmediato que te alejas de la ciencia y te acercas hacia el error y la ignorancia»[2]. Los *Elementos,* y la Biblia son las dos obras que más ediciones han conocido y figuran entre las que más han influido en la historia de la civilización[3].

Euclides conocía las paradojas de Zenón y por ello en los *Elementos* consideró puntos sin dimensión. En ninguno de los trece libros aparece que la recta sea un conjunto de infinitos puntos y se evita la consideración explícita de conjuntos con infinitos elementos. En lugar de escribir que el conjunto de números primos es infinito se expone que dado un número primo cualquiera existe otro número primo mayor que él. Se dice que un conjunto definido por una propiedad A es *infinito potencial,* si dado un número natural podemos encontrar en A más de *n* elementos diferentes con esa propiedad. El concepto de *infinito actual* supone la existencia de conjuntos infinitos, como entes que están ahí, y su admisión lleva a problemas que tal vez vislumbrados por el genio sistematizador de Euclides le llevaron a evitarlos.

Los *Elementos* nos demuestran lo condicionado que estuvo el pensamiento griego por la contemplación intelectual de lo simple, bello y armonioso, y cómo se creía que las figuras perfectas, como la esfera, el tetraedro regular y el triángulo equilátero, participan de la esencia divina. Por ello, los primeros problemas que aparecen en los *Elementos* son de intersecciones de rectas y circunferencias, resolubles con regla y compás.

Los griegos no pudieron resolver exactamente con un número finito de construcciones hechas con regla y compás la *trisección del ángulo,* la *duplicación del cubo* y la *cuadratura del círculo.* Tuvieron el sentimiento de su irresolubilidad con regla y compás, lo que confirmaron veinte siglos después Pierre Wantzel y Ferdinand von Lindemann. El primero probó en 1837 la irresolubilidad de los dos primeros problemas con un número finito de operaciones con regla y compás. A Lindemann se debe la demostración de la imposibilidad de la cuadratura del círculo con regla y compás. La importancia histórica de estos tres problemas está en las muchas cuestiones que se desarrollaron y resolvieron buscando su solución, lo que llevó a Klein a decir que «se buscó hierro y se encontró oro».



Ferdinand von Lindemann.

[2] Cita del discurso de don Ángel Martín Municio, presidente de la Real Academia de Ciencias, en la conmemoración del Año Mundial de la Matemática en el Congreso de los Diputados el 21de enero de 2000.

[3] El incunable de los *Elementos* de Euclides que se encuentra en la Biblioteca del monasterio de San Millán de la Cogolla, en Logroño, es un ejemplar de la edición *princeps* de 25 de mayo de 1482, impresa en Venecia por Erhardus Ratdolt y que contiene la versión latina de Campano de Novara, que fue capellán del papa Urbano IV. Según Boyer, «Campano utilizó diversas fuentes árabes, así como la primitiva versión latina de Adelhardo Bathoniensi». Dice Ratdolt en el prefacio que es la primera vez que se han podido imprimir figuras geométricas. Esta edición contiene dos libros más; el XIV se debe, probablemente, a Hipsicles y el XV, a Isidoro de Mileto.

En España se encuentran otros ejemplares de esta edición en la Biblioteca Nacional, en la Casa Ducal de Alba, en la Biblioteca del Palacio Real, en la Biblioteca Capitular de Sevilla, en la Biblioteca de la Universidad de Valladolid y en la R.A.B. de Barcelona. (Datos facilitados por el profesor José I. Extremiana, Universidad de La Rioja, utilizando diversas fuentes, una de ellas la lección inaugural del curso 2000-2001 dada en esa universidad por el profesor Luis J. Hernández).

Los griegos nos dejaron soluciones aproximadas de estos tres problemas y, por ejemplo, Hippias de Elis (460 - 400 a. C.) construyó aproximadamente una curva, no determinable con un número finito de operaciones con regla y compás, que permitía dividir un ángulo en dos partes proporcionales a dos números dados, lo que, en particular, hacía posible la trisección del ángulo. La llamó cuadratriz y su construcción se hace así:

En un cuadrado *ABCD* se traza el cuadrante de circunferencia *BED* de centro *A* y radio *AB*. Supongamos dos puntos materiales inicialmente coincidentes en *B*. Uno recorre el arco *BED* y el otro el segmento *BB'A*, de manera que si en un instante cualquiera *t* ocupan, respectivamente las posiciones *E* y *B'* se tiene que $\frac{arco(BE)}{arco(ED)} = \frac{BB'}{B'A}$. La intersección *F* de las rectas *AE* y *B'C'*, siendo *B'C'* paralela a *AD*, es uno de los puntos de la cuadratriz *BFQ*.

La cuadratriz de Hippias transforma el problema de la división de un arco en dos partes de razón *p/q* a la división de un segmento en dos partes de razón *p/q*, y nos muestra la relación entre geometría y cinemática en el pensamiento griego, pues la cuadratriz está determinada por los movimientos del punto *E* sobre el arco *BD* y del punto *B'* sobre el lado *BA*.

Del resultado de Wantzel se deduce que todos los puntos de la cuadratriz no se pueden construir con regla y compás. La regla, el compás y sucesivas bisecciones del ángulo *BAD* permiten determinar una infinidad numerable y densa de puntos de la cuadratriz, sobre los que un proceso de límite completaría su construcción. Así nos asomamos al concepto fundamental del análisis matemático, que también se formalizará veinte siglos después del descubrimiento de Hippias.

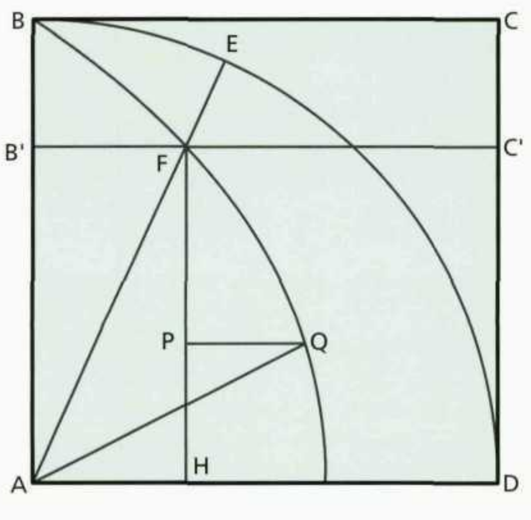


Fig. 1.– La cuadratiz.

EL MÉTODO CIENTÍFICO EN ARQUÍMEDES

Nuevas relaciones entre matemáticas y física, el desarrollo de métodos matemáticos generales y el interés por soluciones aproximadas, aparecen en la obra de Arquímedes de Siracusa (hacia 287 - 212 a. C.), en cuya vida científica tuvieron influencia estos tres hechos:

1. Ser hijo del astrónomo Phidias, dato conocido a través de su libro *El calculador de la arena,* donde Arquímedes ideó un sistema para escribir números muy grandes (hasta 8×10^6), que permitía contar los granos de arena del Universo, según estimaciones de distancias del Universo de Eudoxo, Phidias y Aristarchus, que ya habían propuesto un sistema heliocéntrico. Este libro, homenaje a su padre, lo dedicó a Gelón, hijo del rey Hierón II de Siracusa.
2. Su visita a Egipto siendo joven, donde inventó el «tornillo sin fin o tornillo de Arquímedes», estudió con lo sucesores de Euclides y entabló amistad con muchos de ellos, en particular con Conon de Samos, a quien Arquímedes admiraba por sus habilidades matemáticas. En el prólogo de su libro *Sobre las espirales* nos cuenta que tenía la costumbre de enviar a sus amigos de Alejandría las proposiciones geométricas que obtenía; en muchas ocasiones algunos de ellos le decían que eran resultados que ya conocían. Así que decidió enviar dos proposiciones falsas intercaladas entre otras para descubrir quién era capaz de atribuirse lo erróneo.
3. Su parentesco y amistad con el rey Hierón II de Siracusa, quien le convenció de que dedicase parte del tiempo que empleaba en sus razonamientos sobre matemática pura a idear artefactos de guerra para defenderse de los romanos, gracias a los cuales derrotaron al comandante romano Marcellus, cuando sitió Siracusa en la primera guerra púnica. Arquímedes adquirió gran fama en vida por sus máquinas de guerra, consecuencia de sus descubrimientos físicos; por ejemplo, las leyes de la palanca, la polea y del empuje de un cuerpo sumergido en un fluido. Sus aportaciones físicas también le permitieron obtener espectaculares aplicaciones pacíficas, como mover un barco sobre la arena y comprobar la estafa en la corona que Hierón II había mandado hacer para ofrecerla a Júpiter. Sobrevive su frase de que con un punto de apoyo cercano a la Tierra conseguiría moverla.

La fama de Arquímedes por sus invenciones mecánicas no influyó en su creencia de que «lo más valioso era el desarrollo de la matemática pura». No hacía comentarios sobre las invenciones aplicadas que le habían dado la fama; parecía repudiar lo que sólo tenía una utilidad práctica, y ponía su interés en las especulaciones teóricas sin referencia a las necesidades ordinarias de la vida. Su interés y admiración se concentraba en estudiar los objetos que

Arquímedes de Siracusa.

tenían belleza y grandeza, así como en las demostraciones precisas y contundentes. Plutarco matiza que Arquímedes utilizaba sus descubrimientos mecánicos para obtener resultados de geometría pura, afirmación confirmada después de que en el verano de 1906, J. L. Heiberg, profesor de filosofía en la Universidad de Copenhague, descubriese la obra de Arquímedes *El Método,* que da una visión de cómo obtenía muchos de sus resultados. Decía Arquímides:

> Ciertos hechos me parecen claros por un método mecánico, que no suministra una prueba real. Por tanto, deben ser probados después por el método geométrico. El conocimiento inicial por el método mecánico facilita la posterior demostración geométrica.

Los descubrimientos de Arquímedes están muy por encima de su época, por lo que muchos historiadores de las matemáticas lo consideran uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos. La elevación de su espíritu, la profundidad de su alma y el tesoro de su conocimiento científico despertaron su interés por los *métodos y principios generales.* Y así dejó un método de integración por aproximaciones sucesivas que le llevó a obtener áreas y volúmenes de muchas figuras. Chasles le ve como el fundador de la integración que Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz y Newton llevaron a la perfección. También nos dejó diferentes métodos de aproximación, en los que probó que podía aproximar raíces cuadradas. Además de *El calculador de la arena, Sobre las espirales* y *El Método,* se conservan sus obras *Mediciones en un círculo* (donde utilizando polígonos de 96 lados inscritos y circunscritos a una circunferencia obtuvo que $223/71 < \pi < 22/7$), *Teoría del equilibrio* (dos tomos, donde da los principios fundamentales de la mecánica), *Cuadratura de la parábola, Sobre la esfera y el cilindro* (dos tomos), *Sobre las espirales, Sobre los conoides y esferoides* y *Sobre los cuerpos flotantes* (donde obtiene los principios fundamentales de la hidrostática).

Heath considera «los libros de Arquímedes, sin excepción, monumentos de exposición matemática que sobrecogen al lector por el razonamiento, la claridad y la belleza». Por desgracia, no se han conservado todas las obras de Arquímedes, ya que Pappus hace referencia a un tratado del matemático griego sobre las balanzas y las palancas, y Theon le atribuye un libro sobre los espejos.

LOS ÁRABES Y EL ÁLGEBRA

El tesoro de la ciencia griega llegó a Occidente a través de los árabes que, además, sintetizaron los conocimientos de los sabios griegos con los de los calculadores hindúes. Al-Khwarizmi escribió un tratado de numeración indo-árabe que es, probablemente, el primero en utilizar de forma sistemática la numeración con diez dígitos y el cero como indicador posicional. Además introdujeron el álgebra al observar que no era necesario saber el significado de las magnitudes con las que calculaban. Los objetivos del álgebra en manos de los árabes eran utilitarios, relegando a segundo plano su preocupación por el rigor.

El álgebra llegó en los siglos XIV y XV a un mundo cristiano dominado por el pensamiento griego, lo que dificultó la abstracción algebraica incluso en el siglo siguiente. Por ello François Viète (1540 - 1603) no puede razonar con magnitudes sin incorporar la representación geométrica y Gregoire de Saint-Vicent (1584 - 1667) escribe sus memorias sin la menor notación algebraica, como lo hubiese podido hacer un discípulo de Euclides. Como contrapunto, al siglo XVI se le debe la genial resolución de la ecuación de tercer grado de Girolamo Cardano (1501 - 1576).

DOS APORTACIONES DE LA ÉPOCA CARTESIANA

Descartes (1596 - 1650) transformó el álgebra en el método para razonar en abstracto, que sirvió de base a otros conocimientos científicos y que el mismo Descartes aplicó a la geometría. Imbuido del espíritu cartesiano escribirá Newton varios lustros después que «para resolver un problema con números o relaciones abstractas basta con traducirlo al sistema algebraico», considerado como método para obtener la *ciencia universal.*

Gerolamo Cardano.

Bonaventura Cavalieri.

René Descartes.

Para Descartes, el álgebra precede lógicamente a todas las ramas de las matemáticas y no está condicionada por la naturaleza de los problemas a que se aplica, *presentándola como una disciplina independiente, que no apuntala sus desarrollos en consideraciones extrañas a la propia ciencia.* Construyó el álgebra partiendo de *elementos simples,* de los que mediante combinaciones pasaba a elementos más complejos. Así Descartes rompió con el ideal griego, pasando de la ciencia obtenida por la contemplación del Universo a la *ciencia constructiva,* hecha desde la razón, sin que, afortunadamente, se perdiese el ideal de belleza. Su explicación del Universo es esencialmente geométrica y mecánica.

Con lo que no rompió Descartes fue con el error pitagórico de «creer en un molde fijo por el que necesariamente debía discurrir todo el conocimiento». Su molde era el *álgebra,* esa larga cadena de razones que el espíritu desarrolla por su propia iniciativa y que constituye el marco para las otras ciencias. Pascal (1623 - 1662) y su intuición infinitesimal mostraron que tampoco el pensamiento cabe dentro del marco limitado por el álgebra.

Otra aportación de la época cartesiana, con claro origen geométrico, es el cálculo infinitesimal, que debe mucho a la *Geometría de los indivisibles* de Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), quien a los diecisiete años ingresó en la Compañía de Jesús en Milán. El cardenal Federico Borromeo, conocedor de su talento, le puso en contacto con Galileo, de quien siempre se consideró discípulo y le aconsejó el estudio de la obra de Euclides, lo que aumentó su interés por las matemáticas. En 1616 estudió Geometría en Pisa con Benedetto Castelli, y demostró tal habilidad que en ocasiones sustituyó al maestro en sus clases.

En 1629 fue nombrado catedrático de matemáticas en Bolonia, época en la que ya había desarrollado su método de los indivisibles, para el desarrollo del cálculo integral. Lo presentó en 1635 en su obra *Geometria indivisibilis continuorum nova,* donde extiende el método de Arquímedes de integración por aproximaciones sucesivas, incorporando la teoría de Kepler de las cantidades geométricas infinitamente pequeñas, lo que le permitió encontrar áreas y volúmenes de diferentes figuras geométricas.

NEWTON: LAS MATEMÁTICAS, EXPRESIÓN DE LAS LEYES DE LA NATURALEZA

La reforma gregoriana del calendario no fue adoptada en Inglaterra hasta 1752. Por ello, con el calendario local inglés, Isaac Newton nació el día de Navidad de 1642 en Woolsthorpe, Lincolnshire (Inglaterra), que corresponde al 4 de enero de 1643 en el calendario gregoriano. Su padre, un rico granjero sin cultura, había muerto tres meses antes del nacimiento de Isaac. Los primeros contactos escolares de Newton fueron malos, y se le definió como holgazán y distraído. En que Newton estudiase tuvieron una influencia decisiva su tío William Ayscough, que le llevó a la Free Grammar School en Granthman, y el director de este centro, apellidado Stokes, buen conocedor de los *Elementos* de Euclides, que transmitió a Newton la *pasión por aprender* y convenció a su madre para que le enviase a la universidad. El 5 de junio de 1661 ingresó en el Trinity College de Cambridge.

La enseñanza en Cambrige estaba dominada por la filosofía de Aristóteles, si bien se disfrutaba de cierta libertad de estudio en el tercer año, lo que permitió a Newton estudiar la filosofía de Descartes, Gassendi, Hobbes y Boyle. También le atraía la mecánica de la astronomía de Galileo y la *Óptica* de Kepler. Encabezó unos apuntes de 1664 titulados *Questiones Quaedam Philosophicae* (Ciertas Cuestiones Filosóficas) con la sentencia: «Platón es mi amigo, Aristóteles es mi amigo, pero mi mejor amigo es la verdad», mostrándose como un pensador libre a tan corta edad.

El interés de Newton por las matemáticas comenzó en otoño de 1663 cuando adquirió un libro de astrología y otro de trigonometría en una feria en Cambridge, cuyos aspectos matemáticos no pudo entender. Entonces llegó Barrow a la cátedra Lucasiana del Trinity College de Cambridge y le orientó hacia el estudio de *Clavis Mathematica* de Oughtred, *La geometría* de Descartes, las obras completas de Vieta, el *Álgebra* de Wallis y su método de obtener el área de segmentos de parábolas e hipérbolas por el método de los indivisibles de Cavalieri. Barrow también le facilitó su traducción de los *Elementos* de Euclides, libro que Newton siempre admiró.

Después de terminar sus estudios en abril de 1665, en verano llegó la peste, lo que obligó a cerrar la universidad. Newton se retiró durante casi dos años a Lincolnshire, durante los cuales hizo revolucionarios avances en óptica, física, astronomía y matemáticas. Elaboró el método de las *fluxiones,* basado en su descubrimiento de que la integración de una función es el procedimiento inverso de la diferenciación. Utilizando la diferenciación como operación básica estableció los fundamentos del cálculo diferencial e integral, y con su método *unificó técnicas dadas con anterioridad para resolver problemas aparentemente no correlacionados*, como calcular áreas, tangentes, longitudes de curvas y máximos y mínimos de funciones. La obra de Newton *De Methodis et Fluxionum* fue escrita en 1671, si bien no se publicó hasta que en 1736 John Colson hizo la traducción al inglés.

Isaac Newton.

Tras la peste se reabrió la Universidad de Cambridge (1667) y Newton recibió una beca de investigación en 1669, año en el que Barrow intentó que los descubrimientos de Newton fuesen universalmente conocidos. A tal fin le envió el texto *De Analysi* de Newton a Collins en Londres, indicándole que:

> Newton me trajo el otro día algunos papeles en los que había escrito métodos de calcular dimensiones de magnitudes, como los de Mr. Mercator para la hipérbola, pero muy generales; también ha desarrollado métodos para resolver ecuaciones, que supongo le encantarán...

En 1669, Barrow dimitió de la cátedra Lucasiana para dedicarse al cultivo de la espiritualidad, y recomendó que le sustituyese Newton, que sólo tenía veintisiete años.

El primer curso de Newton de 1670 fue de óptica. En los dos años de plaga también había descubierto que la luz blanca se podía descomponer, observando la aberración cromática en las lentes del telescopio, así como la refracción de un rayo de luz al pasar por un prisma. Para evitar la aberración cromática construyó un telescopio de reflexión que donó a la Real Sociedad en 1672, siendo nombrado miembro de la misma. En 1672 publicó su primer trabajo científico sobre la luz y el color en los *Philosophical Transactions of the Royal Society*, en el que defendía su teoría corpuscular de la luz, encontrándose con la oposición de Hooke y Huygens, partidarios de la teoría ondulatoria. Ante esas críticas Newton reaccionó irracionalmente, con un deseo patológico de humillar a Hooke en público, y retrasó la publicación de su libro de óptica hasta 1704, poco después de la muerte de Hooke. Newton tuvo que utilizar la teoría ondulatoria junto con la corpuscular para explicar algunas de sus observaciones.

La mayor aportación de Newton fueron sus grandes descubrimientos en física y en mecánica celeste que culminaron con la teoría de la gravitación universal. En 1666, Newton tenía una primera versión de sus tres leyes de dinámica y había obtenido la ley de la fuerza centrífuga de un cuerpo moviéndose uniformemente en una circunferencia, lo que le permitió imaginar que la fuerza de gravedad de la Tierra equilibraba la fuerza centrífuga de la Luna. Esta idea y la tercera ley de Kepler del movimiento planetario le permitieron deducir la ley de atracción de dos masas ($F = GMm/r^2$). Halley[4] convenció a Newton para que escribiese un tratado sobre la nueva Física y su aplicación a la astronomía. En 1687, Newton publicaba su *Philosophiae naturalis principia mathematica* o *Principia*, como se la conoce generalmente, redactado en algo menos de un año de dedicación absoluta.

El *Principia* se reconoce como el mejor libro científico jamás escrito, que no hubiese podido nacer sin su anterior descubrimiento del cálculo infinitesimal y *la confianza de Newton en la matemática como instrumento de investigación de la naturaleza y de expresión de sus leyes*[5]. En el *Principia* analizó el movimiento de cuerpos en medios resistentes y no resistentes bajo la acción de fuerzas centrípetas, aplicando los resultados a movimientos de cuerpos en órbitas, de proyectiles, de péndulos y de caída libre cerca de la Tierra. Con su ley de atracción universal *explicó un gran conjunto de fenómenos previamente no correlacionados:* las órbitas excéntricas de los cometas, las mareas y sus variaciones, la precesión del eje de la Tierra y el movimiento de la Luna perturbado por la gravedad del Sol. Este libro convirtió a Newton en un líder internacional en la investigación científica, si bien algunos científicos continentales seguían pensando en la teoría de Descartes de que las fuerzas actuaban por contacto.

Tras la llegada de Guillermo de Orange, en noviembre de 1688, y la huida de Jacobo II a Francia, de quien Newton era enemigo por la falta de respeto del rey Jacobo a los estatutos de las Universidades de Oxford y Cambridge en el nombramiento de algunos profesores, la Universidad de Cambridge le eligió como uno de sus dos representantes en el Parlamento, que el 15 de enero de 1689 declaró que Jacobo II había abdicado y en febrero de 1689 ofreció la corona a Guillermo.

En la cima del prestigio científico y universitario, Newton abandonó Cambridge para ir a Londres como parlamentario. Entonces dejó de investigar por una depresión nerviosa que atribuía a su dificultad en poder dormir, lo que parece era consecuencia, y no causa, de algún trastorno mental que sufría desde hacía años. En 1699 fue designado director de la Casa de la Moneda, donde trabajó activamente en la prevención de la falsificación de moneda.

En 1703 fue elegido presidente de la Royal Society y reelegido cada año hasta su muerte en 1727. En 1705, la reina Ana le concedió el título de *sir*, siendo el primer científico honrado con esta distinción por su trabajo. En el próximo apartado veremos que, en sus últimos años tuvo un duro enfrentamiento con Leibniz para discernir a quién correspondía la primacía del descubrimiento del cálculo infinitesimal.

LEIBNIZ: LA ALGEBRIZACIÓN DEL PENSAMIENTO

Leibniz nació el 1 de julio de 1646 en Leipzig (Alemania). Su padre, Friedrich Leibniz, era profesor de filosofía moral en Leipzig y aunque murió en 1652 pudo ejercer influencia en la formación de su hijo gracias al fuerte deseo de éste de leer los libros de metafísica y de teología de la biblioteca paterna. Ello le llevó a los doce años a adquirir conocimientos avanzados de latín y griego, muy por delante de lo enseñado en la Nicolai School de Leipzig. Sería injusto no reconocer la influencia que en su vida y filosofía también tuvo su madre, Catharina Schmuck.

Así se entiende que después del aprendizaje en la escuela de la lógica de Aristóteles y de la teoría de categorías no quedase satisfecho con el sistema aristotélico y comenzase a desarrollar sus propias ideas para mejorarlo, buscando las *ideas subyacentes en las pruebas matemáticas rigurosas.*

Su primer trabajo, *De Principio Individui,* lo escribió en 1663 cuando era estudiante en la Universidad de Leipzig, y en él enfatiza que el valor existencial del individuo no se explica ni por la materia ni por la forma, sino por el conjunto del ser. Ahí está el antecedente de la noción de «mónada». Pasó el verano de 1663 en Jena, donde el profesor de matemáticas era el también filósofo Erhard Weigel, del que Leibniz aprendió *la importancia del mé-*

[4] Una discusión científica entre Edmond Halley, Robert Hooke y sir Christopher Wren sobre los movimientos planetarios motivó una pregunta de Halley a Newton, quien le dio respuesta inmediata sobre la forma elíptica de las órbitas de los planetas. Halley le preguntó cómo había llegado a esa conclusión, a lo que Newton respondió: «porque lo he calculado». No encontró los cálculos y Halley le pidió que los rehiciera y que escribiera sus nuevas ideas de física. Así nació el *Principia.*

[5] No obstante, y como nos señaló el académico profesor don Carlos Sánchez del Río, Newton no usa el cálculo infinitesimal en sus *Principia.* Cosa lógica porque quería que lo entendiesen y no iba a escribir una teoría nueva en una matemática también nueva y desconocida. Por eso el libro es difícil de leer para nosotros, que estamos acostumbrados a cálculos fáciles en lugar de las demostraciones de Newton al modo de Euclides.

todo de las pruebas matemáticas para el estudio de la lógica y la filosofía. Weigel, como Pitágoras, creía que el *número era el concepto fundamental del Universo* y sus ideas tuvieron una considerable influencia en Leibniz. En octubre de 1663 volvió a Leipzig, donde se graduó en 1666 con el trabajo *Dissertatio de arte combinatoria,* que tenía como objetivo *reducir todos los razonamientos y descubrimientos a una combinación de elementos básicos, como números, letras, sonidos y colores.* La intención de Leibniz con esta «combinatoria universal» era proporcionar un lenguaje simbólico al que se pudiesen trasladar todos los procesos del razonamiento para garantizar la corrección en la argumentación. La «combinatoria universal» sería la forma de la estructura racional del pensamiento que, en parte, resolvería el irrealizable sueño medieval de encontrar una Característica Universal que permitiese la deducción absoluta, haciendo posible al hombre captar cualquier esencia.

El doctorado en leyes lo obtuvo en la Universidad de Altdorf en febrero de 1667 con la tesis *De Casibus Perplexis* (Casos desconcertantes), tras lo que rehusó la promesa de una cátedra en Altdorf, y desde noviembre de 1667 trabajó para el barón Johann Christian von Boineburg, lo que le permitió vivir un típico *renacimiento humanista* comenzando diferentes proyectos científicos, literarios y políticos, con el objetivo de *recopilar todo el conocimiento humano.* Así, poco antes de 1670 mejoró el código de derecho civil romano, y en 1671 publicó *Hypothesis Physica Nova* (Nuevas Hipótesis Físicas), que contiene *ideas abstractas de movimiento* para explicar los resultados de Wren y Huygens sobre colisiones elásticas. También contactó con Oldenburg, secretario de la Royal Society de Londres, con la Academia de París y con Carcavi, bibliotecario real de París. Además, anhelaba también una carrera literaria, se sentía orgulloso de su poesía (casi toda en latín) y presumía de poder recitar casi toda la *Eneida* de Virgilio de memoria.

Una misión diplomática en París en 1672 para disuadir a Luis XIV de atacar territorios germánicos, le permitió estudiar matemáticas y física bajo la dirección de Christian Huygens, que le aconsejó el estudio del libro de Saint-Vincent sobre suma de series, lo que llevó a Leibniz a realizar algunos descubrimientos, entre ellos el teorema de convergencia de series alternadas.

Otra misión diplomática de paz en Londres le permitió visitar la Royal Society, enseñar la incompleta máquina de calcular que estaba desarrollando, prometiendo regalarla a la Royal Society, y hablar con Hooke, Boyle y Pell. Explicó sus resultados sobre series a Pell, que le comentó que muchos de ellos se podían encontrar en un libro de Mouton. Al día siguiente consultó el libro de Mouton y comprobó que la observación de Pell era correcta. Leibniz volvió a París convencido de que sus conocimientos matemáticos eran mucho menores de lo que él hubiese deseado, por lo que decidió redoblar sus esfuerzos en este área. A pesar de ello, la Royal Society le eligió miembro el 19 de abril de 1673.

De nuevo volvió a París, donde Huygens le aconsejó la lectura de obras de Descartes, Fabri, Gregory, Pascal, Saint-Vicent y Sluze. Empezó sus descubrimientos en cálculo diferencial e integral, que los comunicó en 1674 a Oldenburg, quien le contestó que Newton y Gregory habían encontrado ya métodos generales, adjuntándole una carta de Newton con una lista de sus resultados sin demostraciones. La carta tardó en llegar a Leibniz, quien contestó de inmediato, si bien Newton siempre creyó que Leibniz había tenido seis semanas para trabajar en su contestación. Leibniz no estaba en buena posición respecto a la Royal Society, ya que no había cumplido su promesa de terminar la máquina de calcular y, además, Oldenburg desconocía que Leibniz ya no era el matemático ordinario que había visitado Londres, sino que se había convertido en un creativo genio matemático.

Gottfried W. Leibniz.

El 21 de noviembre de 1675, Leibniz escribió un manuscrito utilizando la notación $\int f(x)\,dx$ por vez primera y dando la regla de derivar un producto. En otoño de 1676 había descubierto la regla de derivación de x^n para exponente entero y fraccionario, y aunque Leibniz hubiese deseado permanecer en la Academia de Ciencias de París más tiempo, no se le invitó por considerar que había demasiados extranjeros. Por lo que, contra su voluntad, salió de París en octubre de 1676 hacia Hannover, donde había aceptado ser bibliotecario.

Newton escribió una segunda carta a Leibniz el 24 de octubre de 1676 que no llegó a Leibniz hasta junio de 1677, cuando ya estaba en Hannover. Esta segunda carta, aunque cortés en tono, estaba claramente escrita pensando que Leibniz le había robado sus métodos. En la respuesta Leibniz dio algunos detalles de los principios de su cálculo diferencial incluyendo la regla de diferenciación de una función de función. Newton comentó que los problemas descritos por Leibniz ya habían sido resueltos, y que no veía la necesidad del sistema formalista de Leibniz, que, como hoy sabemos, fue vital en el desarrollo posterior del cálculo.

Durante el periodo en Hannover trabajó en un proyecto para eliminar agua de las minas utilizando energía eólica, y de sus observaciones en las minas llegó a la conclusión de que la Tierra estuvo fundida en el pasado. En 1680 publicó *Meditationes de Cognitione, Veritate et Ideis,* perfeccionando su sistema metafísico que deseaba *reducir el razonamiento a un álgebra del pensamiento.* Las *Meditationes* contienen las bases de su *Discours de métaphysique* de febrero de 1686, año en el que también publicó en *Acta Eroditorum* un artículo sobre cálculo integral con la notación actual. De dos años antes es un manuscrito no publicado con el desarrollo de la teoría de determinantes y sus aplicaciones a los sistemas de ecuaciones.

Un viaje a Italia para recoger datos y escribir, por encargo, la historia de la familia Guelf le permitió conocer en Florencia a Viviani, que había sido discípulo de Galileo, trabajar con miembros de la Academia Vaticana, de la que fue elegido miembro, y publicar en Roma en 1689 sus dos tomos de *Dinámica,* fruto de sus críticas a la mecánica de Descartes y de su examen del significado profundo de la energía cinética y potencial. Ese año se publicó el *Principia* de Newton, que Leibniz leyó en Roma.

En 1701 publicó *Essay d'une nouvelle science des nombres* para su elección como académico de la Academia de Ciencias de París, donde expone el sistema binario de la aritmética que había desarrollado en 1679.

En 1710, Leibniz publicó la *Teodicea,* tratado filosófico sobre el problema del mal en un mundo creado por un Dios bueno. Leibniz expone que el Universo debe ser imperfecto para distinguirse de Dios. Dice, no obstante, que el Universo es el mejor posible, sin ser perfecto. Leibniz es consciente de que su afirmación se puede rebatir, pues, por ejemplo, un mundo sin muertes por inundaciones sería mejor que el actual. Sin embargo, dice que la eliminación de los desastres naturales llevaría a tal alteración en las leyes físicas que el resultado sería un Universo peor. En 1714 escribió la *Monadología,* en la que sintetiza la filosofía de la *Teodicea.*

Los últimos años de la actividad matemática de Leibniz estuvieron centrados en la disputa con Newton sobre la primacía en la invención del cálculo. En 1711 leyó el artículo de Keill en los *Transactions of the Royal Society* de Londres que acusaba a Leibniz de plagio. Leibniz le pidió que se retractase dado que jamás había oído del cálculo con fluxiones hasta que leyó las obras de Wallis. Keill le replicó que tenía dos cartas de Newton enviadas a través de Oldenburg.

Leibniz escribió de nuevo a la Royal Society pidiendo la corrección del daño que le había hecho Keill. Ésta nombró un comité totalmente sesgado, presidido por el propio Newton, para decidir la primacía en el descubrimiento del cálculo infinitesimal. El comité no dio opción a Leibniz de explicar su versión. El informe del comité fue a favor de Newton, quien lo había redactado anónimamente, y se publicó en el *Commercium epistolicum* al comienzo de 1713 y no fue leído por Leibniz hasta otoño de 1714. Lo mismo sucedió con un resumen de dicho informe, también anónimo, que apareció en los *Philosophical Transactions of the Royal Society.* Leibniz publicó una carta anónima, titulada *Charta volans,* donde indicaba que un error de Newton en la interpretación de las derivadas de orden superior demostraba la paternidad de Leibniz del cálculo infinitesimal.

La disputa la continuó Keill con una réplica a la *Charta volans,* a la que Leibniz se negó a contestar argumentando que no podía responder a un idiota. Cuando Newton le escribió, Leibniz le contestó con una detallada descripción de sus descubrimientos en cálculo diferencial.

Desde 1715 hasta su muerte, Leibniz mantuvo correspondencia con Samuel Clarke, un partidario de Newton, sobre el tiempo, el espacio, el libre albedrío, la fuerza de atracción a través del vacío y otros tópicos.

Durante su vida, Leibniz intercambió cartas con la mayoría de los eruditos de Europa (más de 600) y empleó muchas de sus energías en la promoción de sociedades científicas, como la Sociedad de Ciencias de Brandeburgo, que presidió hasta su muerte, y que años más tarde se transformaría en la Academia de Berlín. También contribuyó a la creación de las Academias de Ciencias de San Petersburgo y de Viena, de la que fue designado para ser su primer presidente, cargo que no pudo desempeñar, ya que murió antes de que ambas academias empezasen a funcionar.

Leibniz fue un infatigable trabajador, capaz de estar muchas horas pensando sentado en una misma silla o mientras viajaba por Europa, un gran científico y uno de los espíritus más agudos de la civilización occidental. *Deliberadamente ignoraba las fronteras entre las disciplinas, pues creía que el cruce de ideas era fructífero y esencial para el avance del conocimiento y de la sabiduría.*

BOLZANO, EL INFINITO ACTUAL Y LA PARADOJA DE GALILEO

Bolzano fue hijo de un comerciante en antigüedades del norte de Italia que vivía en Praga casado con una alemana. Bolzano nació en 1781 y por deseo paterno hizo la carrera eclesiástica y se ordenó en 1805. Desde 1805 hasta 1820 enseñó teología en la Universidad de Praga.

Por sus intervenciones a favor de la independencia nacional del pueblo checo y en contra de la monarquía austriaca fue separado de la enseñanza, asignándole una pensión mezquina con la que apenas podía vivir. Marchó a Techbuz, donde se dedicó, con algunos de sus amigos, a las matemáticas y a la filosofía. En el año 1841 regresó a Praga, ciudad en la que vivió hasta su muerte, acaecida en 1848.

Bolzano puso en correspondencia biunívoca un conjunto de números reales con un subconjunto propio de él. Algo parecido había hecho Galileo (1564 - 1642) con su famosa paradoja, que afirmaba que había tantos números naturales como cuadrados perfectos, haciendo corresponder n con n^2. Para evitar la contradicción con el principio de que el todo es mayor que una de sus partes, Galileo postuló que los números naturales no forman un conjunto, desechando así los conjuntos infinitos.

La postura científica de Bolzano fue radicalmente opuesta a la de Galileo. Bolzano en vez de utilizar su descubrimiento para desechar el concepto de conjunto infinito, como hizo Galileo, lo utilizó como definición de conjunto infinito, redescubierta años más tarde por Dedekind. *Un conjunto es, pues, infinito cuando se puede poner en correspondencia biunívoca con una parte de él.* Si en Galileo hubiesen tenido menos influencia ciertas ideas a priori, la definición de conjunto infinito hubiese llegado dos siglos antes.

Por tanto, para Bolzano los números naturales, enteros, racionales y reales son conjuntos infinitos. También demostró que el conjunto de proposiciones matemáticas es infinito. Estos resultados aparecen en su libro *Paradojas del infinito*, de carácter filosófico, que fue escrito un año antes de su muerte. En esta obra se afirma que la mayor parte de los enunciados paradójicos que se encuentran en las matemáticas son teoremas que contienen el concepto del infinito, o bien se apoyan en él, lo que le llevó a clarificar la noción de infinito.

CANTOR Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Georg Ferdinand Ludwig Phillipp Cantor (1845 - 1918) nació en San Petersburgo y entre 1873 y 1897 elaboró en la Universidad de Halle su teoría de conjuntos, de corte idealista, y publicó sus resultados más importantes sobre números cardinales y ordinales transfinitos después de cinco años de trabajo en series trigonométricas, tema destacado en el siglo XIX por sus aplicaciones físicas.

Sus padres fueron un rico comerciante danés protestante con profundo amor a la cultura y a las artes y una rusa católica con grandes dotes musicales. No extraña pues que Cantor fuese un extraordinario violinista. A los doce años abandonó Rusia con gran nostalgia, debido a que la pobre salud de su padre le obligó a buscar un clima más suave. Vivió en Wiesbaden, en Frankfurt y luego en Darmstadt, donde obtuvo la graduación con calificaciones excelentes y con mención explícita de sus excepcionales dotes en matemáticas, en particular en trigonometría. En 1862 ingresó en el Politécnico de Zurich, pues su padre deseaba que fuese una «brillante estrella en el firmamento de la ingeniería».

No obstante, ese año Cantor pidió permiso a su padre para estudiar matemáticas en la universidad. La muerte de su padre, en junio de 1863, interrumpió sus estudios en Zurich. Entonces se trasladó a la Universidad de Berlín,

Georg Cantor.

donde entabló amistad con Herman Schwarz, compañero de estudios, y recibió clases de Weierstrass, Kummer y Kronecker. Durante 1864-1865 fue presidente de la Sociedad Matemática, y formó parte de un grupo de jóvenes matemáticos que se reunía semanalmente en una casa de vinos. En 1867 leyó su tesis en teoría de números sobre *De aequationibus secondi gradus indeterminatis.* Trabajó en su habilitación y tras ser asignado a Halle, en 1869, leyó su tesis de habilitación también sobre teoría de números.

En Halle cambió la dirección de sus investigaciones hacia el análisis, tal vez por la influencia de Heine, que le ofreció investigar sobre un problema entonces abierto de *unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica,* problema que había sido abordado sin éxito por muchos matemáticos, como el propio Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann. Cantor probó la unicidad en abril de 1870. Publicó otros artículos sobre series trigonométricas entre 1870 y 1872, mostrando la influencia de las enseñanzas de Weierstrass.

Fue promocionado a profesor extraordinario de Halle en 1872, año en el que comenzó su amistad con Dedekind, con quien había coincidido en vacaciones en Suiza, y publicó un artículo sobre series trigonométricas en el que definía los números irracionales mediante sucesiones convergentes de números racionales. También en 1872 Dedekind publicó su definición de número real mediante «las cortaduras de Dedekind», haciendo referencia al artículo de Cantor.

En 1873, Cantor probó que se podía numerar el conjunto de los números racionales, estableciendo una biyección entre el conjunto de los números racionales y el de los números naturales. También demostró que el conjunto de los números algebraicos, es decir, las raíces de polinomios con coeficientes enteros, es numerable. En diciembre de ese año consiguió demostrar que el conjunto de los números reales no era numerable, resultado publicado en 1874 y del que se deduce que «casi todos» los números reales son trascendentes. Así completó el resultado de 1851 de Liouville, quien había probado la existencia de números trascendentes. Desde entonces, los conjuntos infinitos nos han ayudado mucho en la obtención de teoremas de existencia, comprobando que son «grandes» los conjuntos formados por los elementos buscados. Más adelante, y desde la obra de René-Louis Baire, la teoría de categorías nos ha ayudado en este tipo de demostraciones.

En 1874 se planteó el problema de la existencia de una biyección entre el cuadrado unidad $[0, 1]^2$ y el intervalo unidad $[0, 1]$, obteniendo en 1877 la biyección entre los puntos de $[0, 1]$ y los puntos de un espacio de dimensión p. Sorprendido de su descubrimiento escribió: «Lo veo, pero ¡no lo creo!». Cantor estaba ya lejos de ideas preconcebidas al estilo de los pitagóricos, que tal vez hubiesen dicho: «¡No lo creemos!, luego no lo vemos y no puede existir». El giro copernicano estaba completamente dado; la ciencia pasaba de observar a crear y los objetos científicos se convertían en formas de nuestro pensamiento. En algún sentido no somos nosotros los que nos adaptamos para conocer las cosas, sino que son los objetos los que se generan por nuestra forma de conocer. Publicó este resultado en el *Journal de Crelle* en 1877, gracias al apoyo de Dedekind y con recelos de Kronecker, por lo que decidió no volver a publicar nada en ese periódico.

Entre 1879 y 1884 publicó seis artículos en el *Mathematischen Annalen* que proporcionan una introducción básica de la teoría de conjuntos, siendo la influencia de Klein determinante para la publicación en *Mathematischen Annalen*. El quinto de los artículos de Cantor en *Mathematischen Annalen*, «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre», fue publicado también como una monografía separada, y Cantor pudo comprobar que su teoría autónoma de números transfinitos no encontraba la aceptación que él había esperado.

Desde 1884 comenzó a atormentarle el no ser capaz de demostrar la hipótesis del continuo, que, como ya se ha indicado, afirma que cualquier subconjunto infinito de números reales se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales o con el conjunto de los números naturales. La hipótesis del continuo también se enuncia diciendo que el cardinal del conjunto de los números reales es el siguiente al cardinal del conjunto de los números naturales.

En 1885, Cantor sufrió otra contrariedad cuando Mittag-Leffler le persuadió de retirar uno de sus artículos enviados a *Acta Mathematica*, por considerarlo adelantado en alrededor de cien años («... about one hundred years too soon»), y si bien el hecho debe interpretarse como un gesto de amabilidad de Mittag-Leffler no lo interpretó así Cantor, que, contrariado, interrumpió su correspondencia epistolar con Mittag-Leffler y decidió no publicar nada más en *Acta Mathematica*.

En septiembre de 1893 tuvo una depresión fuerte. Con anterioridad ya había sufrido depresiones. Prueba de su mal estado mental fue la publicación en 1894 de un artículo en que describía el método por el que todos los números pares inferiores a 1.000 se podían escribir como suma de dos números primos, siendo conocido que la verificación de esta conjetura de Goldbach hasta el 10.000 se había hecho unos cuarenta años antes.

Tras recuperarse de esta depresión aparecieron sus dos últimos artículos sobre teoría de conjuntos en *Mathematischen Annalen* entre 1895 y 1897, cuyo editor era Klein. Se trata de dos estudios muy finos de aritmética transfinita y el segundo artículo lo había terminado seis meses antes de la publicación del primero. El amplio intervalo entre los dos artículos se debe a que Cantor esperaba poder incluir en el segundo una prueba de la hipótesis del continuo.

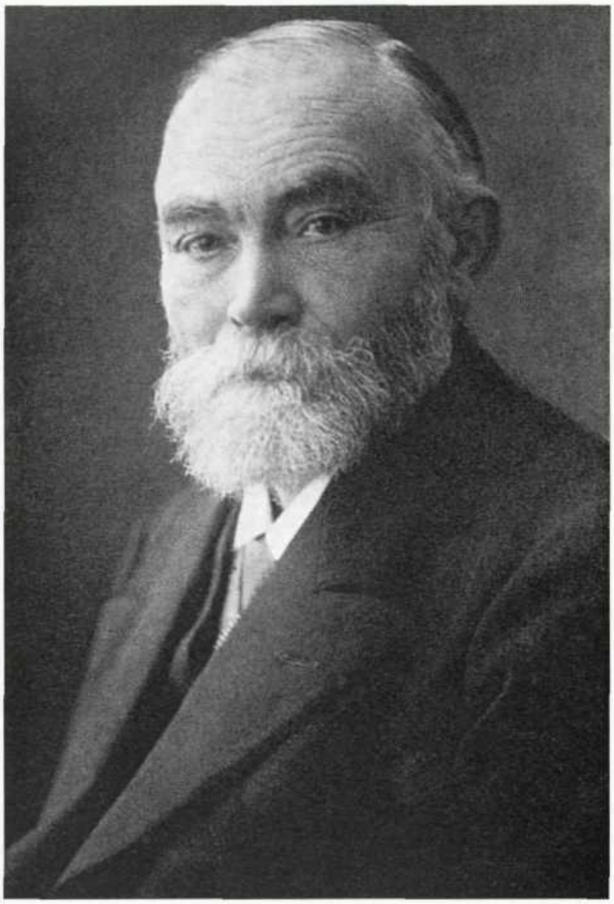
Desde 1897, Cantor se debatió entre depresiones y satisfacciones por el reconocimiento de su obra. El Congreso Internacional de Matemáticas de Zurich de 1897 le proclamó como uno de los matemáticos que más había enriquecido la teoría de conjuntos. En septiembre de 1911 recibió una invitación para visitar como sabio extranjero la Universidad de Saint Andrews en Escocia durante la celebración de su 500 aniversario. Cantor esperaba poder hablar con Russell, que acababa de publicar *Principia Mathematica*, sin embargo, su enfermedad y las noticias de que uno de sus hijos estaba enfermo le hicieron regresar a Alemania sin ver a Russell. El año siguiente se le dio el doctorado *honoris causa* por la Universidad de Saint Andrews, pero estaba demasiado enfermo y no pudo recibirlo en persona.

En los periodos de depresión posteriores a 1897 se alejaba de las matemáticas y se dedicaba a la filosofía y a recabar información sobre una idea literaria que le obsesionaba, que era la creencia de que Francis Bacon había escrito las obras de Shakespeare. La depresión se agudizó en octubre de 1896 por la muerte de su madre y en enero de 1899 por la de su hermano más joven. Después de una estancia en el hospital, en 1905 escribió una obra religiosa.

La retirada total de Cantor fue en 1913, pasando penurias cuando empezó la Segunda Guerra Mundial. En 1915, la celebración en Halle de su 70 aniversario hubo de ser cancelada por la guerra, y se hizo una pequeña conmemoración en su casa. En junio de 1917 se produjo su último ingreso en un sanatorio, falleciendo de un ataque al corazón el 6 de enero de 1918.

LAS AXIOMÁTICAS, LAS PARADOJAS Y EL «INGENUO» AXIOMA DE ELECCIÓN

Frege (1848 -1925) entre 1893 y 1903, y siguiendo el modelo idealista de Cantor, elaboró un sistema axiomático para la teoría de conjuntos, que pretendió fuese la base de toda la matemática. Fue invalidado por la célebre paradoja de Bertrand Russell (1872 - 1970) elaborada sobre el conjunto infinito B cuyos elementos son todos los



Gottlob Frege.

conjuntos X que no se contienen a sí mismos considerados como elementos. $X = \{1, 2\}$ sería uno de estos conjuntos. En el conjunto B es contradictorio que B, considerado como un elemento, pertenezca o no al conjunto B.

Esta paradoja no evitó que David Hilbert (1862 - 1943) hiciese uno de los mayores elogios de la teoría de conjuntos de Cantor, profetizando que «Cantor había creado con su teoría de conjuntos un paraíso para los matemáticos, de donde nadie les podría expulsar».

La profecía de Hilbert se vio realizada en 1908 cuando apareció la axiomática de Zermelo, y de forma independiente la de Russell y Whitehead, que restringiendo el concepto de conjunto eliminaron las paradojas. Ambas axiomáticas son *consistentes,* lo que significa que de ninguna de ellas se pueden deducir contradicciones.

La axiomática de Zermelo (1871 - 1953), enriquecida posteriormente por Fraenckel y Skolem, es la más utilizada. *Su axioma quinto postula la existencia de conjuntos infinitos.* Otro de los axiomas, llamado hoy *axioma de elección de Zermelo,* nos dice que dada una familia de conjuntos no vacíos existe un conjunto que tiene un elemento de cada conjunto de la familia. Admitiendo este axioma, Zermelo publicó un artículo en 1904 en *Mathematischen Annalen* con el que resolvía positivamente la conjetura de Cantor de que cada conjunto infinito admite una buena ordenación. Hoy sabemos que la conjetura de Cantor y el axioma de elección de Zermelo son equivalentes.

El aparentemente ingenuo axioma de elección de Zermelo habla de existencia y no de cómo hacer la elección, lo que requeriría un tiempo infinito si la familia de conjuntos no fuese numerable. Por ello, aunque Gödel (1906 - 1978) probó, en 1940, que el uso del axioma de elección no conduce a ninguna contradicción, su utilización nos lleva a consecuencias irrealizables dentro de nuestra realidad temporal. Nuestra limitación espacio-temporal nos impone otras restricciones, de las que el hábito nos priva de la sorpresa. Y así, por ejemplo, sabemos que no podemos escribir todas las cifras decimales de un número irracional o «sumar» directamente

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{4}$$

Una de esas consecuencias irrealizables es el teorema de Banach-Tarski de duplicación de la esfera, publicado en 1924 en *Fundamenta Mathematica.* Este teorema demuestra la posibilidad de descomponer una esfera de radio 1 en un número finito de partes que, sometidas a ciertos movimientos, se pueden reagrupar en otras dos esferas de radio también 1. Este resultado es un teorema, aunque se le conozca, no muy adecuadamente, como *paradoja de Banach-Tarski.* Algunas de las partes en que se descompone la esfera no deben ser medibles Lebesgue, pues la invariancia de la medida de Lebesgue en los movimientos impide poder duplicar una esfera con descomposiciones medibles Lebesgue. El axioma de elección es, pues, fundamental en la paradoja de Banach-Tarski, ya que Solovay demostró en 1971 que sin el axioma de elección no se pueden determinar subconjuntos que no sean medibles Lebesgue en el espacio euclídeo tridimensional.

Ernst Zermelo.

Prueba evidente del interés de los matemáticos por este paradójico resultado es que en 1945 fue complementado por Sierpinski al probar que bastaba descomponer la esfera en ocho partes para poder aplicar la duplicación de Banach y Tarski [6].

SIERPINSKI: EL EXPLORADOR DEL INFINITO

Waclaw Sierpinski (1882 - 1969) ha sido uno de los mejores continuadores de la teoría de conjuntos de Cantor. Gracias a su precoz talento pudo entrar en el Departamento de Matemáticas y Física de la Universidad de Varsovia en 1899, durante un periodo de ocupación rusa que había convertido la universidad polaca en un lugar de trabajo de profesores rusos. La obra de uno de ellos, Voronov, fue lo primero que atrajo la atención de Sierpinski, que obtuvo un premio al mejor ensayo de la contribución de Voronov a la teoría de números. Este ensayo tiene una importante aportación al «problema del círculo de Gauss», quien había probado en 1837 que si $R(r)$ es el número de puntos de coordenadas enteras contenidos en un círculo de centro el origen y radio r existe una constante C y un número k tales que

$$\left|R(r)-\pi r^2\right|<Cr^k$$

siendo el valor mínimo de k menor o igual que 1. Sierpinski probó que dicho valor era menor o igual que 2/3, resultado mejorado en 1924 por Littlewood y Walfisz al probar que k puede ser menor que 37/56. La mejor cota mínima conocida en la actualidad es 7/11.

Sierpinski obtuvo el doctorado en 1908 en Cracovia, bajo la dirección de Zaremba. En 1907 conoció el teorema de la biyección entre los puntos de R y de R^2 y le pidió a Banachiewicz, que se encontraba en Göttingen, que le explicase cómo era posible ese resultado. Recibió la respuesta del propio Cantor; comenzó a estudiar la teoría de conjuntos y en 1909 dio un curso dedicado a este tema.

Entre 1908 y 1914, mientras enseñaba en la Universidad de Lvov, Sierpinski publicó tres libros y muchos artículos de investigación. Los libros fueron: *Teoría de los números irracionales* (1910), *Resumen de la teoría de conjuntos* (1912) y *Teoría de números* (1912).

Cuando empezó la Primera Guerra Mundial, Sierpinski y su familia estaban en Rusia. Entonces los gobiernos de Austria y Rusia utilizaban la cuestión polaca como un arma política. Sierpinski fue internado en Viatka. En cuanto Egorov y Lusin supieron que estaba preso intercedieron por él para que se le permitiese ir a Moscú, donde pasó el resto de años de guerra trabajando con Lusin en la creación de la teoría de los conjuntos analíticos. En 1916, durante su estancia en Moscú, Sierpinski dio el primer ejemplo explícito de un número absolutamente normal [7], que tiene la propiedad de que sus dígitos se presentan con la misma frecuencia en cualquier base que se le escriba, cuya existencia, sin dar ningún ejemplo explícito, ya había sido probada por Borel.

Al terminar la guerra, Sierpinski volvió a Lvov en 1918, pero de inmediato le ofrecieron un puesto en la Universidad de Varsovia, donde permaneció el resto de su vida.

En 1920, junto con su primer estudiante Mazurkiewicz, fundó *Fundamenta Mathematica,* importante revista especializada en teoría de conjuntos. Durante este periodo trabajó en teoría de conjuntos, topología conjuntista y funciones de una variable real, con importantes contribuciones al axioma de elección, hipótesis del continuo, series funcionales, diferenciabilidad y clases de Baire. Continuó su colaboración con Lusin en el desarrollo de la teoría de conjuntos analíticos y proyectivos.

En 1921 fue elegido académico de la Academia polaca y decano de la Universidad de Varsovia. En 1928 se le nombró vicepresidente de la Sociedad Científica de Varsovia y presidente de la Sociedad Matemática Polaca.

La guerra de 1939 cambió su vida, pues tuvo que trabajar de administrativo en el ayuntamiento de Varsovia. La policía alemana quemó su casa en 1944, destruyendo su librería y sus cartas personales. Afortunadamente no perdió la vida, como les sucedió a los eminentes matemáticos Schauder, Dickstein y Zaremba.

Tampoco las dos guerras mundiales afectaron sensiblemente su obra, pues nos ha dejado 724 artículos de investigación y 50 libros. Recibió nueve doctorados *honoris causa* y fue miembro de catorce academias o instituciones de alto prestigio. Su discípulo Rotkiewicz le describió como «persona de salud excepcional y naturaleza generosa, capaz de trabajar en cualesquiera condiciones, de mente creativa y amante de los matemáticos creativos», considerándole el mayor y más productivo de los matemáticos polacos.

En su tumba se puede leer: «Waclaw Sierpinski, 1882 - 1969. Explorador del infinito».

SUSTITUTOS DEL AXIOMA DE ELECCIÓN

Ha habido matemáticos que con el deseo de eliminar los resultados paradójicos han propuesto la sustitución de su causa, que es el axioma de elección de Zermelo, por otros axiomas más restrictivos, como el *axioma de elección numerable,* que sólo postula que dada una familia numerable de conjuntos existe un conjunto que tiene un elemento de cada conjunto de la familia, o el *axioma de Solovay,* que nos dice que cada función real definida en un espacio euclídeo n-dimensional es medible Lebesgue.

[6] Abraham Robinson (1918 - 1974) probó en 1947 que cinco era el mínimo número de partes en que se debía descomponer la esfera para duplicarla. En 1961 inventó el análisis no estándar y en 1966, 250 años después de la muerte de Leibniz, publicó su famoso libro *Análisis no estándar,* donde presenta una teoría rigurosa de los infinitesimales, que obedecen, como Leibniz deseaba, las mismas leyes que los números reales.

[7] Un número es absolutamente normal si sus dígitos se presentan con la misma frecuencia en cualquier base que se le escriba.

Así se eliminan los resultados paradójicos y también muchos resultados familiares en el mundo matemático, lo que justifica su escasa repercusión.

GÖDEL Y LA INCOMPLETITUD DE LA ARITMÉTICA

Bolzano había demostrado que el conjunto de proposiciones matemáticas es infinito. Gödel (1906 - 1978) probó en 1931 que también es infinito el conjunto de las proposiciones sobre los números enteros y que no es reductible por inferencia lógica a un número finito de axiomas (teorema de la *incompletitud de la aritmética* publicado en la obra *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme)*. Por tanto, un sistema axiomático del que se deduzca la aritmética elemental contiene proposiciones sobre los números enteros de las que no se puede demostrar ni su veracidad ni su falsedad a partir del sistema axiomático y de las reglas usuales de la lógica. Estas proposiciones se denominan *indecidibles*.

El hallazgo de Gödel de la incompletitud de todo sistema axiomático que contenga a la aritmética elemental es uno de los más profundos e importantes de la lógica matemática, del que Gödel afirmaba que su platonismo le ayudó mucho en su descubrimiento. Este resultado es un hito histórico en la matemática del siglo XX, pues supuso el fin de cientos de años *de intentos de establecer toda la matemática sobre una base axiomática*. Por tanto, jamás se podrá programar un ordenador capaz de contestar a todas las cuestiones matemáticas.

Kurt Gödel había ingresado en la Universidad de Viena en 1923 para graduarse en Física, pero impresionado por las clases de Phillips Furtwängler, especialista en teoría de números, decidió cambiar de Física a Matemáticas. Además de Furtwängler tuvo excelentes maestros, como Hahn, Wirtinger, Menger y Helly, entre otros. Antes de terminar sus estudios participó en un seminario dirigido por Schlick que estudiaba el libro *Introduction to mathematical philosophy*, de Bertrand Russell. Se doctoró bajo la dirección de Hahn en 1929 y pasó a ser miembro de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Viena.

El propio Hahn, miembro del Círculo de Viena, le puso en contacto con este famoso Círculo, que intentaba construir una filosofía de la ciencia que sostiene que sólo tienen sentido las afirmaciones comprobables por la experiencia física, y que se la llama *positivismo lógico*, lo que también les llevó a eliminar el concepto de Dios. Esto chocaba con el idealismo de Gödel y con su profunda religiosidad, por lo que, aunque les respetaba científicamente, decidió abandonarlos.

En 1933, Hitler llegó al poder, lo que en principio no tuvo influencia en la vida de Gödel en Viena, dado su escaso interés por la política. Sin embargo, después de que un estudiante nacional-socialista asesinara a Schlick, cuyo seminario había despertado el interés de Gödel por la lógica, se sintió muy afectado y tuvo su primera depresión. Tras recuperarse, recibió en 1934 la primera invitación para dar unos seminarios en Princeton sobre las proposiciones indecidibles en los sistemas matemáticos formales *(On undecidable propositions of formal mathematical systems)*, de los que Kleene tomó unas notas que permitieron su publicación posterior.

De vuelta a Viena se casó con Adele Porkert en 1938, y tuvo la suerte de regresar a Estados Unidos cuando estalló la Segunda Guerra Mundial, viajando a través de Rusia y Japón. Tuvo una cátedra en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton desde 1940 hasta su muerte en 1978, ocurrida por desnutrición, ya que se negó a comer ante el convencimiento de que iba a ser envenenado. En 1974 recibió la National Medal of Science.

GÖDEL, COHEN Y LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

Al hablar de Cantor hemos comentado que no consiguió averiguar si era o no cierta la *hipótesis del continuo*[8]. En 1940, y en la obra *Consistency of axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Gödel probó que si una axiomática de la teoría de conjuntos es consistente[9] y se le añade como axioma la hipótesis del continuo, el nuevo sistema axiomático obtenido también es consistente.

Kurt Gödel junto a su esposa.

[8] Ya se ha expuesto que la hipótesis del continuo dice que «cada subconjunto infinito de números reales o se puede poner en biyección con el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, o con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales».

[9] Un sistema axiomático del que no se pueda deducir ninguna contradicción se dice que es consistente.

En 1963, Paul Joseph Cohen (1934 -) complementó el resultado anterior probando que si a una axiomática de la teoría de conjuntos se le añadía como axioma la negación de la hipótesis del continuo se obtenía otro sistema axiomático también consistente.

La conclusión de estos dos resultados es obvia: la hipótesis del continuo es un indecidible, luego Cantor jamás la hubiese podido demostrar.

LAS ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS, LA VERDAD Y LA BELLEZA

El esfuerzo del último siglo en encontrar las razones profundas de los descubrimientos y las ideas comunes sepultadas en distintas teorías matemáticas han revelado que la actividad interna del pensamiento matemático se concreta en la noción de *estructura,* consistente en ciertos entes abstractos, dados por unas *definiciones,* y sometidos a unas condiciones independientes, llamados *axiomas* o *postulados,* de manera que definiciones y axiomas no lleven a contradicción.

Y así, Ëmile Borel (1871 - 1956) nos presenta las matemáticas como «la ciencia que estudia relaciones entre ciertos entes abstractos definidos de manera arbitraria, con la única condición de que esas definiciones no conduzcan a contradicción». Para Borel, la distinción entre las matemáticas y la lógica o ciertos juegos como el ajedrez está en «que esas definiciones arbitrarias han sido sugeridas, primariamente, por analogías con objetos reales o han sido puras creaciones del espíritu humano que han permitido resolver más fácilmente ciertos problemas que los matemáticos o físicos se planteaban, aclarando las dificultades que éstos habían hallado». Así, por ejemplo, la línea recta, el círculo, los cuerpos sólidos de la mecánica racional han sido sugeridos por analogía con los objetos reales, en tanto que los números imaginarios, los transfinitos o el axioma de elección son puras creaciones del espíritu humano que han ayudado en la resolución de otros problemas matemáticos o físicos.

El desarrollo de las matemáticas depende, pues, del sistema axiomático que se utilice. La expresión *línea recta,* por ejemplo, tiene sentidos diferentes en la geometría de Euclides, en la de Lobachevski y en la de Riemann. Pero si la recta se define dentro de los axiomas de una geometría sabremos de qué estamos hablando y podremos atribuir a cada enunciado el calificativo de *verdadero, falso* o bien de *indecidible.* Según sea la geometría considerada se tiene que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos, inferior a dos rectos o superior a dos rectos, resultando que estos teoremas que parecen contradictorios son cada uno de ellos verdadero en la correspondiente geometría. Bertrand Russell (1872 - 1970), con una frase

Bertrand Russell.

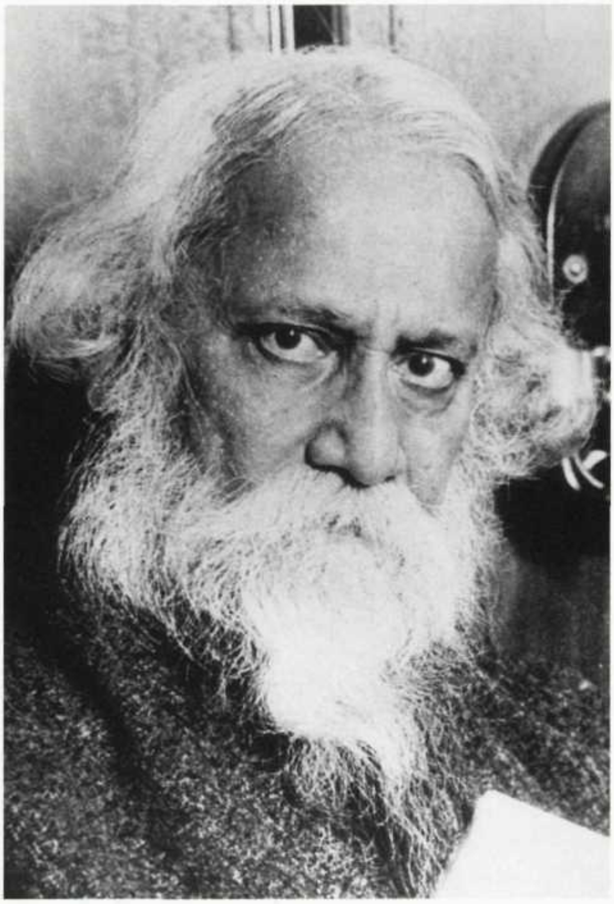
equívoca, trató de evidenciar el papel del sistema axiomático al decir que «las matemáticas son una ciencia en la que nunca se sabe de qué se habla, ni si lo que se dice es verdadero». Tal vez Russell tuviese el sentimiento de que su deseada identificación de matemáticas y lógica no iba a ser posible, o tal vez la frase sólo fuese un reflejo de su ingenioso humor inglés.

Tampoco las paradojas e indecidibles empañan la apasionante belleza de la matemática y en absoluto la privan de su aplicabilidad para expresar e interpretar las leyes de nuestro mundo. Sólo reflejan que la matemática es obra del hombre, limitado en el espacio y el tiempo, e incapaz de escapar a la universalidad de la máxima del poeta bengalí RabindranathTagore: «Si cerráis la puerta a todos los errores dejaréis fuera la verdad».

Con resultados paradójicos e indecidibles la matemática es, probablemente, la obra intelectual mejor hecha por el hombre, que crece y se enriquece desde sus mismas limitaciones, gracias al trabajo de muchísimos matemáticos que, «aunque no son platónicos, actúan como si lo fuesen. Mientras están trabajando, las relaciones y conceptos que manejan los consideran tan tangibles como el mundo que les rodea. Y esto utilizando constantemente el infinito, concepto usual en matemáticas» [10]. El platonismo, además de las matemáticas, inspira también nuestra ciencia y nuestra actuación. Gadamer nos dice: «... Platón tenía razón. Sólo a través de la supresión de los mitos en la ciencia se convierte en autodominio el dominio del saber».

Entre los legados más importantes que nos dejaron los griegos están su matemática y su filosofía. En particular les debemos la idea de verdad, como asentimiento profundo y convincente a una cadena de razonamientos. Al esplendor con que nos dejaron los griegos la idea de verdad no se ha conseguido añadir más brillantez en veinticinco siglos.

[10] Frase tomada del discurso del profesor M. Valdivia en su investidura como doctor *honoris causa* en la Universidad de Alicante (2 de mayo de 2000).



Rabindranath Tagore.

Paul Valéry.

Esa idea de verdad requiere la aceptación del deber de ir en su búsqueda con el alma entera, excluyendo toda reserva o compromiso, y atando el pensamiento a las exigencias que conforman el honor del trabajo científico. Por ello no puede extrañarnos que el genio de Descartes, Pascal o Leibniz lo percibamos igual en su creación matemática como en su preocupación por el conocimiento de Dios en las *Cinco meditaciones de Metafísica* de Descartes o en las *Teodiceas* de Pascal o Leibniz.

La matemática es considerada por muchos la más bella de las ciencias y una de las bases de nuestro pensamiento, como expresa el poeta francés Paul Valéry (1871 - 1945) en los siguientes párrafos de su carta inédita de febrero de 1932, recogida en la introducción del libro *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, de François Le Lionnais:

> Si le atrae el aspecto matemático del pensamiento, o más bien el aspecto filosófico de las matemáticas, lea las obras de Bertrand Russell, que son muy notables, y combine su lectura con la de los estudios críticos de H. Poincaré. Para la mecánica, hallará informes preciosos sobre su génesis en dos volúmenes de Jouquet que están hechos con textos originales, desde la Antigüedad. Desgraciadamente, la guerra ha interrumpido la publicación de esta antología ordenada y comentada, que se detiene (si mis recuerdos son exactos) antes de la introducción del principio de Mayer.
>
> Pero, de manera general, si usted no pretende hacer de las matemáticas su principal objeto de estudio y si no busca en ella más que el fruto típico que pueden ofrecer al espíritu la atención y el análisis de conceptos arbitrariamente definidos, me permito darle el consejo de que retome los comienzos de esta ciencia y considere por usted mismo los problemas más elementales, en apariencia.
>
> Estas premisas, por lo demás son una fuente perpetua de reflexiones y descubrimientos para los maestros. Nada más que en la numeración hallará usted materia para reflexionar durante largo tiempo. Piense que Leibniz no desdeñó ocuparse de ella.
>
> No menos interesante para la meditación es la notación algebraica; toda la parte formal y simbólica que se ha derivado de ella poco a poco y ha adquirido un desarrollo inmenso, es algo del mayor interés.
>
> Lo mismo las definiciones y los postulados de la geometría, cuyo análisis infinitamente sutil realizado en los tiempos modernos, ha permitido concebir la Física como una Geometría generalizada.
>
> He aquí, señor, algunas sugerencias. No sé si responden a sus deseos, pero yo no soy en absoluto un especialista, sino a lo sumo un admirador y un amante desdichado de la más bella de las ciencias.

BIBLIOGRAFÍA

1. Arnol'd, V. I. & Vasil'ev, V. A. (1989) Newton's «Principia» read 300 years later. *Notices Amer. Math. Soc.* **36** (9), 1148-1154.
2. Dieudonné, J. (1989) *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy.* Ed.: Alianza Editorial.
3. García Barreno, P. director (2000) *La Ciencia en tus manos.* Ed.: Espasa Calpe, Madrid.
4. Garcíadiego, A. R. (1988) Bertrand Russell y el origen de las paradojas en la teoría de conjuntos. *Mathesis* 4 (1), 113-130.
5. Le Lionnais, F. (1962) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Ed.: Eudeba. Buenos Aires.
6. Maravall, D. (1961) *Filosofía de las matemáticas.* Ed.: Dossat.
7. Maravall, D. (1966) *Teoría de la Investigación Matemática.* Ed.: Dossat.
8. Maravall, D. (1969) *Didáctica y Dialéctica Matemáticas.* Ed.: Dossat.
9. Maravall, D. (1973) *Grandes problemas de la Filosofía Científica.* Ed.: Editora Nacional.
10. Maravall, D. (1981) Introducción a la investigación en Física y Matemáticas. Empeño 14.
11. Russell, B. (segunda edición en castellano 1997) *Historia de la filosofía occidental.* Ed.: Espasa Calpe, Colección Austral, Madrid.
12. Wurtz, J. P. (1989) La naissance du calcul différentiel et le problème du statut des infiniment petits: Leibniz et Guillaume de L'Hopital. *La Mathématique non standard* (París) 13-41.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

13. Aaboe, A & Bergren, J. L. (1996) Didactical and other remarks on some theorems of Archimedes and infinitesimals. *Centaurus* **38** (4) (1996), 295-316.
14. Adamowicz, Z. (1984) Waclaw Sierpinski's contribution to general set theory. *Wiadomosci matematyczne* **26** (1), 9-18.
15. Andrade, E. N. da C. (1943) Newton and the science of his age. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **181**, 227-243.
16. Anellis, I. H. (1987) Russell's earliest interpretation of Cantorian set theory, 1896-1900. *Philos. Math. (2)* **2** (1), 1-31.
17. Archibald, R. C. (1950) The first translation of Euclid's elements into English and its source. *Amer. Math. Monthly* **57**, 443-452.
18. Bachowicz, K. (1983) On certain of Leibniz's observations concerning the substantiation of mathematical statements. *Polish Acad. Sci. Inst. Philos. Bull. Sect. Logic* **12** (4), 143-147.
19. Bello, A. Lo (1991) Descartes and the philosophy of mathematics. *The Mathematical Intelligencer* **13**, 35-39.
20. Berggren, J. L. (1976/77) Spurious theorems in Archimedes' Equilibrium of planes. Book I. *Arch. History Exact Sci.* **16** (2), 87-103.
21. Berggren, J. L. (1977) A lacuna in Book T of Archimedes «Sphere and cylinder». *Historia Math.* **4**, 1-5.
22. Beumer, M. G. (11946) Archimedes and the trisection of the angle. *Nieuw Tijdschr. Wiskunde* **33**, 281-287.
23. Blaquier, J. (1947) Sir Isaac Newton: the man and the mathematician (Spanish), *Anales Acad. Nac. Ci. Ex. Fis. Nat. Buenos Aires* **12**, 9-32.
24. Broad, W. J. (1981) Sir Isaac Newton: mad as a hatter. *Science* **213**, 1341-1344.
25. Brumbaugh, R.W. (1981) *The philosophers of Greece.* Ed.: Albany, New York.
26. Boyer, C. B. (1952) Fermat and Descartes. *Scripta Math.* **18**, 189-217.
27. Boyer, C. B. (1959) Descartes and the geometrization of algebra. *Amer. Math. Monthly* **66**, 390-393.
28. Bourbaki, N. (1976) *Elementos de la Historia de las Matemáticas.* Ed.: Alianza Editorial, Colección Alianza Universidad, Madrid.
29. Chant, C. A. (1943) Isaac Newton: Born three hundred years ago. *J. Roy. Astr. Soc. Canada* **37**, 1-16.
30. Costabel, P. (1969) Les mémoires de Leibniz sur l' arithmetique binaire à l'Académie Royale des Sciences de Paris. *Studia Leibnitiana. Supplementa* **II** (Wiesbaden), 20-26.
31. Costabel, P. (1985) Descartes et la mathématique de l'infini. *Historia Sci.* **29**, 37-49.
32. Crossley, J. (1973) A note on Cantor's theorem and Russell's paradox. *Austral. J. Philos.* **51**, 70-71.
33. Dawson, J. W. (1986) The papers of Kurt Gödel. *Historia Mathematica* **13** (**3**) (1986), 277.
34. Dauben, J. W. (1979) *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Ed.: Cambridge U. P.
35. Dijksterhuis, E. J. (1954) Die Integrationsmethoden von Archimedes. *Nordisk Mat. Tidskr.* **2**, 5-23.
36. Dilworth, C. (1985) Boyle, Hooke and Newton: some aspects of scientific collaboration. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Sci. Fis. Natur. (5)* **9**, 329-331.
37. Dimitri'c, R. (1991) Sir Isaac Newton. *Math. Intelligencer* **13** (**1**), 61-65.
38. Dugac, P. (1984) Georg Cantor and Henri Poincaré. *Bulletino Storia delle Scienze Matematiche* **4**, 65-96.
39. Erlichson, H. (1991) How Newton went from a mathematical model to a physical model for the problem of a first resistive force. *Centaurus* **34** (**3**), 272-283.
40. Feferman, S. (1984) Kurt Gödel: conviction and caution. *Philos. Natur.* **21**, 2-4.
41. Feingold, M. (1993) Newton, Leibniz and Barrow too: an attempt at a reinterpretation. *Isis* **84** (**2**), 310-338.
42. Fowler, D. H. (1983) Investigating Euclid's «Elements». *British J. Philos. Sci.* **34**, 57-70.
43. Fowler, D. H. (1987) *The mathematics of Plato's academy: a new reconstruction.* Ed.: Oxford U. P.

44. Fowler, D. H. (1992) An invitation to read Book X of Euclid's «Elements». *Historia Math.* **19 (3)**, 233-264.
45. Franklin, A. y Howson, C. (1985) Newton and Kepler, a Bayesian approach. *Stud. Hist. Philos. Sci.* **16** (4), 379-385.
46. Freudenthal, H. (1972) Leiniz und die «Analysis Situs». *Studia Leibnitiana* **4 (1)**, 61-69.
47. Gant, F. De (1990) The mathematical style of Newton's «Principia», *Mathesis* **6 (2)**, 163-189.
48. Gispert, H. (1995) La théory des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue ... et tous les autres. *Rev. Histoire Math.* **1 (1)**, 39-81.
49. Guerlac, H. (1984) «Newton's mathematical way»: another look. *British J. Hist. Sci.* **17 (55, 1)**, 61-64.
50. Heath, T. L. (1931) *A history of Greek mathematics II.* Ed.: Oxford U. P.
51. Hendy, M. D. (1975) Euclid and the fundamental theorem of arithmetic. *Historia Math.* **2**, 189-192.
52. Hofmann, J. E. (1974) *Leibniz in Paris, 1672-1676.* Ed.: Cambridge U.P.
53. Hollingdale, S. H. (1985) Leibniz and the first publication of the calculus in 1684. *Bull. Inst. Math. Appl.* **21 (5-6)**, 88-94.
54. Itard, J. (1950) Quelques remarques sur les méthodes infinitesimales chez Euclide et Archimède. *Rev. Hist. Sci. Appl.* **3**, 210-213.
55. Johnson, D. M. (1976) Prelude to dimension theory: The geometrical investigations of Bernhard Bolzano. *Archiv for History of Exact Science* **17**, 275-296.
56. Jones, C. V. (1987) La influencia de Aristóteles en los fundamentos de los Elementos de Euclides. *Mathesis* **3** (4), 375-387.
57. Kanamori, A. (1996) The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen. *Bull. Symbolic Logic* **2 (1)**, 1-71.
58. Kertész, A. (1976) The significance of Cantor's ideas for the development of algebra. *Scientia* **105**, 203-209.
59. Keynes, M. (1995) The personality of Isaac Newton, *Notes and Records of the Royal Society of London* **49**, 1-56.
60. Kleene, S. C. (1976) The work of Kurt Gödel. *J. Symbolic Logic* **41 (4)**, 761-778.
61. Kline, M. (1992) *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Ed.: Alianza Universidad.
62. Kluge, K. W. (1980) Frege, Leibniz and the notion of an ideal language. *Studia Leibnitiana* **12 (1)**, 140-154.
63. Knorr, W. R. (1975/76) Archimedes and the measurement of the circle: a new interpretation. *Arch. History Exact Sci.* **15 (2)**, 115-140.
64. Knorr, W. R. (1985) Euclid's tenth book: an analytic survey. *Historia Sci.* **29**, 17-35.
65. Levy, A. (1988) Alfred Tarski's work in set theory. *J. Symbolic Logic* **53 (1)**, 2-6.
66. Lindemann, H. A. (1946) Leibniz y la lógica moderna. *An. Soc. Ci. Argentina* **142**, 164-176.
67. Lionnais, F. Le (1952) Descartes et Einstein. *Rev. Hist. Sci. Appl.* **5**, 139-154.
68. Lohne, J. A. (1966) Fermat, Newton, Leibniz und das anaklastiche Problem. *Nordisk Mat. Tidskr.* **14**, 5-25.
69. Loomis, D. E. (1990) Euclid: rhetoric in mathematics. *Philos. Math. (2)* **5 (1-2)**, 56-72.
70. McGuire, J. E. (1978) Newton on place, time and God: an unpublished source. *British J. Hist. Sci.* **11 (38, 2)**, 114-129.
71. Meurers, J. (1974/75) Bolzanos Paradoxien des Unendlichen und die von Seeliger-Charlierschen Sätze über ein unendliches Universum. *Philos. Natur.* **15**, 176-190.
72. Molland, A. G. (1976) Shifting the foundations: Descartes's transformation of ancient geometry. *Historia Math.* **3**, 21-49.
73. Moore, G. H. (1978) The origins of Zermelo's axiomatisation of set theory. *Journal of Philosophical Logic* 7, 307-329.
74. Mueller, I. (1969) Euclid's «Elements» and the axiomatic method. *British J. Philos. Sci.* **20**, 289-309.
75. Murata, T. A tentative reconstruction of the formation process of Book XIII of Euclid's «Elements». *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **38(1)**, 101-127.
76. Murata, T. (1992) Quelques remarques sur le Livre X des «Elements» d'Euclide. *Historia Sci.(2)* 2(1), 51-60.
77. Nauenberg, M. (1994) Newton's early computational method. *Archiv for the History of the Exact Science* **46** **(3)**, 221-252.
78. Parsons, C. (1995) Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought, Bull. *Symbolic Logic* **1** (1), 44-74.
79. Peiffer, J. (1989) Leibniz, Newton et leurs disciples. *Rev. Histoire Sci.* **42** (3), 303-312.
80. Pereira da Silva, C. (1987) On Archimedes of Syracuse. *Bol. Soc. Paran. Mat. (2)* **8 (1)**, 51-68.
81. Purkert, W. (1986) Georg Cantor und die Antinomien der Mengenlehre. *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A* **38**, 313-327.
82. Rotkiewicz, A. (1972) W. Sierpinski's works on the theory of numbers. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **21**, 5-24.
83. Saito, K. (1993) Duplicate ratio in Book VI of Euclid's «Elements». *Historia Sci. (2)* **3** (2), 115-135.
84. Sato, T. (1979) Archimedes' «On the measurement of a circle», Proposition 1: an attempt at reconstruction. *Japan Stud. Hist. Sci.* **18**, 83-99.
85. Schinzel, A. (1984) The role of Waclaw Sierpinski in the history of Polish Mathematics. *Wiadomosci matematyczne* **26** (1), 1-9.
86. Sebestik, J. (1990) El sistema matemático de Bernard Bolzano. *Mathesis* **6** (4), 393-417.
87. Simons, P. (1987) Bolzano, Tarski and the limits of logic, Bolzano. *Studien. Philos. Natur.* **24** (4), 378-405.
88. Solovay, R. M. (1964) A model set-theory in which every set of reals is Lebegue measurable. *July meeting of the Association for Symbolic Logic at Bristol, England.*

89. Theisen, W. Euclid, relativity, and sailing. *Historia Math.* **11** (**1**), 81-85.
90. Thompson, P. (1981) Bolzano's deducibility and Tarski's logical consequence. *Hist. Philos. Logic* **2**, 11-20.
91. Toussaint, G. (1993) Una nueva visión de la segunda proposición de Euclides. *Mathesis* **9** (**3**), 265-294.
92. Treder, H. J. (1982) Descartes' Physik der Hypothesen, Newtons Physik der Prinzipien und Leibnizens Physik der Prinzipe. *Studia Leibnitiana* **14** (**2**), 278-286.
93. Van der Waerden, B. L. (1947-49) Die Arithmetik der Pythagoreer. *Math. Annalen* **120**, 127– 153, 676–700.
94. Van Rootselaar, B. (1964/1965) Bolzano's theory of real numbers. *Arch. History Exact Sci.* **2**, 168-180.
95. Wang, H. (1981) Some facts about Kurt Gödel. *J. Symbolic Logic* **46** (**3**), 653-659.
96. Wangerin, A. (1918) Georg Cantor. *Leopoldina* **54**, 10-13.
97. Whiteside, D. T. (1970) The mathematical principles underlying Newton's Principia. *J. Hist. Astronomy* **1**, 118-119.
98. Whiteside, D. T. (1970) The mathematical principles underlying Newton's «Principia mathematica». *J. Hist. Astronomy* **1**(**2**), 116-138.
99. Whitrow, G. J. (1989) Newton's role in the history of mathematics. *Notes and Records Roy. Soc. London* **43** (**1**), 71-92.
100. Whittaker, E. T. (1942) Aristotle, Newton, Einstein. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **61**, 231-246.
101. Whittaker, E. T. (1943) Aristotle, Newton, Einstein. *Philos. Mag. (7)* **34**, 266-280.
102. Yaglom, I. M. (1983) Why was higher mathematics simultaneously discovered by Newton and Leibnitz? *Number and thought* **6**, 99-125 (Moscú).
103. Yushkevich, A. P. Newton and the mathematical natural sciences. *Mat. Shkole* **1**, 64-67.
104. Yushkevich A. P. y Kopelevich, Ju Ch. (1988) La correspondance de Leibniz avec Goldbach. *Studia Leibnitiana* **20** (**2**) (1988), 175-189.

DIRECCIÓN EN LA RED

105. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biog Index.html (Indice de biografías).