VERDADES NO DEMOSTRABLES: TEOREMAS DE GÖDEL Y SUS GENERALIZACIONES

BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS
Real Academia de Ciencias

Si se nos preguntase cuáles son las contribuciones más importantes a las matemáticas en el siglo XX, contestaríamos que son la creación o descubrimiento de la teoría de conjuntos por G. Cantor y los teoremas de incompletitud de K. Gödel.

La teoría de conjuntos con sus paradojas dio un gran impulso a los fundamentos de las matemáticas y a la noción de verdad.

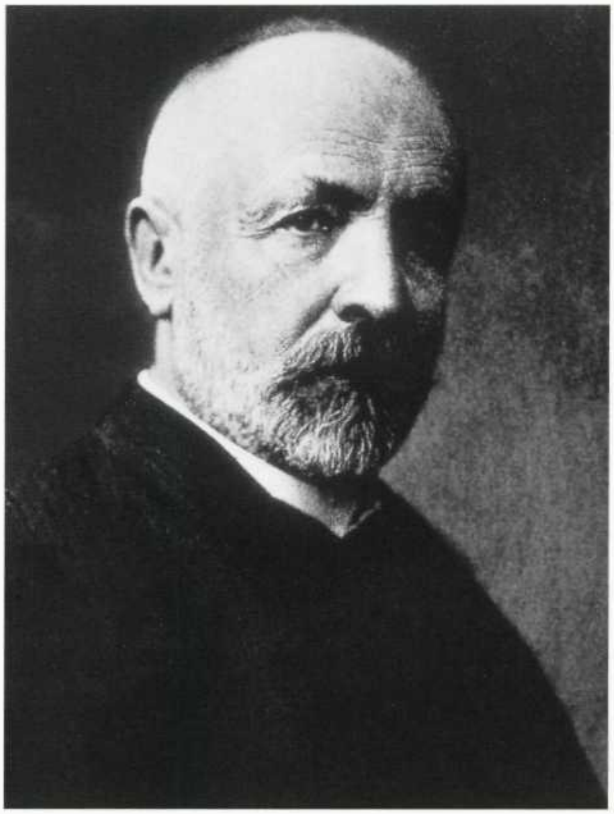
Las matemáticas se fundamentan en la verdad, pero no en una verdad cualquiera de carácter relativo, sino en una de carácter absoluto. Sin embargo, últimamente han surgido dudas de si existe esa verdad.

Si no existe la verdad, la frase «no existe la verdad» sería verdadera en contra de la suposición de que no existe la verdad. Esta contradicción sería para muchos una demostración de que existe la verdad. Pero si reflexionamos podemos llegar más lejos, puesto que se debería admitir que si no existe la verdad tampoco existiría la mentira y estaríamos en un mundo caótico en contra de todo lo que percibimos y en donde la mentira sería la verdad.

Si nos piden un ejemplo de verdad absoluta, daríamos como tal las proposiciones de la aritmética. Sus verdades las conocemos por la intuición razonable, de modo que mediante la lógica podemos deducir los teoremas a partir de los axiomas. Antes de Gödel, incluido Hilbert, se creía que todas las verdades de la aritmética eran demostrables. Pero Gödel demostró en 1931 que existen verdades aritméticas no demostrables, entre ellas la consistencia o no contradicción de la aritmética.

La existencia de verdades no demostrables tiene una aplicación importantísima en la teología, puesto que Dios es una verdad no demostrable, como lo prueba la experiencia y el fracaso de demostraciones contundentes, admitidas por todos, de la existencia de Dios. Para demostrar la existencia de Dios tenemos que basarnos en una verdad lógicamente equivalente que no puede ser más que la misma Verdad porque Dios es la Verdad.

Se han hecho intentos de demostrar la no existencia de Dios, pero si se identifica Dios con la verdad, ello es radicalmente imposible. Porque si no existiese la verdad, la lógica caería en defecto por basarse en la verdad que se considera que no existe. Es más, el empleo de la lógica viene a ser un reconocimiento implícito de la existencia de la verdad.



Georg Cantor.

Nuestra mente capta las verdades mediante la intuición razonable y la lógica. La intuición razonable es un don que está muy dentro de nuestro ser y procede de fuera y que captamos mediante la reflexión. Y la lógica es un don que conocemos por la palabra y el lenguaje.

Usualmente, las matemáticas se basan en los axiomas. De los axiomas se deducen los teoremas mediante las reglas deductivas o de inferencia. Es claro que el conjunto de reglas deductivas debe ser no vacío y finito para que pue-

K. Gödel (izquierda) junto a A. Einstein.

da ser manejable por el hombre. Dado un conjunto A de axiomas y prefijadas las reglas deductivas, denotaremos por $T(A)$ el conjunto de los teoremas de A. Este conjunto, si A es finito, es numerable. Entonces $T(A)$ es el sistema lógico o teoría generado por A.

Dos conjuntos finitos se dice que tienen el mismo número cardinal si se puede establecer una correspondencia biyectiva (o uno a uno) entre ambos. De la misma manera, como se puede establecer una correspondencia biyectiva entre el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y el conjunto $2\mathbb{N}$ formado por los números pares asignando a cada número natural n el número par $2n$, diremos que $\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}$ tienen el mismo cardinal. De manera general, un conjunto se dice numerable si tiene el mismo número cardinal que el conjunto $\mathbb{N}$ y contable si es finito o numerable. Se puede probar que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es contable. Los conjuntos infinitos están caracterizados por la propiedad de no ser coordinables con ninguna de sus partes propias, por lo que en el sentido de la cardinalidad todo conjunto finito es mayor que cualquiera de sus partes propias. *Esto no pasa con* $\mathbb{N}$, *que tiene el mismo cardinal* que $2\mathbb{N}$, y en general con todos los subconjuntos infinitos.

Como se sabe, la diferencia de dos números naturales es un número entero y el cociente de dos números enteros es un número racional cuando el divisor es distinto de cero. Los números reales surgen como una sucesión de números racionales, pero intuitivamente son números decimales con infinitas cifras detrás de la coma. Esto si se utiliza la numeración usual con base 10, pero también se puede utilizar cualquier otra base, como por ejemplo 2, como ocurre en la informática. Surge ahora la pregunta, si el cardinal del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es igual que el del conjunto de los números naturales. Cantor probó, utilizando la teoría de conjuntos, que ambos son distintos, mientras que el conjunto de los números naturales es numerable. Pero la pregunta vuelve a surgir si sólo se admiten demostraciones dentro de la aritmética. La contestación es que dentro de la aritmética no se puede demostrar que el conjunto de los números reales no es contable.

Un sistema de axiomas se dice que es consistente cuando en el sistema lógico $T(A)$ de los teoremas de A no hay contradicción, esto es, si $T(A)$ no contiene a la vez un teorema P y su negación $\neg$P = no P.

El sistema lógico de la aritmética S_0 admite un sistema de axiomas finito A_0 tal que, según el primer teorema de incompletitud de Gödel existe una proposición indecidible P; es decir, que no se puede demostrar P ni su negación. Es claro que, si existe la verdad en las matemáticas, por el principio del tercio excluso, P o su negación es verdadera. Más adelante vamos a dar una idea de la demostración de este teorema de Gödel.

La existencia de la verdad en las matemáticas es una cuestión muy delicada que requiere una reflexión que vamos a desarrollar a continuación.

En el análisis matemático se prueba utilizando la teoría de conjuntos que existe una medida, llamada de Lebesgue, con propiedades muy atrayentes y fecundas sobre una clase muy amplia de subconjuntos de la recta real $\mathbb{R}$, llamados medibles Lebesgue. Esta medida para un intervalo coincide con su longitud y es tal que la clase de los conjuntos medibles Lebesgue es cerrada por la unión e inter-

Henri-León Lebesgue.

sección contable de conjuntos y también por la diferencia. Pues bien, del axioma de elección se deduce que existe un conjunto A no medible Lebesgue de la recta real $\mathbb{R}$ y, por otra parte, según el axioma de Solovay todo subconjunto A de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue. Esto debe asombrar a cualquiera. Pero además ocurre que el axioma de elección es consistente con la axiomática de Zermelo-Fraenkel y, por otra parte, el axioma de Solovay es también consistente con esta axiomática de la teoría de conjuntos más la existencia de un cardinal inaccesible. Entonces la unión, o mejor la conjunción, del axioma de elección, del axioma de Solovay y de la axiomática de Zermelo-Fraenkel es inconsistente por contener una contradicción. Esto no es posible si existe la verdad matemática y fueran verdaderos el axioma de elección y el axioma de Solovay. Luego, si existe la verdad en las matemáticas, existen sistemas consistentes de axiomas, que contienen axiomas no verdaderos.

Aunque no es necesario conocer en qué consiste el axioma de elección para comprender la parte esencial de lo que hemos dicho, vamos a exponerlo. Dada una familia de conjuntos disjuntos y no vacíos, el axioma de elección expresa que existe un conjunto formado por un elemento y sólo uno de cada uno de dichos conjuntos.

La existencia de conjuntos no medibles Lebesgue del espacio $\mathbb{R}^3$ queda patente de manera muy sugestiva por la paradoja de Banach-Tarski, consecuencia del axioma de elección, que consiste en poder descomponer una bola como un guisante en un número finito de partes para recomponer una bola como el Sol. Aunque en el caso del plano $\mathbb{R}^2$ existen igualmente conjuntos no medibles Lebesgue, esta descomposición no es posible por existir una medida finitamente aditiva sobre todos los conjuntos de $\mathbb{R}^2$, que es una extensión de la medida de Lebesgue, como se prueba mediante el teorema de Hahn-Banach.

Como hemos visto, existen sistemas de axiomas que son consistentes pero que contienen proposiciones no verdaderas. En concreto, una de dos, o el axioma de Solovay es falso o el axioma de elección es falso. Por tanto, la consistencia de un sistema de axiomas es necesaria para que dichos axiomas sean todos verdaderos, pero no es suficiente. Esto justifica que como L. E. J. Brouver, aunque desde otro punto de vista, digamos que «La certeza es más importante que la consistencia». Probablemente, el sistema de axiomas ZF+noCH es consistente pero no verdadero.

Ahora vamos a dar una idea de la anunciada demostración del primer teorema de incompletitud de Gödel, si bien para mayor sencillez en primer lugar desarrollaremos otra.

Sea A un sistema de axiomas finito o contable consistente y supongamos que la frase «el conjunto de los números reales no es contable» es una proposición verdadera. Entonces, si esta proposición P es un teorema de A, siendo $T(A)$ contable, se sigue que existe un número real que es una proposición verdadera que no es un teorema de A (conviene tener en cuenta que todo número real α se identifica con la proposición $\alpha = \alpha$). Por otra parte, si P no es un teorema de A, resultaría que la misma P sería una proposición verdadera que no es un teorema de A.

A. Tarski (izquierda) junto a K. Gödel.

Conviene recordar que el primer teorema de incompletitud de Gödel afirma que si A es un sistema lógico consistente con ciertas propiedades (en concreto, si es finitamente axiomatizable) y, por tanto, contable, que contiene los axiomas de la aritmética, entonces existe una proposición verdadera que no es un teorema de A.

De otro modo, sea A un sistema de axiomas consistente y contable. Entonces, si la frase «la clase de las proposiciones verdaderas no es un conjunto contable» es una proposición verdadera P, se sigue de igual forma que anteriormente que existe una proposición verdadera que no es un teorema de A, porque en el peor de los casos dicha proposición P sería una proposición verdadera que no es un teorema de A. Esta proposición está casi dentro del sistema lógico $T(A)$, generado por A, porque sólo se utiliza en ella la intuición de que la clase de las proposiciones verdaderas no es contable. Es claro que si esto fuese cierto o no se aceptase, sólo existiría un solo número cardinal infinito verdadero: el χ_0, y se renegaría de la obra de Cantor.

Como se sabe, la proposición de que el conjunto de los números reales no es contable es una consecuencia de la compleción del conjunto de los números racionales y de un razonamiento análogo al que establece el teorema de Baire. Por otra parte, si se admite que el conjunto de los números reales es contable, resulta que la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ como suma de las medidas de sus subconjuntos unitarios es nula, con lo cual quedaría destruida gran parte de las matemáticas. Por tanto, la lógica matemática de primer orden de la teoría de la computabilidad es insuficiente para el desarrollo y estudio de las matemáticas. Por otra parte, la gran acogida filosófica que ha tenido el teorema de Gödel en condiciones generales que se salen de su marco primitivo, impulsa a estudiar su generalización dentro del análisis matemático.

Ahora vamos a dar, por fin, la idea de la anunciada demostración clásica del primer teorema de incompletitud de Gödel. La idea central es sencilla, bella y profunda. La parte complicada consiste en codificar realmente las reglas de inferencia del sistema formal, y también el uso de sus diversos axiomas, en operaciones aritméticas. Consideremos ahora las funciones proposicionales que dependen de una sola variable. Sea P_n la n-ésima de estas funciones proposicionales. Si $P_n(w)$ es sintácticamente correcta será algún enunciado aritmético concreto perfectamente bien definido que concierne a los dos números naturales n y w. Cuál sea exactamente este enunciado dependerá de los detalles del sistema de numeración específico que hayamos elegido. Esto pertenece a la parte complicada del argumento y no nos interesa aquí. Las cadenas de proposiciones que constituyen una demostración de algún teorema en el sistema pueden ser etiquetadas también mediante números naturales utilizando el esquema de ordenación elegido. Denotaremos por Π_n la n-ésima demostración.

Consideremos ahora la siguiente función proposicional que depende del número natural w:

$$\neg \exists x [\Pi_x \text{ demuestra } P_w(w)]$$

El enunciado dentro del paréntesis cuadrado se da parcialmente en palabras, pero es un enunciado perfecta y exactamente bien definido. Afirma que la x-ésima demostración es realmente una demostración de la proposición que constituye $P_w(.)$ aplicada al propio valor w. El cuantificador existencial negado, fuera del paréntesis, sirve para eliminar una de las variables («no existe x tal que...»), de modo que nos queda una función proposicional aritmética que sólo depende de una sola variable w. La expresión global afirma que no existe demostración de $P_w(w)$.

John von Neumann.

Como hemos indicado, todas las funciones proposicionales que dependen de la variable w se pueden codificar, de modo que la que acabamos de escribir debe tener asignado un número natural n. Por consiguiente:

$$\neg \exists x [\Pi_x \text{ demuestra } P_w(w)] = P_n(w)$$

Examinemos ahora esta función para el valor particular $w = n$. Entonces:

$$\neg \exists x [\Pi_x \text{ demuestra } P_n(n)] = P_n(n)$$

La función específica $P_n(n)$ es un enunciado perfectamente bien definido en la aritmética (sintácticamente correcto). Aunque $P_n(n)$ es sólo una proposición aritmética, la hemos construido de modo que afirma lo que se ha construido en el lado izquierdo: «no existe demostración dentro del sistema, de la proposición $P_n(n)$». Entonces no puede haber ninguna demostración de esta $P_n(n)$ dentro del sistema. En efecto, si hubiera tal demostración, el significado del enunciado que $P_n(n)$ realmente afirma, a saber, que no existe demostración, sería falso, de modo que $P_n(n)$ tendría que ser falsa como proposición aritmética. Así hemos encontrado una proposición verdadera que no tiene demostración dentro del sistema. Es claro que siendo entonces $\neg P_n(n)$ una proposición falsa no se puede demostrar tampoco dentro del sistema. Así, ni $P_n(n)$ ni su negación $\neg P_n(n)$ son demostrables dentro del sistema.

El primer hecho descubierto por Gödel fue que el conjunto S de (los números de Gödel de) las proposiciones verdaderas en $\mathbb{N}$ de la aritmética no era definible, dentro del modelo estándar $\mathbb{N}$, por una fórmula aritmética con una sola variable libre. El motivo estaba en la posibilidad de construir una proposición aritmética cuyo significado era «esta proposición es falsa en $\mathbb{N}$», con lo que se caía en la misma contradicción que en la antigua *paradoja de Epiménides*. Este resultado se conoce hoy como metateorema de Tarski de indefinibilidad de la verdad dentro de un lenguaje formal adecuado.

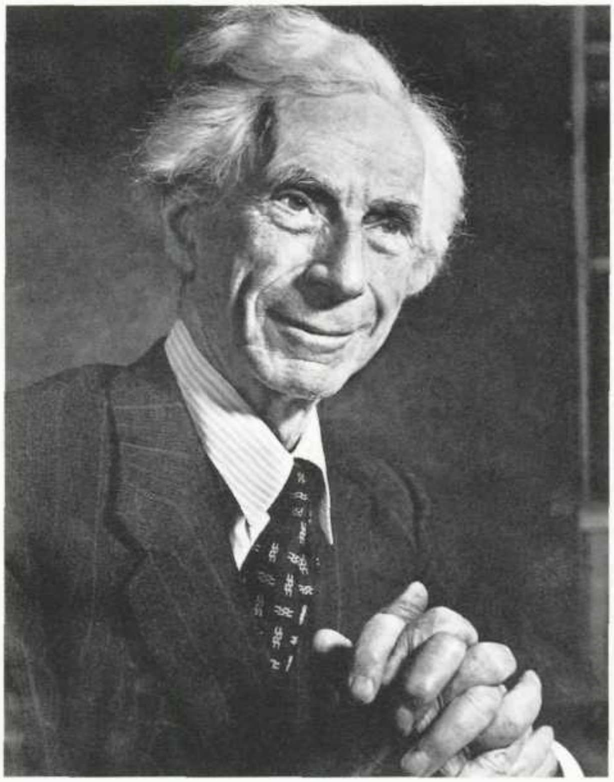
Un análisis de la demostración del primer teorema de incompletitud de Gödel condujo a éste y, de manera independiente a Von Neumann, al llamado segundo teorema de incompletitud. En efecto, la formalización del primer teorema muestra que la única hipótesis sobre el sistema lógico es su propia consistencia, de modo que, si la consistencia de una aritmética suficientemente fuerte o exigente fuera demostrable dentro de esa misma aritmética, entonces la proposición indecidible sería demostrable a su vez. La consecuencia es inmediata: si la aritmética en cuestión es consistente, entonces dentro de ella misma no es demostrable esa consistencia. Este profundo resultado venía a resolver negativamente el problema planteado por Hilbert de demostrar por métodos finitarios la consistencia de la aritmética, puesto que los métodos finitarios quedan incluidos dentro de la aritmética.

La veracidad dada a las proposiciones aritméticas varía desde un carácter absoluto a un carácter relativo relacionado con su consistencia, pero ya hemos visto que existen algunos sistemas lógicos consistentes que contienen proposiciones no verdaderas. Más aún, B. Russell interpretó la demostración del teorema de Gödel como una prueba de la inconsistencia de la aritmética. En efecto, con las notaciones empleadas anteriormente, podríamos haber interpretado $P_n(n)$ como una proposición falsa que se puede demostrar mediante una Π_x. Pero esto nos lleva a un mundo caótico en el que evidentemente no estamos. Es más, nuestra intuición matemática nos lleva a dar un carácter absoluto a la veracidad de las proposiciones aritméticas.

Como Hilbert, pensamos que nadie puede expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado, mejor encontrado, para nosotros. Pero tampoco puede quitarnos las ideas que sugieren los teoremas de incompletitud de Gödel. Efectivamente, antes de Cantor, había el *Homo sapiens*, pero con los números transfinitos surge el *Homo trans-sapiens*. Por ello vamos a dar una idea de los números ordinales transfinitos. Empecemos para ello poniendo a continuación de los números naturales 1, 2, ..., n, ... el elemento o número ordinal ω y a continuación $\omega + 1$, ..., $\omega + n$, ..., 2ω, ..., $n\omega$, ..., ω^n, ..., de modo que si hemos construido un segmento S de ellos, pondríamos a continuación un nuevo ordinal α. De esta forma, el conjunto S_α de los números ordinales menores que α tiene la propiedad que todo subconjunto no vacío de S_α tiene un primer elemento, propiedad que caracteriza a los conjuntos bien ordenados. Pues bien, la entrada a este paraíso está prohibida al formalismo porque los números ordinales no se admiten en él como proposiciones verdaderas.

Es corriente identificar todo número ordinal α con el conjunto formado por todos sus anteriores. Veamos cómo se pueden obtener dichos números dentro de las ideas de Gödel.

Sea S_0 el sistema lógico de la aritmética. Entonces, como todas las proposiciones de S_0 son verdaderas, se intuye que el enunciado T_1 de la consistencia de S_0 es verdadero. Sea S_1 el sistema lógico definido por el sistema de axiomas formado por las proposiciones de S_0 y T_1. Procediendo por inducción, supuestos construidos S_0, ..., S_{n-1} y las proposiciones verdaderas T_1, ..., T_{n-1}, se define T_n como el enunciado de la consistencia de $\bigcup_{\kappa<n} S_\kappa$, el cual también por la veracidad de la aritmética debe ser una proposición verdadera, y se define S_n como el conjunto de los teoremas de $\bigcup_{\kappa<n} S_\kappa \cup \{T_n\}$. Este proceso se puede extender por inducción transfinita definiendo para cada ordinal α un sistema lógico S_α de modo que cada T_α es el enunciado de la consistencia de $\bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta$ y cada S_α es el con-



Bertrand Russell.

junto de los teoremas de $\bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \cup \{T_\alpha\}$, tratado formalmente T_α como si fuera una proposición. Entonces el sistema total $S = \bigcup_\alpha S_\alpha$, que por ser sugerido por Gödel llamaremos gödelización de la aritmética, debe existir y ser consistente por la veracidad de la aritmética, de modo que llamaremos proposición verdadera a toda $P \in S$. La intuición gödeliana nos dice que ningún S_α debe ser un sistema lógico completo y, por tanto, la familia (S_α) debe ser estrictamente creciente.

Se puede demostrar utilizando la codificación de Gödel y ordenaciones lexicográficas que S se puede bien ordenar de modo que a cada proposición $P \in S$ se puede asignar inyectivamente un número ordinal $o(P)$. Como consecuencia de ello se puede demostrar la siguiente generalización esperada del teorema de Gödel:

> El enunciado $E(A)$ de la consistencia de un conjunto $A \subset S$ de axiomas es una proposición verdadera que no es un teorema de A.

Dicha demostración se basa en el principio de inducción transfinita, pero se pueden dar otras demostraciones utilizando el lema de Zorn o bien sólo la axiomática de Zermelo-Fraenkel.

El proceso anterior aplicado al sistema lógico S_0 de la aritmética se puede generalizar aplicándolo a un sistema lógico S'_0 no disjunto con S_0, que sea un conjunto con tal que se admita el anterior teorema generalizado de Gödel. Entonces se obtiene un sistema lógico total S'. Pues bien, el resultado más destacado es que $S' = S$; en otras palabras, que sólo hay una verdad en las matemáticas, ya que las proposiciones verdaderas de S y S' son las mismas.

Vamos a dar una idea de la demostración de dicha unicidad. Si $S'' = S \cap S'$ es un conjunto, se sigue la contradicción de que el enunciado $E(S'')$ de la consistencia de $S'' = S \cap S'$ es una proposición verdadera en S y S', y, por tanto, perteneciente a S'', que no es un teorema de S'', lo cual no es posible por ser S'' un sistema lógico. Entonces, $S'' = S \cap S'$ no es un conjunto, de donde teniendo en cuenta que es S'' un sistema lógico tal que $E(P) \in S''$ para toda proposición $P \in S''$, se sigue del teorema generalizado de Gödel que $S = S'' = S'$.

Así, si existe la verdad, la verdad es única. Pero la verdad se intuye y es un don: no se demuestra ni se puede demostrar. Es más, si se pudiese demostrar la existencia de la verdad, ella sería seguramente falsa porque está muy por encima de nuestras mentes. Lo que hemos dicho para la verdad, podríamos decirlo para Dios.

Justamente, Hilbert había descubierto que con respecto a una axiomática general la verificación de la consistencia interna en cuanto al contenido sólo podría ser relativa; es decir, sólo podría ser decidida mediante la construcción de un modelo. Pero como a su vez los elementos de este modelo son de tipo matemático, la consistencia de una teoría se reduce a la de otra. Nosotros decididamente, como hemos visto, siguiendo las ideas de Gödel profundizamos y repetimos indefinidamente este proceso en el transfinito teniendo como fruto la consistencia de los sistemas construidos, que todos son iguales, esto es, que no hay más que una sola verdad en las matemáticas. Resultando como consecuencia de la buena ordenación del sistema total S, que el axioma de Solovay no pertenece a S, lo cual expresaremos diciendo que es falso.

Como consecuencia de estos resultados, llamaremos orden de inconsistencia de un sistema lógico S'_0 al menor ordinal α, si existe, tal que, con notaciones análogas a las anteriores, S'_α es inconsistente. En el caso que todo sistema lógico S'_α sea consistente diremos que S'_0 es casi verdadero, reservando el nombre de verdadero cuando además S'_0 contiene los axiomas de la aritmética. De manera análoga se llama orden de inconsistencia de un sistema de axiomas A el orden de inconsistencia, si existe, del sistema lógico $T(A)$ de los teoremas de A.

Vamos a examinar esto. Dada una proposición P, sea S'_0 el sistema lógico generado por P y los axiomas A_0 de la aritmética. Entonces, si existe un ordinal α tal que S'_α es inconsistente, resulta que P es una proposición falsa; esto es, no pertenece a S. Por el contrario, si todo sistema lógico S'_α es consistente, siendo $S' = \bigcup_\alpha S'_\alpha = S$, se sigue que $P \in S$, es decir, que P es una proposición verdadera.

En particular, si P es el axioma de Solovay, como P es inconsistente con la buena ordenación de $\mathbb{R}$, resulta que el orden de inconsistencia de P es menor o igual que el primer ordinal α tal que el cardinal de $\{\beta : \beta < \alpha\}$ es igual que el cardinal c de $\mathbb{R}$.

Desde luego, la verdad es inaccesible al lenguaje y a la razón del hombre, pero la intuición nos aproxima mucho a ella. El hecho de que suponiendo realizable la gödelización S de la aritmética se tenga en las condiciones indicadas la unicidad $S' = S$ de la verdad matemática, nos indica que efectivamente estamos en el camino adecuado señalado por la intuición. Lo importante es conocer la verdad, no el camino por el que se llega a ella, aunque este camino puede ser interesante. El preocuparse de los métodos seguidos en las demostraciones es importante, pero no debe ser una barrera para llegar a la verdad. Para esto nos bastan una intuición bien adiestrada, una reflexión rigurosa y una belleza profunda.

La aparición de paradojas cuando se emplea la verdad absoluta hay que atribuirla a que se emplea en un sentido abstracto. La verdad absoluta sólo tiene sentido cuando se aplica en un sentido concreto. Esto se ve de manera muy clara con el axioma de las paralelas de la geometría que no es cierto ni falso, todo depende de la geometría que se considere. Igualmente, el argumento empleado por B. Russell en su paradoja se debe a que se aplica a universos abstractos, no concretos. El carácter abstracto de las matemáticas tiene muchas ventajas, porque con él se alcanza gran generalidad, pero es causa de paradojas. Esto justifica el platonismo de las matemáticas, no olvidando que los objetos matemáticos tienen un significado sin el cual las verdades pueden dejar de serlo.

El planteamiento de esta conferencia está de acuerdo con la perspectiva platónica de las matemáticas. Mientras que un formalista es libre de crear cualquier sistema lógico consistente, un platónico como Gödel sostenía que sólo un sistema de axiomas captaba las verdades que existían en el mundo platónico. Nuestros resultados, obtenidos utilizando la generalización del segundo teorema de incompletitud de Gödel para conjuntos basados en la intuición gödeliana con la que se establece el que llamamos «axioma de la consistencia», confirman dicha opinión. Y es que el carácter absoluto de la verdad matemática y la consistencia platónica de los conceptos matemáticos son esencialmente una misma cosa.

Nuestro espíritu debe ser como el que Hilbert manifestó en su *Debemos saber. Sabremos*, incorporando a la ciencia y a las matemáticas el paraíso de Cantor y también el sugerido por las ideas de Gödel.

BIBLIOGRAFÍA

1. Barrow, J. D. (1996) *La trama oculta del universo. Crítica.* Ed.: Grijalbo Mondadori, S. A., Barcelona.
2. Gödel, K. (1986) *Collected Works-Volume I: Publications 1929-1936.* Ed.: Oxford Univ. Press.
3. Penrose, R. (1991) *La nueva mente del emperador.* Ed.: Mondadori España, Madrid.
4. Rodríguez-Salinas, B. (Preprint) *A proof of fundamental theorem of Mathematics.*
5. Rodríguez-Salinas, B. (Preprint) *There is only one truth in Mathematics.*