CAMINOS DE LA MATEMÁTICA HACIA EL FUTURO

MIGUEL DE GUZMÁN
Universidad Complutense de Madrid

Las páginas que siguen constituyen el guión de las ideas fundamentales de un texto que se puede ver en su versión más detallada, en formato html, en el disco que acompaña este libro.

PROBLEMAS MATEMÁTICOS COMO GUÍA HACIA EL FUTURO

En 1900, en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos que se celebró en París, David Hilbert tuvo ocasión de proponer, para todos los matemáticos del mundo, su visión sobre las líneas de desarrollo de la matemática de su tiempo a través de una famosa colección de 23 problemas. Esta conferencia, que se encuentra disponible en la red en su traducción al inglés, tuvo el acierto de señalar una importante serie de líneas de desarrollo que en buena parte ha marcado la investigación realizada durante el siglo XX. Al principio de su conferencia, Hilbert señala elocuentemente el papel de los problemas matemáticos pendientes para el desarrollo de la matemática:

> ¿A quién de nosotros no le complacería levantar el velo bajo el que el futuro yace escondido, para echar una mirada a los progresos venideros de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo durante los próximos siglos? ¿Cuáles serán los objetivos especiales a los que los espíritus matemáticos más influyentes de las generaciones futuras se consagrarán? ¿Qué nuevos métodos y resultados descubrirán los nuevos siglos en el amplio y rico campo del pensamiento matemático?
>
> La historia nos enseña la continuidad del desarrollo de la ciencia. Sabemos que cada época tiene sus propios problemas, los cuales son resueltos o bien echados a un lado como inútiles y los reemplaza por otros nuevos. Si queremos obtener una idea sobre el probable desarrollo del conocimiento matemático en el futuro inmediato tenemos que hacer pasar ante nuestra mente las cuestiones aún no resueltas y contemplar los problemas que la ciencia de hoy propone y cuya solución esperamos del futuro. Para tal revisión el día de hoy, a medio camino entre dos siglos, me parece especialmente adaptado. Porque el final de una gran época no sólo nos invita a mirar hacia el pasado sino también dirige nuestro pensamiento hacia el desconocido futuro...

Hilbert fue ciertamente uno de los últimos matemáticos capaz de identificar, en los diversos campos de la matemática de su tiempo, los problemas más importantes. Su objetivo de tratar de señalar con ellos líneas posibles de desarrollo para el futuro sigue siendo tan válido hoy como entonces. Por ello la Unión Matemática Internacional decidió nombrar una comisión de expertos que hiciera para nuestro tiempo lo que Hilbert hizo para el suyo. El fruto de este trabajo conjunto de muchos de los más eminentes matemáticos de nuestros días ha sido una interesante publicación, *Mathematics: Frontiers and Perspectives,* donde se recogen sus observaciones relacionadas con este propósito. Cada uno de los autores ha respondido a su modo, algunos desde la perspectiva de los problemas de su propio campo de especialización, otros tratando de contemplar los problemas desde un punto de vista más amplio, otros tratando de identificar tendencias generales más que problemas concretos al modo de Hilbert. Pero de la lectura de este libro tanto el especialista como el que no lo es puede obtener una visión amplia de los problemas que en el momento ocupan a la comunidad matemática y así barruntar por dónde discurrirá el quehacer matemático en el futuro próximo.

Por otra parte, bajo el amparo de las celebraciones que en todo el mundo están teniendo lugar con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, como la Unión Matemática Internacional, la Unesco y otros organismos internacionales declararon este año 2000, han sido bastantes los matemáticos eminentes que para diversos públicos han comentado su visión de los más importantes logros de la matemática actual y sobre cuáles serán, previsiblemente, sus líneas de desarrollo para el futuro. Entre las magníficas exposiciones que se han hecho yo destacaría, por su claridad y accesibilidad, la de Phillip Griffiths, publicada originariamente en *American Mathematical Monthly* y que ha sido traducida al castellano y publicada por la Real Sociedad Matemática Española en la *Gaceta Matemática.*

Conducidos por éstas y otras publicaciones interesantes vamos a hacer aquí un pequeño recorrido en torno a algunos de los problemas que ocupan actualmente a la comunidad matemática, para tratar así de vislumbrar algunos de los posibles desarrollos en los métodos y resultados del futuro.

¿UNA ETAPA ESPECIALMENTE FECUNDA DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA?

El siglo XX ha sido sin duda especialmente fértil en lo que a la actividad matemática se refiere. En número y en profundidad los logros de la matemática han sido impresionantes a lo largo de todo el siglo. Pero cuando uno considera la acumulación de resultados importantes en sus últimas décadas, parece que se pudiera hablar de un florecimiento esplendoroso que augura que el nuevo milenio será de una espectacularidad sin precedentes en lo que al desarrollo matemático se refiere. Examinaremos brevemente tres de estos resultados que son significativos porque, aparte de representar soluciones a problemas que han desafiado por mucho tiempo a la comunidad matemática, con sus intensos esfuerzos para resolverlos, son indicativos de nuevas posibles formas de proceder en lo que se refiere a los métodos mismos de investigación en matemáticas.

Solución del problema de los cuatro colores (1976)

La solución obtenida por Appel y Haken en 1976 al centenario problema de los cuatro colores constituyó una novedad muy especial que ya comenzaba a presagiar cambios importantes en la actividad matemática. Fue el primer problema de resonancia mundial, por ser bien concreto, conocido y trabajado por muchos y desde muy diversos puntos de vista, del que se consiguió una solución mediante la interacción muy fundamental con el ordenador.

La resolución del problema de los cuatro colores constituyó una novedad importante en la metodología de la investigación matemática que suscitó en un principio fuertes controversias, aunque hoy, en general, nos parecen ya superadas: ¿Es verdaderamente solución matemática a un problema una respuesta un tanto opaca que tiene que pasar a través de una programación de un ordenador que, si bien es controlable hasta cierto punto por la mente humana, su realización completa sobrepasa con mucho las capacidades mentales del hombre? La comunidad matemática tuvo que redefinir lo que entendía por demostración matemática teniendo en cuenta la posible interacción con el ordenador, algo que parece estar ya plenamente asumido por la mayor parte de los matemáticos.

Solución del problema de Fermat (1995)

La solución del problema de los cuatro colores tuvo sus ecos interesantes en algunos segmentos de la sociedad, pero su resonancia no se puede comparar con el revuelo que causó el anuncio de la resolución del problema de Fermat en 1993 por Andrew Wiles. La prensa de todos los países divulgó el hecho en primera plana. Era un problema muy fácil de entender y con una historia muy interesante que había sido afrontado sin éxito por muchos de entre los matemáticos más famosos de los últimos tres siglos.

La historia de la solución, anunciada en 1993, pasó a ser un drama cuando los expertos encontraron un fallo que a muchos les parecía insalvable. Wiles y un alumno suyo, R. Taylor, consiguieron solucionarlo tras un año más de trabajo. Por fin, la demostración publicada en 1995 contaba con la aprobación de los expertos.

La conjetura de Fermat que Wiles demostró ser cierta constituye claramente uno de esos casos en los que la comunidad matemática ha trabajado con ahínco con la única finalidad de coronar una cumbre que ella misma se ha propuesto. Para quienes contemplan la actividad matemática desde el exterior tal vez esto pueda parecer que corresponde a una imagen del matemático encerrado en su torre de marfil y resolviendo enigmas que nadie va a aplicar. Pero lo cierto es que al tratar de ascender, a veces, como en este caso, bien penosamente hasta la cima, se han ido creando herramientas potentísimas, en este caso relacionadas con la geometría algebraica, muchas de las cuales han encontrado o encontrarán aplicaciones prácticas bien interesantes.

Por otra parte el método de trabajo de Andrew Wiles ha venido a poner de manifiesto la plena vigencia de los métodos tradicionales de investigación. Una persona, voluntariamente aislada por más de 7 años, pone en conexión todo un mundo de herramientas mentales creadas para diversos objetivos dando al fin con la solución del problema. Es claro que la solución de Wiles sobrepasa con mucho el conocimiento matemático de la época de Fermat y muchos piensan seriamente que la demostración que Fermat pensó haber encontrado, como dejó escrito en el margen de su copia del libro de Diofanto que estaba leyendo, tan sólo fue un espejismo.

La solución del problema de Kepler (1998)

El llamado problema de Kepler tiene una historia de cuatro siglos, por lo que resulta así más antiguo que cualquiera de los otros dos. Su solución es aún más reciente. El matemático inglés Thomas Harriot preguntó a Kepler a comienzos del siglo XVII si podía calcular cuál sería la forma óptima de apilar esferas del mismo tamaño. La pregunta provenía originariamente de sir Walter Raleigh, el famoso personaje de la escena política y militar, quien le había preguntado a Harriot cómo podría calcular la munición apilada para los cañones de sus barcos.

Kepler formuló entonces la conjetura de que la forma de apilar esferas en el espacio con la máxima densidad posible era la que han venido usando los fruteros para apilar las naranjas en una caja. Se coloca una fila de naranjas tangentes cada una a las dos naranjas contiguas y a la pared de la caja (naturalmente las naranjas de los extremos de esta fila no son tangentes a dos naranjas). A continuación se coloca otra fila de modo que cada naranja de la segunda fila sea tangente a dos de la primera y así sucesivamente se va ocupando el nivel inferior de la caja. Sobre este nivel, utilizando los huecos que van quedando, se coloca una naranja tangente a cada tres del primer nivel y así se rellena el segundo nivel. Y así sucesivamente hasta que se llega al nivel superior. Kepler pensó que este apilamiento era el que proporcionaba la mayor densidad, es decir, que el volumen ocupado por las esferas dividido por el volumen de la caja sería así máximo. Sin embargo no dio de ello ninguna demostración.

Han sido muchos los matemáticos que han tratado de demostrar la conjetura de Kepler a lo largo de la Historia, entre ellos nada menos que Gauss, en el siglo XIX, quien demostró que entre los apilamientos reticulares éste es efectivamente el más denso, lo cual no llega a resolver el problema del todo ya que hay apilamientos no reticulares cuya densidad de empaquetamiento es muy próxima a otros reticulares.

El resultado inicial más importante en el siglo XX fue debido a Laszlo Toth, un matemático húngaro que en 1953 consiguió reducir el problema a una enorme colección de cálculos relativos a casos específicos. En 1994, ya con las capacidades de cálculo del ordenador a su disposición, Thomas Hales, de la Universidad de Michigan, se enfrentó con el problema siguiendo la línea de pensamiento de Toth. Trabajando junto con su estudiante de doctorado Samuel Ferguson, pensó por fin en 1998, tras cinco años de trabajo, que había conseguido una solución satisfactoria del problema y la colocó en la red para que cualquiera pudiera recorrerla y verificar su corrección, una tarea nada sencilla dada su complejidad y la cantidad de pasos que hay que comprobar. Los expertos que la han examinado parecen estar de acuerdo en que la demostración tiene todos los indicios de ser correcta, aunque tendrá que pasar algún tiempo para que se pueda tener plena seguridad de que así es.

Para más información sobre este tema se puede acudir, por ejemplo, a la propia página de Thomas Hales, y a las exposiciones claras y sencillas, no técnicas, de Keith Devlin o de Ivars Peterson.

El método que Hales ha seguido en la construcción de su resultado ha estado abierto a la inspección de muchas personas durante el proceso de su elaboración, por una parte a través de conferencias en las que el propio Hales exponía las fases de su trabajo y por otra proponiendo públicamente sus resultados parciales en la red a fin de recibir las reacciones de todos los matemáticos interesados en el tema y enriqueciendo así sus ideas. Esta forma de trabajo posiblemente constituye un prenuncio de lo que en el futuro será cada vez más frecuente. En años recientes ha habido inmensos equipos trabajando conjuntamente a través de Internet para resolver retos específicos muy curiosos, como por ejemplo la factorización del número conocido como RSA129 y la consiguiente descriptación del mensaje propuesto en 1977 por Rivest, Shamir y Adleman, los creadores de uno de los sistemas de encriptación más usado actualmente, el sistema *RSA*, del que después se expondrán algunas ideas.

RETOS PARA EL FUTURO

El primero de los objetivos de la declaración de Rio de Janeiro en la que se proclamó el año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas consistía en identificar los grandes retos de la matemática actual.

Estos grandes retos se pueden señalar al estilo de Hilbert, mediante una colección de problemas concretos cuya solución se puede esperar que ilumine muy substancialmente un cierto campo. Pero para ello se requiere que el campo mismo se encuentre en un estadio suficentemente elaborado para permitir la proposición concreta de una serie de problemas clave que los expertos coincidan en señalar como tales. Hay campos de la matemática profundamente importantes e interesantes que no están aún en tal estadio o que son de naturaleza un tanto difusa, y en los que hasta ahora no se ha logrado ni siquiera establecer cuáles puedan ser esos problemas clave. Más adelante trataremos de señalar algunos.

De la lista de problemas propuestos por Hilbert, algunos no parecen de tanto interés como parecieron en su época. Ya él mismo afirmaba en su discurso que cada generación se plantea sus propios problemas y que de ellos unos serán resueltos por generaciones futuras mientras que otros serán arrumbados por parecer de poco interés. Pero es cierto que de esa lista de problemas de Hilbert hay unos cuantos que siguen atrayendo el interés y los intensos esfuerzos de los matemáticos después de cien años y que, como veremos a continuación, siguen siendo considerados entre los problemas más importantes de la matemática actual.

En mayo de 2000 el Clay Mathematics Institute anunció en París, para conmemorar solemnemente el aniversario de la conferencia de Hilbert en la misma ciudad, el establecimiento de un premio de un millón de dólares para quien resolviera uno cualquiera de los siete problemas, que han venido a llamarse los problemas del milenio.

El Clay Mathematics Institute fue fundado en 1998 por Landon T. Clay, un hombre de negocios de Boston, gran admirador de la matemática. Está dirigido por Arthur Jaffe, profesor en Harvard University, y su equipo asesor está constituido por algunos de los más eminentes matemáticos del momento. Los problemas del milenio han sido elegidos por ellos y son los siguientes, enunciados brevemente:

El problema $P = NP$

Un problema pertenece a la clase P de problemas cuando se puede resolver mediante un algoritmo cuyo tiempo de ejecución está acotado por una función polinomial del número de elementos que intervienen en el problema. Un problema está en la clase NP si se puede verificar en tiempo polinómico si una solución propuesta es correcta. Determinar si $P = NP$.

La conjetura de Riemann

Todo cero no trivial de la función ζ de Riemann tiene parte real igual a 1/2.

La conjetura de Poincaré

Toda variedad tridimensional simplemente conexa es homeomorfa a la superficie esférica tridimensional.

La conjetura de Hodge

Toda clase de Hodge de una variedad algebraica proyectiva compleja es una combinación lineal de clases de ciclos algebraicos.

La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer

Para cada curva elíptica sobre los racionales el rango del grupo de puntos racionales sobre la curva está determinado por el comportamiento de la función ζ asociada a la curva en 1 de modo que, si $\zeta(1)$ es 0 hay infinitos puntos racionales sobre la curva, y si es distinto de cero hay un número finito de tales puntos.

Las ecuaciones de Navier-Stokes

Demostrar si se da o no la existencia y suavidad de soluciones de las ecuaciones tridimensionales de Navier-Stokes bajo condiciones de contorno e iniciales razonables.

La teoría de Yang-Mills

Demostrar la existencia de campos cuánticos de Yang-Mills y que tienen un hueco de masa *(gap mass theory).*

Para una información más detallada sobre los problemas se puede consultar la página del Instituto Clay, donde cada problema aparece descrito por uno de los grandes especialistas en el campo correspondiente.

Para más detalles sobre las circunstancias que han rodeado la convocatoria de los premios del Instituto Clay es interesante también el artículo de Allyn Jackson en las *Notices of the American Mathematical Society* (septiembre, 2000).

En relación con esta oferta de premios lanzada por el Instituto Clay es interesante señalar que en este año 2000, Año Mundial de las Matemáticas, ha habido también una convocatoria muy particular de un premio de un millón de dólares para quien resuelva la conjetura de Goldbach antes de marzo de 2002. La oferta proviene de la editorial Bloomsbury Publishing, en Estados Unidos, y Faber and Faber Limited, en el Reino Unido, que ha publicado una famosa novela de Apostolos Doxiadis, *El tío Petros y la conjetura de Goldbach.* La conjetura de Goldbach, eje de la novela, afirma que todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos.

Como el mismo Andrew Wiles afirmaba en la presentación de los premios ofrecidos por el Instituto Clay, está claro que para la elección de un problema tras el que hay una oferta de premio es necesario restringirse a campos de la matemática en los que se puedan identificar problemas muy bien definidos, de manera que se pueda decidir con claridad que un trabajo presentado lo resuelve o no. Se equivocaría quien pensara que la actividad matemática actual está más o menos concentrada alrededor de los problemas del milenio.

Existen muchas zonas difusas de la matemática actual de extraordinario interés en las que la elección de problemas semejantes a los anteriores es por el momento muy difícil, por no decir imposible. Por otra parte, está claro que existen cuestiones que atañen de modo mucho más profundo a la evolución de la matemática y de las que ni siquiera se pueden extraer problemas concretos. Por eso la publicación de una obra como la promovida por la Unión Matemática Internacional ya citada antes, *Mathematics: Frontiers and Perspectives,* puede proporcionar una visión sobre el previsible futuro del desarrollo de la matemática mucho más rica. Efectivamente, en diversos artículos de esta obra, como en los de Gowers, Mumford, Smale..., tienen cabida tales consideraciones de fondo.

Al tratar de identificar algunas de estas zonas difusas en las que la actividad matemática previsiblemente se ha de desarrollar de una forma especial en el futuro más o menos cercano, me gustaría señalar la llamativa coincidencia de algunos de los matemáticos más importantes en apuntar hacia tres puntos particulares que probablemente tendrán un desarrollo entrelazado: la interacción de la matemática con las ciencias de la vida, el esfuerzo por matematizar la comprensión de las funciones más profundas de la mente humana y el desarrollo de nuevas formas de computación.

Con respecto al primer punto, interacción con las ciencias de la vida, se puede afirmar que existe una gran cantidad de problemas que parecen requerir nuevas formas de matematización distintas de las que hasta ahora se están usando, fundamentalmente basadas en el análisis probabilístico y estadístico de corte tradicional. Tales procedimientos parecen funcionar correctamente en circunstancias en las que hay una notable ausencia de estructura, pero éste no es exactamente el caso de los datos que provienen de las observaciones acerca de los problemas relacionados con estructuras vitales. Parece que sería necesario desarrollar nuevas ideas matemáticas a fin de afrontar situaciones en las que hay una estructura peculiar, como en los organismos vivos, que no se puede enmarcar adecuadamente con los métodos matemáticos tradicionales.

Observaciones muy interesantes sobre este punto se pueden ver en el artículo de M. Gromov, «Possible Trends in the Coming Decades», publicado en 1998 en el *Report of the Senior Assessment Panel of the International Assessment of the U.S. Mathematical Sciences.*

Y en esta dirección parecen muy acertadas las observaciones en el artículo de D. Mumford, «The Dawning of the Age of Stochasticity», en la publicación citada de la Unión Matemática Internacional, en el que insiste en la necesidad de elaborar un nuevo tipo de pensamiento mucho más basado en lo estocástico para la comprensión matemática de ciertos fenómenos.

Por supuesto que cuando volvemos la mirada a la comprensión de los modos de funcionamiento de la mente humana se hace todavía más patente la necesidad de nuevas formas de pensamiento matemático que están aún por descubrir. El artículo de D. Ruelle, «Conversations on Mathematics with a Visitor from Outer Space» y el final del de S. Smale, «Mathematical Problems for the Next Century», de la misma publicación de la Unión Matemática Internacional, se hacen eco del gran reto, que probablemente sólo en un futuro lejano podrá afrontarse con cierto éxito, de la comprensión matemática de las funciones profundas de la mente humana.

Muy relacionado con los problemas anteriores se perfila otro desafío cuya solución influirá profundamente en todo el cuerpo de la matemática futura: el de tratar de conseguir nuevas formas de computación que nos permitan abordar problemas, como los anteriores, para los que los modos actuales de computación van resultando insuficientes. Pero este tema quisiera exponerlo con un poco más de detenimiento.

UN PROBLEMA CONCRETO: NUEVAS FORMAS DE COMPUTACIÓN

Desde muchos focos de la actividad matemática se pone de manifiesto la necesidad de encontrar formas más eficientes de computación. La potencia, la velocidad de cálculo, la capacidad de almacenaje de información y de representación, la eficacia en el uso de los ordenadores actuales ha ido creciendo en órdenes de magnitud importantes durante las últimas décadas. A pesar de ello y a pesar de la utilización mucho más eficiente gracias a nuevos resultados matemáticos, desde muchos puntos de vista se echan en falta ideas nuevas que permitan sobrepasar las barreras a las que el ordenador digital ya tradicional se está acercando.

Existen hoy día multitud de problemas cuya complejidad parece crecer necesariamente de forma exponencial con el crecimiento de la dimensión o con el del número de elementos que en ellos interviene. Entre esos problemas, que podemos considerar candidatos para pertenecer a la clase *NP*, se encuentran, por citar algunos de más conocidos, el problema del viajante, el de la factorización de grandes números, el de la determinación de la distancia mínima de un punto arbitrario del retículo de enteros a un subretículo dado por una base arbitraria... Tales problemas serían fácilmente tratables si se pudiera disponer de ciertas herramientas de cálculo mucho más potentes que las actuales, pero que por ahora no son sino construcciones teóricas que esperan poder ser realizadas físicamente en un futuro más o menos próximo. Entre ellas se encuentra en primera línea la computación cuántica, con la cual la capacidad de computación se elevaría de forma exponencial en cierto sentido que veremos a continuación.

Y, por supuesto, tal nueva forma de computación ayudaría extraordinariamente a afrontar de forma adecuada los problemas que han de presentarse en relación con la exploración matemática de los fenómenos relacionados con la vida y con los que tienen que ver con el estudio matemático de las funciones de la mente humana que hemos mencionado anteriormente.

Mediante la computación cuántica se podrían realizar en cuestión de segundos tareas que actualmente, con la computación digital, requerirían un tiempo mayor que la edad del universo. Entre ellas la descomposición de un número arbitrario de, por ejemplo, 500 cifras. La posibilidad de realizar esta tarea tan fácilmente haría necesario cambiar todos los sitemas actuales de comunicación confidencial, basados en el sistema de encriptación *RSA* y semejantes. Esta nueva capacidad se convierte así en un fuerte estímulo para tratar de poner los medios necesarios a fin de hacer de la computación cuántica una realidad en un futuro cercano.

La idea importante contenida en las consideraciones sobre la actual criptografía de clave abierta consiste en que el sistema de encriptación más utilizado actualmente, el *RSA*, depende de la imposibilidad de encontrar los factores primos de un número, digamos, de 400 dígitos, obtenido multiplicando dos números primos cada uno de 200 dígitos. Pero un resultado reciente, el algoritmo de Shor, que utiliza los principios teóricos de la computación cuántica, permitiría realizar tal tarea y otras muchas más complejas en cuestión de segundos.

PROBLEMAS DE FONDO RELACIONADOS CON LA COMUNIDAD MATEMÁTICA

Para concluir quisiera mencionar algunos aspectos importantes de la actividad matemática actual que están más relacionados con el tejido social y cultural de la comunidad matemática que con los problemas técnicos concretos de su actividad a los que nos hemos estado refiriendo hasta ahora. Es interesante observar que en la enumeración de los aspectos importantes de la matemática hoy día son muchos los matemáticos que se hacen eco de algunos que no parecen funcionar bien en la actualidad. En la sección final de su artículo sobre las matemáticas ante el cambio del milenio, Phillip Griffiths dedica amplio espacio a proponer acciones importantes y novedosas en relación con las interacciones de la comunidad matemática con la sociedad, la educación y la comunicación, a fin de preservar el vigor de la matemática en el futuro. Mikhail Gromov, en su breve artículo antes citado sobre las tendencias de la matemática en las próximas décadas, dedica también su atención a estos mismos aspectos. Yo quisiera, para finalizar estas consideraciones, mencionar otro punto de vista en torno a la relación de la matemática con la cultura y la sociedad y que tiene que ver con los aspectos éticos que la actividad matemática podría y debería tratar de desarrollar. Trataré de condensar mis ideas en unos pocos enunciados:

- Muchos aspectos de nuestro quehacer matemático involucran fuertemente nuestro sentido de la responsabilidad.
- Se puede pensar que, en gran parte, hemos abandonado actitudes básicas del quehacer matemático que fueron centrales en otros períodos de nuestra larga historia.
- La naturaleza misma del quehacer matemático implica el estímulo de ciertos valores específicos.
- La creciente matematización de la ciencia y de la cultura implica fuertes riesgos a los que es necesario prestar atención.
- La conveniencia de colocar en un lugar destacado de nuestra actividad estas actitudes constituye un gran reto para el futuro.