Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 100, Nº. 1, pp 25-46, 2006
VI Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

HISTORIAS PARALELAS DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LA FÍSICA

DARÍO MARAVALL CASESNOVES. *

* Académico de número de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Plutarco que vivió en los siglos I y II, escribió las "Vidas Paralelas" y con ello inició una nueva rama de la Historia, que pudiéramos denominar Historia Comparada. Esta Obra ejerció una gran influencia en la posteridad, sobre filósofos, políticos, literatos y artistas, incluso en algún momento, como la Revolución francesa, contribuyó a crear un ambiente social y político en la nación.

Algunos historiadores han seguido la línea de pensamiento de Plutarco en sus escritos. Uno de los más importantes y recientes ha sido Lord Bullock en su monumental libro "*Hitler y Stalin. Dos vidas paralelas*".

Me parece muy interesante extender esta visión de la Historia a la Historia de la Ciencia, donde han sido muy escasos los intentos de escribir vidas paralelas. Una de las más recientes y digna de destacar es el libro de Heims, donde expone conjuntamente las biografías comparadas de Von Neumann y de Wiener.

En alguna de mis conferencias, incluidas en los ciclos anuales que desde hace más de diez años se han impartido en el Instituto de Ingeniería de España y en diversas Escuelas de la Universidad Politécnica de Madrid, dedicadas a la Historia y Filosofía de la Ciencia y la Tecnología, me he ocupado a veces de hacer de manera fragmentaria Historias paralelas de la Matemática y la Física.

Volterra escribió en su discurso necrológico dedicado a Poincaré, que "las relaciones de la Física y las Matemáticas son tan antiguas como ellas mismas". Desde luego desde los griegos hasta nuestros días, la Historia de la Física y de las Matemáticas están fuertemente entrelazadas; un progreso en una de ellas ha traído un progreso en la otra. Con frecuencia, una teoría física no se ha podido desarrollar en una época determinada porque aunque veían claro cómo debía de ser concebida ésta, no existía la herramienta matemática necesaria para su desarrollo. Así por ejemplo a mediados del siglo XIV en París y en Oxford, se desarrolló una teoría física, la del ímpetus, que abortó por no existir entonces los conocimientos matemáticos necesarios. De haber existido éstos, se podría haber adelantado, quizás un siglo, el Origen de la Ciencia Moderna, que nació en los siglos XVI y XVII con Copérnico, Kepler y sobre todo con Galileo.

Por el contrario en otras épocas, el desarrollo de una teoría física, ha sido rápido y espectacular, porque ya se conocía la metodología matemática necesaria, tal ha sido el caso de la Teoría de la Relatividad y de la Mecánica Cuántica, que han sido dos de los más grandes logros de la inteligencia humana. Lo mismo puede decirse de la Electrodinámica y de la Cromodinámica Cuánticas, que se han desarrollado en la segunda mitad del siglo XX, y que han permitido el gran desarrollo de las teorías físicas del Universo y de las partículas elementales y de los quarks.

Asimismo el descubrimiento de los fractales en Matemáticas ha permitido, también en la segunda mitad del siglo XX, el estudio del Caos y de una nueva y extraña geometría fractal, que ha cambiado radicalmente nuestra visión de la naturaleza.

El desarrollo de las ecuaciones integrales a finales del siglo XIX y en el siglo XX ha sido fundamental en el crecimiento de la Reología.

También en los siglos XVII, XVIII y XIX existen múltiples ejemplos de hechos científicos de esta clase. Como es el caso de la influencia que han tenido el nacimiento de la Geometría Analítica y del Cálculo Infinitesimal primero, y del Cálculo de Variaciones, las Ecuaciones Diferenciales, la Geometría Diferencial, el Cálculo Tensorial y las Matrices después, en el extraordinario desarrollo de la Mecánica y de la Física Matemática.

En reciprocidad, muchos descubrimientos de la Física Experimental y de la observación astronómica y astrofísica, para poder ser explicados y comprendidos, han estimulado y animado la creación y desarrollo de nuevas teorías matemáticas.

Entre los últimos adelantos desempeñan un papel extraordinario los ordenadores y los robots, los cuales son el producto de una colaboración excepcional entre las Matemáticas, la Física y la Ingeniería.

Por otra parte los problemas filosóficos de qué es el espacio y el tiempo, el concepto moderno del vacío, de la realidad de las cosas, las analogías y diferencias entre verdad matemática y verdad física, el significado de la finalidad y de lo teleológico, para su aclaración y mayor entendimiento, necesitan que se conozca el permanente entrelazamiento de la Física y de las Matemáticas, el cual está patente y manifiesto en sus Historias paralelas.

El objeto de esta conferencia no es sólo exponer la posibilidad y la necesidad de escribir una Historia paralela de la Física y de las Matemáticas, y exponer los razonamientos que nos han llevado a ello, sino dar las pruebas de estos razonamientos que se apoyan en gran número de ejemplos y que se extienden a lo largo de los siglos, desde los griegos hasta nuestros días.

La Matemática griega, de la que somos herederos directos, se divide en dos grandes periodos: el primero, denominado clásico, va desde el 600 hasta el 300 a.C., y el segundo, llamado helenístico y también alejandrino, que va desde el 300 a.C. hasta el 600 d.C. Hay bastante consenso en admitir que fue Tales de Mileto (¿640-546 a.C.?) quien aparte de fundar la filosofía griega y la escuela jónica, fue también el iniciador de una matemática nueva, como una ciencia abstracta, estructurada deductivamente. Descubrió algunos teoremas de Geometría, uno de los cuales se sigue enseñando como teorema de Tales. No solamente fue matemático, sino también fue físico, conoció el poder atractivo de los imanes y la electricidad estática.

Dado el largo tiempo que duró la Matemática griega es obvio que el número de matemáticos importantes es enorme, así como el número de sus descubrimientos. Muchos de ellos además de ser matemáticos fueron también físicos y/o astrónomos, lo que confirma lo escrito por Volterra, a que antes hicimos referencia. Nos vamos a limitar a algunos ejemplos.

El primero de fama universal, en el orden cronológico fue Pitágoras (¿582-497 a.C.?). También fue físico, además de matemático, es el iniciador de la Acústica; descubrió la relación entre la longitud de las cuerdas de los instrumentos musicales y los tonos de los sonidos emitidos. Es recordado por el gran público sobre todo por haber enunciado y demostrado el teorema que lleva su nombre, que afirma que en un triángulo rectángulo "*el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*". El recíproco también es cierto.

De este teorema se han dado posteriormente un número enorme de demostraciones distintas. Es de una importancia excepcional tanto por sus aplicaciones como por sus extensiones; sirve para construir geométricamente las raíces cuadradas de los números enteros comenzando por el dos; permite calcular la diagonal del cuadrado en función del lado, y por su extensión al espacio, la diagonal del cubo en función de la arista. Más de veinte siglos después, al idearse y estudiarse los espacios euclídeos de n dimensiones ($n > 3$), se ha extendido a ellos el teorema de Pitágoras, que permite calcular la diagonal de los hipercubos en función de la arista, siendo igual a la raíz cuadrada de n, la razón de la diagonal a la arista.

Con el nacimiento y el gran desarrollo de la Geometría Diferencial en los siglos XVIII y XIX se extiende el teorema de Pitágoras al entorno infinitesimal de un punto sobre una superficie, lo que permite calcular el elemento lineal o *ds* del espacio o de la superficie, que es la expresión del cuadrado de la diferencial de la distancia (*ds*) en función de las diferenciales de las coordenadas. Este cálculo en el caso de las coordenadas cartesianas es inmediato, y difícil en el caso de otras coordenadas. Euler (1707-1783) y Laplace (1749-1827) ya utilizaron las coordenadas esféricas y Lamé (1795-1870) en su libro "*Lecciones sobre las coordenadas curvilíneas y sus diversas aplicaciones*" (1859) usó coordenadas mucho más generales; posteriormente el número de sistemas de coordenadas ha crecido mucho.

El *ds* es fundamental en el estudio de las superficies euclídeas y en la geometría de los espacios riemannianos (no euclídeos) cualesquiera que sea el número de dimensiones y las coordenadas utilizadas. Pero también es muy importante en la Mecánica y en la Física, tanto en la clásica como en la relativista.

Vamos a dar un ejemplo de lo anterior: La ley de inercia es básica en la Mecánica clásica; fue enunciada en el siglo XVII en un caso particular por Galileo, y en forma general por Descartes. Newton dio la explicación matemática de esta ley física. Afirma que "*cuando sobre un punto material no actúa ninguna fuerza, el punto permanece en reposo o describe una línea recta con velocidad constante*", el movimiento es uniforme y rectilíneo. Pues bien, el *ds* permite extender la ley de inercia a un punto material obligado a moverse sobre una superficie. El *ds* permite resolver cuál es la distancia más corta entre dos puntos sobre una superficie (es un problema de Cálculo de Variaciones), y la solución es una línea llamada geodésica, que en el plano es la recta, en la esfera la circunferencia de un círculo máximo, y en el cilindro de revolución una hélice. Las ecuaciones de la Mecánica permiten determinar que si sobre un punto material, obligado a moverse sobre una superficie, no actúa ninguna fuerza, el punto recorre una geodésica con velocidad constante, lo cual es la expresión de la ley de inercia generalizada, gracias al *ds* calculado por la extensión del teorema de Pitágoras al entorno infinitesimal de un punto sobre una superficie. En algunos de mis trabajos he generalizado la ley de inercia en la Relatividad restringida, cuando un punto material es obligado a moverse sobre una superficie, sin que actúe ninguna fuerza sobre él; la trayectoria también es una geodésica recorrida con velocidad constante: varía la energía, y el tiempo ordinario es proporcional al tiempo propio.

A veces es difícil saber si todo lo que se le atribuye a Pitágoras es producto suyo o de sus discípulos, porque éstos (los pitagóricos) formaron una secta misteriosa, llena de secretos.

Una consecuencia importante del teorema de Pitágoras es debida a que demostraron que la raíz cuadrada de 2 no es el cociente de dos números enteros (lo que hoy llamamos números racionales) sino que es una nueva clase de números que hoy llamamos irracionales, como los llamaron los pitagóricos. La demostración que dieron, que es por reducción al absurdo, es de una elegancia impresionante y es la misma que ahora se enseña. Como consecuencia de este teorema aritmético, hay una consecuencia geométrica muy importante que es que no todos los segmentos son conmensurables, sino que los hay inconmensurables, como en el caso de la diagonal y del lado del cuadrado, cuya razón es la raíz cuadrada de 2, o de la diagonal y la arista del cubo, cuya razón es la raíz cuadrada de 3. Dos segmentos se dice que son conmensurables si existe un segmento, menor que ellos, tal que los dos primeros son iguales a un número entero de veces el tercero.

Hemos hablado de espacios de un número de dimensiones mayor que tres, los cuales no son ni una elucubración ni una fantasía; aunque no son perceptibles por los sentidos sí son concebibles y comprensibles por la mente, y se puede operar con ellos. Estos espacios son muy empleados en la Mecánica analítica (espacios de las configuraciones y de las fases), en las Mecánicas Estadísticas, tanto en la clásica como en las cuánticas. Los puntos de estos espacios no tienen por qué ser siempre entidades geométricas abstractas, sino que pueden tener significado físico y ser velocidades, momentos, partículas. El espacio de las velocidades que se usa en la Mecánica Estadística es un espacio euclídeo, pero en algunos de mis trabajos he demostrado que en el caso de la Relatividad restringida, de la regla de composición de velocidades de Einstein, se sigue que el espacio de las velocidades relativistas no es euclídeo, es un espacio de Lobatchewski, cuyo *ds* he calculado; el cual permite construir una Mecánica Estadística relativista.

La Historia de la Física y de las Matemáticas nos ofrece ejemplos de científicos que dedicaron mucho tiempo y mucho esfuerzo en resolver un problema y no lo lograron, problemas que a veces tenían solución y a veces no; pero con frecuencia su trabajo no fue inútil porque obtuvieron resultados muy interesantes. Cuando este interés, el de los resultados obtenidos, supera al interés que habría tenido resolver el problema, este fenómeno se llama serendipismo, palabra derivada del antiguo Reino de Serendip (Ceilán) como puede verse en mi "*Filosofía de las Matemáticas*" (Edit. Dossat 1961).

Vamos a dar un ejemplo del párrafo anterior. En los siglos III y II a.C. los griegos de Atenas, en especial los sofistas, intentaron resolver tres problemas que se hicieron famosos y que en el siglo XIX se demostró que eran irresolubles. Estos problemas son construcciones geométricas utilizando sólo la regla y el compás. Son los siguientes:

1. La duplicación del cubo, que consiste en construir un cubo cuyo volumen sea el doble del de otro cubo dado.
2. La trisección del ángulo, que consiste en dividir un ángulo en tres ángulos iguales, mediante semirrectas interiores que pasen por su vértice.
3. La cuadratura del círculo, que consiste en construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado.

La imposibilidad de resolver con la regla y el compás los dos primeros problemas fue obtenida por el francés Wantzel (1814-1848) en 1837.

La imposibilidad de la cuadratura del círculo es consecuencia de la demostración de que π es un número trascendente, obtenido por el alemán Lindemann (1852-1939) en 1882.

Recordamos que el conjunto de los números racionales e irracionales es el de los números reales, y que el conjunto de los números reales se divide en dos subconjuntos: el de los números algebraicos $\left(\sqrt{2}\right)$ y el de los números trascendentes (e, π). Los números algebraicos son las raíces de los polinomios algebraicos con coeficientes enteros.

Los trabajos realizados por muchos matemáticos durante veinticinco siglos para resolver estos tres problemas, aunque fracasaron, no fueron inútiles porque se obtuvieron resultados muy interesantes, como por ejemplo la obtención de las curvas llamadas trirectrices y cuadratrices que no se pueden construir con la regla y el compás. Hipias, contemporáneo de Sócrates, concibió la primera trirectriz.

La Historia de la Física y de las Matemáticas nos ofrece ejemplos de científicos que, partiendo de una teoría falsa, obtuvieron conclusiones verdaderas e importantes, o también que el aparato matemático que desarrollaron resultó de gran utilidad al aplicarlo a otras teorías científicas o tecnológicas. Vamos a dar un ejemplo tomado de la Astronomía matemática, pero antes vamos a hacer algunas reflexiones sobre la misma. Ya en las culturas prehelénicas de Babilonia y Egipto se hicieron importantes aportaciones a la Astronomía, que fueron conocidas por los griegos, cuyo gran mérito fue emplear el método matemático en el estudio de la Astronomía.

Aristarco (¿320-250 a.C.?) ha sido el primero que propuso la hipótesis heliocéntrica para el sistema solar, que no prevaleció; tuvieron que pasar veinte siglos para que se aceptase. Se considera a Aristarco y a Arquímedes (¿287-212 a.C.?) precursores, y a Hiparco (¿180-125 a.C.?) fundador de la Trigonometría, la cual nació asociada y subordinada a la Astronomía, y no alcanzó su independencia hasta el persa Nasir Al Din (1201-1274) que vivió en Bagdad cuando estaba bajo el dominio de los mongoles, quien expuso por primera vez la Trigonometría como una nueva rama de las Matemáticas, basada en la Geometría. Euler, en el siglo XVIII, cambió el enfoque de esta Ciencia y la concibió como una teoría analítica, independiente de la Geometría, definiendo el seno y el coseno por sus desarrollos en serie, y deduciendo sus propiedades de ser las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes; mediante la identidad que lleva su nombre estableció la relación ente el seno, el coseno y la exponencial de exponente imaginario; de esta manera se disiparon los reparos que a los números imaginarios se ponían, aunque éstos ya fueron conocidos y manejados desde hacía tiempo. Más tarde, Kennelly (1861-1939) y Heaviside (1850-1925) prestaron un gran servicio a la Electrotecnia, al emplear los números complejos en el estudio de la corriente eléctrica alterna y trifásica, una prueba más de la marcha en paralelo de las Matemáticas y la Física. Me parece que una expresión de la creencia en la Trigonometría como una teoría analítica que la hace independiente de la Geometría es lo que escribieron en el prefacio de su libro "Principios de las Funciones Elípticas y aplicaciones" (1922) Appell y Lacour; lo que escribieron fue: "*La Teoría de las funciones elípticas es como una Trigonometría de orden más elevado*".

Ptolomeo, que vivió en los siglos I y II d.C., es el astrónomo griego que más fama tuvo en la posteridad y que ejerció una influencia más grande y más larga en el tiempo. Su sistema universalmente conocido con su nombre es el que mejor se adaptaba a las observaciones astronómicas, por lo que era considerado verdadero e irrebatible, hasta que Galileo (1564-1642) puso fin a la teoría geocéntrica y demostró la necesidad de sustituirla por la teoría heliocéntrica de Copérnico (1473-1543). Conviene recordar que el cardenal Nicolás de Cusa (1401-1464) ya defendió la creencia de que la Tierra gira alrededor de su eje y alrededor del Sol; no se sabe si Copérnico conocía la obra de Nicolás de Cusa.

Después de estas reflexiones, llegamos al núcleo de las afirmaciones que hemos hecho en unos párrafos anteriores. El sistema de Ptolomeo, a pesar de ser erróneo, mientras se creyó en él hubo un gran progreso de la Astronomía. Los astrónomos observaron que los planetas se acercaban y alejaban de la Tierra, se movían en uno y otro sentido con velocidades diferentes. Para explicar esto, como es incompatible con el movimiento circular, que es el único que admitían, idearon un complicadísimo y sofisticado sistema de curvas llamadas epiciclos y excéntricas, para explicar los movimientos de los astros tal como son vistos en la Tierra. Combinando epiciclos y excéntricas se pueden obtener curvas muy complicadas y explicar las trayectorias de los planetas tal como se ven desde la Tierra. Es éste uno de los ejemplos del poder matemático, de cómo utilizando una teoría básicamente errónea se pueden obtener resultados verdaderos y muy importantes. Cuando se abandonó la teoría geocéntrica, este inmenso trabajo matemático no fue inútil, porque sirvió para que la Cinemática avanzase de tal manera que en el siglo XIX, en plena fiebre del maquinismo y de la primera revolución industrial, se aplicó esta Ciencia, con notable éxito, a la Ingeniería Mecánica en el estudio y diseño de los engranajes de ruedas dentadas, de modo que el conocimiento de los epiciclos y de las excéntricas y de nuevas curvas parecidas ha sido esencial en la Cinemática y Dinámica de las máquinas.

Euclides (¿330-275 a.C.?) y Arquímedes fueron los dos matemáticos griegos más grandes y cuya obra ejerció mayor influencia en la posteridad. En nuestros días existen objetos matemáticos que llevan los adjetivos de euclidianos o no euclidianos (espacios, anillos), arquimedianos o no arquimedianos (cuerpos) según que cumplan a o no el axioma de Arquímedes.

Arquímedes es el vivo retrato del físico matemático; suya es la ley de la palanca y el principio físico que lleva su nombre, por lo que se le puede considerar el fundador de la Estática y de la Hidrostática; se ocupó del equilibrio de los cuerpos flotantes y, a pesar de su importancia para la construcción naval, no se volvió a investigar sobre ello hasta Stevin (1548-1620). Pasaron veinte siglos sin que nadie se ocupara de la Hidrostática. Stevin se sintió atraído hacia esta Ciencia por la lectura de las obras de Arquímedes, traducidas al latín en 1543 por Tartaglia. La influencia de esta traducción en el renacer matemático de Europa fue extraordinaria.

Arquímedes fue el primero que definió la recta como la distancia más corta entre dos puntos, lo que implica ser un precursor del concepto de geodésica, que aparecería en la transición del siglo XVII al XVIII al nacer el Cálculo de Variaciones y aplicarse al *ds* del plano euclídeo, calculado por la extensión del teorema de Pitágoras a lo infinitesimal. Esta definición de recta es plenamente correcta, rigurosa y operativa; no le pasa lo mismo a la definición de recta de Euclides, para quien "*la línea recta es aquélla que yace por igual sobre sus puntos*".

Los elementos de Euclides es el texto más famoso de la Historia de la Ciencia. En él está recogido el saber geométrico de su tiempo; es extraordinario no sólo por su contenido sino también por la exposición didáctica, la claridad y el rigor; tiene el gran mérito de haber establecido por primera vez la estructuración hipotético-deductiva de una Ciencia, y de él arranca "*la nostalgia de la Geometría*", que consiste en la aspiración de toda Ciencia de estructurarse siguiendo el modelo euclídeo. Se consideró a la Geometría euclídea como la única posible, verdadera e irrebatible, hasta que, en el siglo XIX, Lobatchewski (1792-1856) y Bolyai (1802-1860), de manera independiente, construyeron la primera geometría no euclídea (hiperbólica), caracterizada por negar el quinto postulado de Euclides (el de las paralelas) y admitir que "*por un punto situado fuera de una recta pasan infinitas paralelas (dos de ellas límites)*". La primera exposición de esta nueva Geometría es la memoria de Lobatchewski de 1829, titulada "*Los fundamentos de la Geometría*". Esta nueva Geometría, que está fuera de la realidad, pasó casi desapercibida hasta que Beltrami (1835-1900) en 1868 dio el primer modelo euclídeo de la Geometría hiperbólica. Después se han dado otros modelos.

Riemann (1826-1866) en 1854, en su escrito para la habilitación de Privatdocent de la Universidad de Gotinga, titulado "*Sobre las hipótesis en que se fundamenta la Geometría*", definió las Geometrías no euclídeas no por la negación del quinto postulado de Euclides, sino dando el ds que define la métrica local del espacio. Así nacieron los espacios riemannianos (no euclídeos, que incluyen como casos particulares las dos geometrías clásicas no euclídeas: la hiperbólica y la elíptica o de Riemann) en la que no existen paralelas. Hay dos Geometrías elípticas, la simplemente y la doblemente elíptica, y de ambas se han dado modelos euclídeos.

En todos estos espacios riemannianos el ds^2 es positivo (es una forma cuadrática de las diferenciales de las coordenadas, definida positiva), pero hay otros espacios llamados pseudorriemannianos en los que el ds^2 puede tener valores positivos, negativos o nulo, en los que existen curvas de longitud nula o imaginaria. Existe también un espacio pseudoeuclídeo. Estos espacios tienen un papel muy importante en la Teoría de la Relatividad. Posteriormente han sido concebidos espacios más complicados no riemannianos, algunos de los cuales tienen aplicación en física.

Se puede afirmar que en 1829 con Lobatchewski termina el reinado indiscutido de la Geometría euclídea como la única posible y verdadera, pero sin embargo se sigue pensando que, aunque las Geometrías no euclídeas sean lógicamente verdaderas (no contradictorias), no existen físicamente, no se pueden materializar, no se pueden hacer máquinas y construcciones en ellas, y que el universo en el que vivimos y estamos inmersos es euclídeo; y que, si no lo fuera, la desviación respecto al euclídeo sería tan pequeña que no resultarían observables para nosotros sus efectos. Hubo que esperar a Einstein para que con su Teoría de la Relatividad cambiara la manera de pensar de los científicos. Los fenómenos físicos explicados por la Relatividad restringida y no por la Física clásica requieren sustituir el espacio y el tiempo clásicos por un espacio-tiempo que es un espacio pseudoeuclídeo cuadridimensional. Los fenómenos físicos explicados por la Relatividad general y no por la restringida o por la Física clásica requieren utilizar un espacio-tiempo que es un espacio pseudorriemanniano cuadridimensional

Con el advenimiento del siglo XX nacen paralelamente la Mecánica Cuántica y la teoría de la Relatividad para completar y mejorar la Física Clásica y para sustituirla en parte, pero no para destruirla y hacerla desaparecer. Voy a exponer algunos aspectos de la actitud de la Física Clásica y de las dos nuevas Físicas ante los conceptos fundamentales de espacio, tiempo, materia y movimiento.

La Física Aristotélica dura desde Aristóteles en el siglo IV (a.C.) hasta mediados del siglo XVII, en el que Galileo pone fin a su reinado y da comienzo a una nueva Física consolidada por Newton a fines del XVII y comienzos del XVIII. Durante los siglos XVIII y XIX adquiere un grande y magnífico desarrollo hasta que, a comienzos del siglo XX, la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica ponen fin a la Física Clásica de Newton y Galileo y dan comienzo a una nueva Física. Sin embargo, mientras que la Física de Aristóteles es falsa, la Física clásica de Newton y de Galileo sigue siendo verdadera en un ámbito muy grande y solamente una parte de los fenómenos físicos escapan a su control y tienen que ser estudiados y resueltos por los métodos de la Teoría de la Relatividad y de la Mecánica Cuántica.

Para la Física Aristotélica existen dos mundos: uno sublunar, que es el nuestro, y otro celestial, y en consecuencia existen dos Físicas, una terrestre y otra celeste. Por el contrario la Física Clásica es única y, aunque siendo válida en su campo de aplicación, ha sido sustituida o, mejor dicho, completada por otras dos Físicas, que son la Relativista, aplicable a los fenómenos en gran escala (es una macrofísica) y la Cuántica, aplicable a los fenómenos a pequeña escala (es una microfísica). De modo que hoy tenemos tres Físicas cohabitando.

El espacio, el tiempo, la materia y el movimiento son entidades primarias de la Física, y la manera de pensar el hombre sobre la misma ha sufrido grandes cambios a lo largo de la Historia. El espacio ha interesado a todos los físicos y filósofos desde los más remotos tiempos y aunque las opiniones son dispares, se le han atribuido por lo general las siguientes propiedades: homogeneidad, inmutabilidad en el tiempo, independencia respecto a la materia y al movimiento, inactividad física y causal, infinitud, continuidad y divisibilidad indefinida.

Los atomistas griegos (Leucipo y Demócrito) llamaban al espacio el "no ser" para distinguirlo de la materia, que era para ellos el "ser". Esta distinción entre espacio vacío o desprovisto de materia y espacio pleno o lleno de materia se conserva hasta fecha muy reciente, acompañada de discusiones sobre la anterioridad lógica y también ontológica o temporal del espacio respecto a la materia. Existe una cierta confusión entre la nada y el vacío, a diferencia de la nada o del no ser, que más bien parecen ficciones verbales; al menos desde el punto de vista científico, el espacio vacío tiene una cualidad de capacidad, es decir, de poder ser llenado de algo (la materia) de modo que la razón de la porción de materia que llena una porción de espacio, al espacio llenado, da origen al concepto físico de densidad.

La Física clásica admite con Newton la independencia del espacio respecto a su contenido material, que puede moverse en él sin ser afectado por él y sin afectarle, y además el espacio no se altera por el paso del tiempo; puede variar dentro del espacio la posición de la materia que se desplaza de un lugar a otro, pero en estos desplazamientos las posiciones espaciales y las relaciones geométricas entre ellas permanecen siendo las mismas. También se admite que el espacio es físicamente inactivo, es decir, pasivo, y que por tanto los efectos físicos sobre los cuerpos materiales inmersos en el espacio no son debidos a éste, sino que sus causas hay que buscarlas en las interacciones entre los cuerpos, y mientras tienen lugar estas interacciones y los cambios materiales que se derivan de ellas, el espacio permanece indiferente a todo lo que en él sucede.

También se admite que el espacio es infinito y continuo e indefinidamente divisible. Se hallan implícitas estas cualidades en los postulados de Euclides; en el segundo, que dice que "*un segmento cualquiera puede prolongarse indefinidamente por sus dos extremos*", y en el tercero, que dice que "*el radio de un círculo puede ser tan grande o pequeño como queramos*" está implícita la infinitud del espacio. En el primero, que dice que "*dos puntos cualesquiera se pueden unir siempre por una línea recta*" y en el tercero está implícita la continuidad.

Kant se formula la pregunta no de la infinitud del espacio, de la que no duda, sino de la infinitud del espacio ocupado por la materia, de lo que llamaríamos el espacio material por oposición al espacio vacío. Este horror a la finitud del espacio que siente la física clásica es consecuencia de su creencia en un universo euclídeo y en la homogeneidad del mismo; la finitud exigiría la existencia de una barrera de puntos privilegiados que sería intraspasable, lo que destruiría el más fundamental de todos los axiomas, que es el de la homogeneidad. Conviene distinguir dos cualidades que caracterizan la homogeneidad del espacio; una de ellas es la relatividad de la posición (isogeneidad), y la otra la relatividad de la magnitud. La primera viene implícita en el cuarto postulado de Euclides, afirma la igualdad de dos ángulos rectos cualesquiera, o sea, la invariabilidad de las figuras geométricas en sus desplazamientos; esta propiedad es común a todos los espacios de curvatura constante y arrastra la no existencia de puntos privilegiados. Poincaré llamaba a esta propiedad homogeneidad para distinguirla de la isotropía o ausencia de direcciones privilegiadas en el espacio, o lo que es lo mismo, la no existencia de rectas privilegiadas.

La otra cualidad de la homogeneidad es exclusiva del espacio euclídeo que va implícita en el quinto postulado de Euclides (el que por un punto exterior solamente puede trazarse una recta paralela a otra dada). Wallis, en el siglo XVII, demostró que era equivalente a la posibilidad de construir figuras semejantes. La homogeneidad del espacio es un hábito muy arraigado en nosotros y tiene su origen en la creencia intuitiva de que la estructura del espacio a nuestras dimensiones es la misma que a cualquier otra dimensión, bien sea en grande para el cosmos, bien sea en pequeño para lo microscópico; más literariamente diríamos que los mundos de Liliput, Gulliver y Brobdingnag son semejantes, únicamente difieren en la escala.

La cualidad del espacio de ser continuo se puede unir a la de la divisibilidad hasta el infinito, a la no existencia de cuantos de longitud o de distancia entre puntos; lo que también se expresa diciendo que el espacio no posee agujeros, y así por ejemplo, el filósofo alemán Lotze (1817-1881) decía que era totalmente inconcebible la idea de poder crear agujeros en el espacio, es decir, regiones desprovistas de espacialidad, porque "*la laguna que tratamos de crear se llena enseguida de espacio tan bueno como el suprimido*".

Hay matices respecto a la continuidad; en mi opinión el espacio clásico posee una continuidad fuerte que es la que se deriva de un isomorfismo o analogía con los números reales. Si no existiera el número real, la continuidad del espacio sería más débil, podrían ser válidos los postulados primero y tercero de Euclides, la llamada bisección *ad infinitum* de un segmento, es decir, la posibilidad de dividir un segmento cualquiera en dos segmentos iguales, la posibilidad de que por próximos que estén dos puntos siempre se pueden intercalar entre ambos infinitos puntos. Esta continuidad débil es la que fue definida por Kant, para quien el espacio existe con anterioridad a los puntos; afirma Kant: "*La propiedad de la magnitud mediante la cual ninguna parte de ella es la más pequeña que pueda existir, o sea, mediante la cual ninguna parte es simple, se llama su continuidad*". Pues bien, con esta definición débil de continuidad existirían agujeros en el espacio que, contrariamente a lo que nos decía Lotze, no se llenarían de espacio, sino que permanecerían como lagunas de dimensiones nulas, pero habría mayor número de agujeros que de puntos espaciales (por ser la cardinalidad del número real mayor que la del número racional). La no existencia de agujeros requiere que el espacio tenga la estructura métrica del número real.

Así como a distancias finitas el número real tapa los agujeros que deja el número racional, a la escala de lo infinitamente pequeño e infinitamente grande, las sucesiones que he llamado no cauchyanas tapan físicamente los agujeros que deja el número real. Véase mi libro "*Diccionario de Matemática Moderna*", 3ª edición de Editorial Ra-Ma 1994. Nuestros conocimientos sobre el número se han ido desarrollando y perfeccionando con el tiempo. Así se pasó del número natural (enteros positivos) a los números negativos, los racionales (cocientes de dos números enteros, división inexacta) y los números reales como límites de sucesiones de números racionales. No obstante, en el más allá, en los confines del infinito, cabe la posibilidad de que <u>exista una nueva clase de números mayores en valor absoluto que cualquier número real y menores que infinito, que pueden ordenarse de menor a mayor y clasificarse en clases</u>, tales que los de cualquier clase son menores que los de la clase siguiente. A estos números he propuesto llamarlos infinitamente grandes. Los de la primera clase los he definido a partir de sucesiones de números reales que crecen más allá de todo límite y tales que la diferencia entre dos números racionales consecutivos de la sucesión tiende a cero. A estas sucesiones las he llamado no cauchyanas. Mediante una operación que he denominado adición interna he obtenido las clases sucesivas de estos infinitamente grandes, de modo que los antes definidos son los de primera clase, los de segunda clase se obtienen por adición interna de los de la primera clase.

También en las proximidades del cero (tanto del lado positivo como del lado negativo) <u>existen entre el cero y todos los números reales positivos (o negativos) una infinidad de nuevos números mayores (o menores) que cero</u>, que gozan de propiedades parecidas a los infinitamente grandes, a los que he propuesto llamar infinitamente pequeños. Si sustituimos la adición ordinaria por la multiplicación ordinaria y por la que he llamado interna, se pueden definir otras clases de infinitamente grandes e infinitamente pequeños.

Esta teoría es distinta del análisis no estándar de Robinson (1918-1974). Véase mi libro antecitado, apéndice G.

El espacio para los clásicos es a modo de una caja donde meter la materia, un medio de distinguir sensaciones simultáneas, que es inmóvil, independiente, existente y subsistente por él mismo y todo lo ocupa y lo penetra.

El tiempo es otra de las entidades primarias de la Física y ha suscitado, desde que el hombre comenzó a filosofar hasta nuestros días, tantos comentarios y discusiones como el espacio. Aun cuando los clásicos difieren en muchos matices respecto a sus ideas sobre el tiempo, de hecho vienen a conferirle una serie de propiedades casi unánimemente, que son: homogeneidad, uniformidad, independencia respecto a su contenido físico, orientación o flecha, infinitud, continuidad y divisibilidad indefinida.

Hay una diferencia muy importante entre el espacio y el tiempo, y es relativa a la flecha u orientación que posee el tiempo y que no posee el espacio; este último tiene la apariencia de una caja donde guardar la materia y donde ésta puede moverse en cualquier dirección sin que ninguna tenga preferencia sobre la otra; por el contrario, el tiempo está permanentemente en movimiento, fluyendo, mientras el espacio está permanentemente en reposo; el tiempo es dinámico, el espacio es estático; un punto que se mueve sobre una recta puede desplazarse hacia la derecha y hacia la izquierda; por el contrario, el tiempo siempre fluye hacia delante, nunca puede retroceder, su marcha es irreversible desde el pasado hacia el futuro.

Así como la estructura geométrica euclídea tridimensional del espacio le confiere su homogeneidad, puesto que es la única en la que pueden construirse triángulos semejantes, asimismo la estructura euclidiana del tiempo es la que le confiere también su homogeneidad, porque es la única que permite dilatar o contraer un segmento sin distorsión del mismo. El tema de Gulliver tiene también su réplica en el tiempo, y se admite que por pequeños (infinitesimales) que sean los intervalos de tiempo o por infinitamente grandes que sean, el flujo del tiempo sigue inalterable dentro del intervalo.

Además hemos hablado de la posibilidad de construir figuras semejantes en el espacio; ello es debido a que un triángulo euclídeo no queda determinado por el conocimiento de sus tres ángulos, porque el dar los tres ángulos de un triángulo define todo un conjunto infinito de triángulos que gozan de la propiedad de que la razón de los lados opuestos a ángulos iguales, para dos triángulos cualesquiera, es la misma (definición de triángulos semejantes). Por el contrario, los triángulos esféricos quedan determinados por sus tres ángulos, y ésta es la razón de que sobre la esfera no puedan construirse triángulos semejantes. De esta última propiedad gozan los espacios no euclídeos clásicos (elíptico e hiperbólico) de cualquier número de dimensiones.

No solamente existe una relatividad de magnitudes en el tiempo, sino también una relatividad de posición, es decir, que el mero paso del tiempo carece de efectos físicos; el tiempo como el espacio se caracteriza por su inactividad física y causal; las causas de los cambios o de los movimientos hay que buscarlas fuera del tiempo, en los propios cuerpos materiales.

La continuidad y la divisibilidad indefinida del tiempo son admitidas tanto por la Física clásica como por la relativista; se considera que el tiempo sigue fluyendo dentro de un intervalo por pequeño que sea, tiene un origen (instante anterior a todos). Admitir la indivisibilidad indefinida del tiempo equivaldría a admitir la existencia de átomos o cuantos de tiempo, es decir, intervalos en los que quedaría paralizado el flujo del tiempo, que serían intemporales.

Sin embargo se puede construir una teoría de la cuantificación del espacio y del tiempo, que no es única, depende de la masa del objeto material que realice esta cuantificación, y que es distinta para un electrón que para un protón; es tanto menor cuanto mayor es la masa. Como en la obra de Pirandello "Así es si así os parece" cada personaje tiene su verdad, podemos decir que cada partícula material (de distinta naturaleza) tiene sus cuantos de longitud y de tiempo. En los años cincuenta del siglo pasado, en la Revista Euclides, combinando la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Relatividad desarrollé una teoría de la discontinuidad de las variables físicas, de modo que para cada una de ellas existe un cuanto. Véase mi libro "*Teoría de la Investigación Matemática*" (Edit. Dossat 1966), página 131 en adelante.

Un problema clásico es el de la intemporalidad del espacio y la inespaciabilidad del tiempo. Aun admitiendo que la estructura del espacio sea eterna, no admita cambios, por el mero hecho de persistir en el tiempo da origen a la idea de que existen muchos espacios que se van sucediendo unos a otros, y que en cada instante son un conjunto de puntos que existen simultáneamente, habiendo una serie infinita (con la cardinalidad del continuo) de espacios instantáneos sucesivos, idénticos, y precisamente por ser idénticos se puede hablar de un espacio que, aunque no sea intemporal, es inmutable, y esta inmutabilidad le confiere la cualidad de que el propio espacio sea el receptáculo de sí mismo. Análogas consideraciones son válidas para el tiempo; existe un tiempo local para cada punto del espacio, pero la posibilidad de sincronizar todos los relojes y el hecho de que su marcha sea la misma es lo que nos permite hablar de un tiempo que si realmente no es inespacial, es uniforme (independiente de la posición) y esta uniformidad le confiere la cualidad de que el propio tiempo sea el receptáculo de sí mismo.

Existe una diferencia entre los puntos del espacio y los instantes del tiempo considerados como un presente, entre el aquí y el ahora, porque mientras los puntos permanecen estáticos el presente es por naturaleza dinámico, es una cortadura en el tiempo, que lo divide en dos mitades irreales: una el pasado, es lo que ya no existe, la otra el futuro, es lo que todavía no existe, de modo que la única realidad actual, el presente, es un instante huidizo, sin dimensiones, sin posibilidad de congelación, siempre en movimiento desde el pasado hacia el futuro.

En resumen, los clásicos atribuyen al tiempo propiedades similares a las del espacio, salvo una diferencia que es muy importante, la de estar ordenado con un orden total (en el sentido matemático de la palabra), es decir, que para dos instantes cualesquiera, siempre uno de ellos es anterior al otro, a menos que sean simultáneos. Además la conciencia humana puede percibir directamente el fluir del tiempo; podríamos decir que la actividad mental humana, el existir humano, se caracteriza por esa percepción inmediata del fluir del tiempo, con independencia de que exista o no algo que está durando en el tiempo. Esta conciencia del tiempo está unida a la noción íntima de causalidad.

La materia y el movimiento son otras dos entidades primarias de la Física. La función primordial de la materia es ocupar o llenar el espacio, pero no hay consenso entre los científicos y los filósofos sobre ¿qué es la materia? A grandes rasgos sus teorías se pueden clasificar en dos grupos: las atomísticas y las de la fluidez; pero esta clasificación no es tajante, hay puntos entremezclados en una y otra, así como contradicciones en las opiniones de un mismo autor y muchas diferencias tanto de matiz como esenciales entre unos y otros.

Se le suelen atribuir a la materia las siguientes cualidades: homogeneidad, rigidez, movilidad, sustancialidad, impenetrabilidad, increabilidad e indestructibilidad (ley de conservación de la materia de Lavoisier). Los atomistas le atribuyen discontinuidad e indivisibilidad al llegar a un límite, y distinguen entre espacio lleno y espacio vacío, lo que lo llena es precisamente la materia; ésta es, pues, la propiedad que caracteriza a la materia, poder ocupar y llenar el espacio, lo que arrastra su impenetrabilidad, porque lo que está lleno no puede estar más lleno; llenar es una propiedad de todo o nada.

Los primeros atomistas (Demócrito, Leucipo, Epicuro, Lucrecio) suponen que la materia es un agregado de partículas elementales: los átomos, de masa, volumen y forma invariables (rigidez), en perpetuo movimiento, que son como la esencia de la materia; ellos son los que ocupan espacio y están separados ente sí por espacios vacíos, cuya existencia es la que asegura la posibilidad del movimiento; para ellos y para muchos científicos muy posteriores, el movimiento no es posible en un espacio totalmente ocupado por la materia. Mientras que el espacio es indefinidamente divisible, no le pasa lo mismo a la materia, que no puede dividirse *ad infinitum* porque el proceso de división finaliza al llegar a los átomos. La actual teoría de las partículas elementales es una superación y un refinamiento del viejo atomismo, pero es una teoría atomicista. La materia tiene propiedades que no comparte con los átomos, como es su elasticidad, la cual es consecuencia de su mayor o menor compresibilidad, de poder separar o acercar más los átomos entre sí, mientras que los átomos son inelásticos o rígidos. Conviene decir que en la Historia de la Física ha habido teorías que suponen deformables los átomos. Los atomistas admitían la existencia del vacío para explicar la posibilidad del movimiento.

Materia y espacio se complementan; el espacio es el recipiente de la materia, y la materia es el contenido del espacio; no es posible la existencia de la materia sin que exista el espacio, y si bien la existencia del espacio no implica la de la materia, un espacio vacío sin algo que señalice y distinga sus puntos es inconcebible físicamente, al menos para mí, y ese algo que señaliza y distingue sus puntos es precisamente la materia.

El movimiento es otra entidad primaria que viene a estar con el tiempo en la misma relación que la materia con el espacio; el movimiento sirve para señalizar los instantes y para ocupar o llenar el tiempo; el movimiento es un cambio en el tiempo de la posición de la materia en el espacio; en este caso el movimiento implica no solamente la existencia del tiempo, sino también la del espacio y la materia. Siempre que se habla de movimiento es de algo con relación a algo, y en todo movimiento hay algo que cambia (de posición o de velocidad) y algo que permanece (la materia móvil, el espacio donde tiene lugar el movimiento, etc.).

En el siglo XX una revolución trascendental ha tenido lugar en la Física con la Teoría de la Relatividad y la Mecánica ondulatoria o cuántica. Einstein creo la Teoría de la Relatividad. En esta teoría el cambio respecto a la Física clásica es muy grande; ha modificado ideas muy familiares al hombre, como son las del espacio y el tiempo. En la Teoría de la Relatividad existen tres etapas que son: la Relatividad restringida, la Relatividad general y las teorías unitarias de campo. Las últimas pretenden unificar los campos gravitatorios y electromagnéticos; a ellas se dedicaron Weyl (1885-1955), que fue el iniciador, Einstein (1879-1955), que se apasionó por el tema, y otros muchos; aunque posteriormente estas teorías tomaron una orientación muy distinta (ver más adelante), el esfuerzo no fue inútil porque trajo nuevas Geometrías y nuevos espacios no riemannianos mucho más complicados que los de Riemann, matemáticamente muy interesantes. En mi libro "*Curso de Mecánica en forma de problemas*", editado por la E.T.S. de Ingenieros Agrónomos en 1978, páginas 413 en adelante, y en varias memorias en la Revista de la Real Academia de Ciencias en aquellos años, y en la Matemática Hispano-Americana en los años cincuenta, ideé un espacio de Finsler (no riemanniano) cuyo ds es la suma de una forma lineal y de la raíz cuadrada de una forma cuadrática de las diferenciales de las coordenadas y también una modificación de la derivación covariante del Cálculo Diferencial Absoluto que dota de torsión a un espacio de Riemann; lo que tiene aplicación a la Mecánica y Electrodinámica clásicas y relativistas. Surge así un potencial distinto del ordinario, que llamé paramétrico porque depende no sólo de la posición, sino también de las condiciones iniciales del movimiento, que lleva a ecuaciones diferenciales que dependen de sus valores iniciales en su planteamiento.

El impacto sobre el gran público de la Teoría de la Relatividad ha sido mucho mayor que el de la Mecánica Cuántica, sobre todo desde el punto de vista emocional; sin embargo su importancia práctica no ha sido tan grande.

La Relatividad restringida, que es la primera en el tiempo (1905) y la más sencilla, es la que ha aportado más resultados prácticos. Entre ellos figuran: la no existencia de velocidades superiores a la de la luz y la variación de la masa con la velocidad, con su secuela de la posibilidad de la transformación de la masa en energía y viceversa.

La Relatividad restringida es debida a Einstein y Lorentz (1853-1928) principalmente. En la Física clásica, cuando un observador está en movimiento uniforme y rectilíneo respecto a otro observador, para que pongan de acuerdo sus observaciones es preciso que en sus fórmulas físicas escriban el mismo tiempo, y las coordenadas cartesianas que resultan de efectuar una traslación del triedro de referencia del observador en reposo, hasta hacerlo coincidir con el triedro de referencia del observador en movimiento.

Cuando en la Física clásica se dice que el espacio y el tiempo son independientes, se quiere decir que los cambios en las fórmulas físicas de un observador en movimiento respecto a otro, se han de hacer de la manera descrita en el párrafo anterior. En estos cambios, los intervalos de tiempo medidos por todos los relojes son los mismos, y también permanece invariante la distancia entre dos puntos fijos del espacio, cualesquiera que sea el sistema de coordenadas empleado.

Mientras que estos cambios no modifican la forma de las ecuaciones de la Mecánica clásica, sí cambian la forma de la ecuación de ondas de la Óptica y del Electromagnetismo clásico, y existirá por tanto la posibilidad de demostrar mediante fenómenos ópticos, el movimiento de traslación de la Tierra respecto al hipotético éter clásico, lo que intentaron hacer Michelson y Morley, fracasando en el intento. Éste fue uno de los experimentos que hacen Historia en la Física.

Esto obligó a los físicos a pensar que los cambios en las fórmulas físicas de un observador en movimiento respecto a otro, no podrán hacerse de la manera clásica, sino que tenían que hacerse de modo que lo que quedase invariante fuese la ecuación de ondas de la Óptica y del Electromagnetismo clásico. Lorentz dio las nuevas fórmulas de transformación que han sustituido a las clásicas y que dejan invariante la anterior ecuación de ondas. Pero estas transformaciones de Lorentz no sólo dejan invariante la ecuación de ondas, sino que también dejan invariante la distancia entre dos puntos fijos en un espacio de cuatro dimensiones (pseudoeuclídeo), en el que la coordenada de la cuarta dimensión es imaginaria, es el producto del tiempo por la velocidad de la luz en el vacío y por $i = \sqrt{-1}$.

Los puntos de este espacio nuevo de cuatro dimensiones están constituidos por la asociación de un punto geométrico (tres coordenadas espaciales) y de un instante (coordenada temporal). A estos nuevos puntos se les llama sucesos. En la teoría de la Relatividad, a diferencia de lo que sucede en la Física clásica, no todo suceso es anterior, posterior o simultáneo a otro, sino que puede haber sucesos que no estén en esta relación: se ha modificado profundamente el concepto de simultaneidad.

Por lo dicho anteriormente, Minkowsky (1864-1909, que había sido profesor de Einstein en Zurich, dijo que el espacio y el tiempo no son independientes, sino que están ligados o fundidos en un continuo cuadridimensional. No obstante sigue existiendo una disimetría entre espacio y tiempo, la coordenada temporal es imaginaria.

Conocidas las transformaciones de Lorentz, Einstein formuló su primer principio de la Relatividad, según el cual, las ecuaciones matemáticas de los fenómenos físicos han de ser invariantes con respecto a las transformaciones de Lorentz. Una consecuencia de estas transformaciones es que no puede haber una velocidad superior a la de la luz. Otra consecuencia, que ha tenido un impacto emocional muy intenso sobre el gran público, es que la medida de un intervalo de tiempo es distinto si el reloj con el que se mide está en reposo o en movimiento, y análogamente la medida de una longitud es distinta si la regla con la que se mide está en reposo o en movimiento.

Se sigue admitiendo en la Relatividad la invariancia de la carga eléctrica, sin embargo la masa de un punto material varía con la velocidad, es mínima cuando está en reposo y se hace infinita cuando alcanza la velocidad de la luz. La energía de un punto material en reposo es igual al producto de su masa por el cuadrado de la velocidad de la luz en el vacío. De aquí la posibilidad de la transformación de la materia en energía y viceversa; es el fin de las leyes de Lavoisier (1743-1794) de la conservación de la materia y de la energía. Surgió así la posibilidad teórica, luego confirmada experimentalmente, de la creación de la materia, como por ejemplo la desaparición de un fotón, convertido en un electrón negativo y otro positivo (positrón) y de la aniquilación de la materia, con el ejemplo contrario, la desaparición de un electrón y de un positrón, por conversión de éstos en fotones o neutrinos, bien sea directamente o por la formación de mesones intermedios.

La Relatividad general requiere un aparato matemático mucho más complicado, y es menos rica en resultados prácticos, aunque de mucho mayor alcance filosófico. En la Física clásica, el espacio, el tiempo, la energía, y la materia son independientes; en la Relatividad restringida el espacio y el tiempo están ligados entre sí, así como la materia y la energía, pero éstas a su vez son independientes de los primeros. En la Relatividad general, el espacio, el tiempo y la materia están ligados entre sí, de modo que la presencia de esta última, modifica la métrica euclídea del espacio-tiempo, transformándola en una métrica riemanniana (más concretamente llevan el prefijo pseudo), siendo las trayectorias de los puntos materiales las líneas geodésicas del espacio-tiempo. Se dice que la materia dota de curvatura al espacio-tiempo. En las teorías unitarias de campos, el espacio además de curvatura tiene torsión.

Para mis ideas propias sobre estas cuestiones, véanse mis conferencias en el centenario de Einstein y en el tomo dedicado al siglo veinte, mi conferencia sobre Einstein. Ambas han sido publicadas por la Real Academia de Ciencias.

Al iniciarse el siglo XX, Planck, al intentar resolver un problema concreto, la repartición de la energía en la radiación del cuerpo negro, descubrió los cuantos, dando lugar a una nueva Física, la Cuántica, que junto a la Relatividad y a la Física clásica que sobrevive, rompe la unidad que le habían dado Galileo y Newton y ofrecen una imagen física triple del universo, una diversidad mayor aún que la de Aristóteles, que era doble.

Planck (1858-1947) introdujo la distribución cuántica de la energía solamente para la absorción y Einstein extendió las ideas de Planck a la emisión de la energía, y de esta forma resucitó en parte la antigua teoría de la luz que había defendido Newton. Se introduce de esta manera una doble naturaleza ondulatoria y corpuscular de la luz, y un atomismo para la energía. El atomismo ya no es exclusivo de la materia y de la electricidad, sino que también lo es de la energía.

A fines del primer cuarto del siglo XX, De Broglie asocia a cada corpúsculo material una onda, extendiendo a la materia una doble naturaleza corpuscular y ondulatoria, al igual que tiene la luz en particular y la radiación en general. Estas ondas de materia fueron confirmadas experimentalmente en la difracción de los electrones por los cristales, lo que le valió el Premio Nobel en 1929.

La matematización de las ideas de De Broglie, condujo a Schrödinger (1887-1961) a fundar la Mecánica Ondulatoria y él mismo demostró la identidad entre su Mecánica y la Mecánica Cuántica de Born, Heisenberg y Jordan.

Quedaba planteado el problema de *¿qué eran las ondas de la nueva Mecánica*?, ¿qué era lo que ondulaba? Born resolvió este problema: las nuevas ondas eran ondas de probabilidad, la intensidad de la onda en cada punto y en cada instante es la probabilidad de que el corpúsculo asociado esté en ese instante en ese punto. A partir de este momento, la Física renuncia al determinismo y se vuelve indeterminista, es decir, los interrogantes que hay que plantear a la naturaleza, según la interpretación probabilista de la nueva Física, no es dónde se encontrarán y qué velocidades tendrán en un instante determinado electrones concretos, sino qué probabilidad hay de encontrar en un instante dado un electrón en una posición dada, y qué probabilidad de que tenga un momento (cantidad de movimiento) dado.

El paso de la Mecánica clásica a la Cuántica, requiere no sólo un cambio radical de los métodos matemáticos, sino también de la infraestructura ideológica que la sustenta. Por ejemplo, algo que no tiene paralelo en la Física clásica son las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, en virtud de las cuales el observador por el mero hecho de observar un sistema, lo perturba, siéndole imposible llegar a conocer exactamente los valores que toman dos variables dinámicas conjugadas (posición y momento, energía y tiempo) simultáneamente. Mientras que en la Física clásica se consideraba que no habría más limitación en dicho conocimiento simultáneo que la finura de los instrumentos de medida y de la técnica experimental, es decir, teóricamente ninguna, en la nueva Física la limitación en este conocimiento simultáneo es de carácter teórico (epistemológico), viene impuesta por las perturbaciones que en toda medida se ocasiona al sistema que ha sido medido, que vienen impuestas por las relaciones de incertidumbre de Heisenberg.

Sobre la expresión matemática de las relaciones de incertidumbre hay acuerdo prácticamente unánime entre los Físicos, no así en su interpretación física. Se han dado diversas explicaciones entre las que figuran: a) la dispersión de los valores de una variable física sería consecuencia de perturbaciones aleatorias producidas en la misma, como resultado de las medidas efectuadas sobre la variable conjugada; b) las dispersiones proceden de microfenómenos todavía no descubiertos, que perturban de manera aleatoria los valores de las variables físicas (teoría de las variables ocultas).

Resulta que los conceptos empleados en la Física clásica no son adecuados a los fenómenos propios de la Microfísica Cuántica. Respecto a la doble naturaleza ondulatoria y corpuscular de la materia según el principio de complementariedad de Bohr no son contradictorias, sino complementarias; la teoría corpuscular da cuenta del comportamiento individual de las partículas elementales, mientras que la teoría ondulatoria explica el comportamiento estadístico de un gran número de partículas idénticas.

Todo lo anterior está dentro del marco de la interpretación ortodoxa de la Mecánica Cuántica de la escuela de Copenhague, que es la admitida por la mayoría de los Físicos, es la del indeterminismo físico. No obstante Físicos ilustres no aceptan esta interpretación, entre ellos figura Einstein, para quien la teoría cuántica, aunque sea consistente, es incompleta, porque ignora una parte de la realidad física, planteando en 1935 con Podolsky y Rosen la paradoja EPR, que lleva sus nombres. Estos argumentos fueron recogidos y reformulados por Bohm en 1951, quien dio un modelo de Mecánica Cuántica con variables ocultas. En 1932 Von Neumann parecía que había demostrado la incompatibilidad de las teorías de variables ocultas (no contextuales) con la estructura formal de la Mecánica Cuántica, hasta que en 1966 Bell probó que la demostración de Von Neumann era inadecuada y basándose en un teorema de Gleason de 1957, dio una prueba concluyente de que la antes citada incompatibilidad no era cierta.

El propio Bell demostró también que las llamadas teorías contextuales no son suficientes para justificar las variables ocultas, porque cualquier teoría de este tipo ha de ser no local, propiedad que es suficiente para descalificarla. Las teorías de variables ocultas, para explicar EPR, tienen que ser locales, y Bell en 1964 demostró que todas ellas son incompatibles con la Mecánica Cuántica, al detectar discrepancias observables entre la Mecánica Cuántica y las teorías de variables ocultas locales. El teorema de Bell es muy importante, aunque ha sido objetado entre otros por los que siguen la escuela de De Broglie.

De Broglie, que había sido un defensor muy firme del indeterminismo de la nueva Física, después se convirtió a la idea de un retorno al determinismo, de los que el principal representante había sido Einstein. Según su teoría de la doble solución, la descripción completa del movimiento de una partícula (corpúsculo) sería dada por la coexistencia de dos ondas, soluciones de una misma ecuación. Una de ellas sería la expresión matemática de las probabilidades (la propia de la Escuela de Copenhague). La otra onda representa un campo físico objetivo, de naturaleza desconocida, que da cuenta de los fenómenos de interferencias y difracción de las partículas, que son una singularidad local de la onda, que son arrastradas (guiadas) por la onda en su propagación. Existe además un medio hipotético subcuántico en el que se mueve la onda, de modo que los continuos choques de la partícula con este medio subcuántico, provocan un movimiento aleatorio, que es por lo que solamente podemos obtener un conocimiento probabilístico.

Los antiguos atomistas creían que los átomos eran indivisibles, que no existía un mundo subatómico. A finales del siglo XIX con el descubrimiento del electrón, se extendió el atomismo a la electricidad, y a principios del siglo XX (1905) con la explicación del efecto fotoeléctrico por Einstein y en su hipótesis de los cuantos de luz (los actuales fotones) se extendió el atomismo de la materia a la radiación. Posteriormente en la desintegración radioactiva y el modelo atómico de Lord Rutherford (1871-1937) se encontró que existía un mundo subatómico y que los electrones y protones (los núcleos atómicos del hidrógeno) parecían ser los ladrillos con los que estaba construida la materia. Al distinguir entre el núcleo y la corteza del átomo se comprendió que el núcleo no podía estar formado por electrones y protones y que teóricamente se hacía necesaria la existencia de una partícula de masa igual o casi igual a la del protón y sin carga eléctrica: el neutrón, para una hipótesis de la construcción del núcleo por protones y neutrones. El neutrón fue descubierto experimentalmente en 1932.

La Mecánica Cuántica de Dirac (relativista) predijo teóricamente la existencia del electrón positivo (positrón) que fue descubierto experimentalmente en 1932. También en esos años Fermi (1901-1954) recogiendo una idea anterior de Pauli (1900-1958) en la que postulaba la existencia de una nueva partícula eléctricamente neutra y sin masa o con una masa muy pequeña: el neutrino; para explicar la desintegración radioactiva ideó un teoría de la fuerza débil, que en 1957, fue totalmente establecida.

En 1956 se descubrió experimentalmente el neutrino al que hoy le añadimos el adjetivo de electrónico.

Posteriormente comenzó la escalada y la aparición desordenada de una multitud de partículas elementales que serían los átomos de nuestro tiempo. A cada partícula le corresponde una antipartícula, de modo que si la materia está formada de partículas, las antipartículas forman la antimateria, que es otra clase de materia; una partícula y su antipartícula pueden aniquilarse y transformarse en energía radiante (fotones). Las dos antipartículas más antiguas en nuestro conocimiento son los electrones negativo y positivo (positrón).

Las ideas que me son propias respecto a un nuevo enfoque de las relaciones de incertidumbre, su interpretación, su división en fuertes y débiles, y su relación con la transformada de Fourier y la Teoría de la

Información, así como la necesidad de generalizar el espacio de Hilbert ampliándolo, y la introducción de las que he llamado raíces cuadradas internas de los vectores de probabilidad y las funciones de densidad de probabilidad, pueden consultarse en mi libro "Fundamentos de la Mecánica Cuántica" editado por la ETS de Ingenieros Agrónomos en 1979, y en mis conferencias en el cincuentenario de la Mecánica Cuántica en 1975, en mi discurso de apertura del curso 1975-76 de la Real Academia de Ciencias, y en mi conferencia sobre "Von Neumann y el ascenso científico de los Estados Unidos" en 2003, todas ellas publicadas por la Real Academia de Ciencias.

Consolidada la Mecánica Cuántica en los años treinta, se prosigue la labor científica en sus prolongaciones: la Electrodinámica Cuántica, la Teoría de la interacción débil y la Cromodinámica Cuántica, que adquieren su forma definitiva hacia 1948, 1957 y 1972, respectivamente.

Antes sólo se conocían dos fuerzas fundamentales, que eran: las fuerzas gravitatorias y las electromagnéticas; actualmente las fuerzas, que ahora se llaman interacciones, son cuatro, que por orden de menos a más intensas son: la gravitatoria, la débil, la electromagnética y la fuerte. La interacción entre dos partículas de materia se logra por el intercambio de una partícula de fuerza que es emitida por una de ellas y absorbida por la otra. A las partículas de fuerza se les llama intermediarias de la interacción, y son los cuantos de energía asociados al campo cuántico de la interacción.

Las partículas intermedias de las cuatro interacciones por el mismo orden en que se han citado, son: el gravitón, es todavía hipotético y se supone que no tiene masa; los bosones W^+, W^- y Z^0, con carga eléctrica los dos primeros y neutro el tercero, fueron descubiertos en 1983 y tenían las propiedades físicas anticipadas por la Teoría. El fotón ya era conocido y el gluón que actúa sobre los quarks que definiremos más adelante.

Actualmente las partículas elementales (no compuestas por otras) no son las mismas que antes. Son elementales el electrón, el muón, la tau con sus neutrinos asociados (leptones) y los quarks. Estos últimos fueron introducidos en 1964 por Gell-Mann, que recibió el Premio Nobel en 1969 y por Zweig, tienen una carga eléctrica positiva o negativa igual a 1/3 o 2/3 de la del electrón, no existen libres en la naturaleza, sino que permanecen confinados en el interior de las partículas sobre las que actúa la interacción fuerte (hadrones). Antes se creía que el protón y el neutrón eran elementales, ahora se sabe que están compuestos de quarks.

La interacción débil es la responsable de la desintegración de las partículas, de la que es un caso particular la desintegración radioactiva descubierta por Becquerel en 1896. Su teoría fue iniciada por Fermi en 1933 y adquirió su forma definitiva en 1957.

La interacción fuerte es la que mantiene unidos los protones y neutrones dentro del núcleo atómico, impidiendo que éste explote a causa de la repulsión entre los protones por tener la misma carga eléctrica. Su teoría fue iniciada por Yukawa (Premio Nobel en 1939) en 1935. Al principio se creyó equivocadamente que la partícula intermediaria es el pión, y no se llegó a una forma definitiva de la teoría hasta que se introdujeron los quarks.

La línea de pensamiento de Einstein de una teoría unitaria, cambió de dirección, y se ha logrado la unificación de las interacciones electromagnética y débil en la teoría electrodébil, a lo que contribuyeron decisivamente Glashow, Salam y Weinberg, por lo que se les concedió conjuntamente el Premio Nobel en 1979. Actualmente se trabaja en la teoría de la gran unificación que unifica tres interacciones, queda fuera la gravitatoria. Es todavía una quimera la teoría del todo que unificará a las cuatro interacciones, lo que se llama el sueño de Einstein.

Son muchos los conceptos físicos nuevos y los antiguos que han cambiado en la segunda mitad del siglo XX. Un ejemplo es el concepto clásico del vacío, porque ahora el vacío no está ya vacío. Hoy el vacío se define como el estado de mínima energía, es el receptáculo de las partículas virtuales producto de las fluctuaciones cuánticas que tienen lugar en la proximidad de una partícula. Las partículas virtuales se crean y aniquilan en intervalos de tiempo pequeñísimos, en los que se viola el principio de conservación de la energía, lo que es posible en virtud de la cuarta relación de incertidumbre de Heisenberg, la que se refiere a la energía y al tiempo.

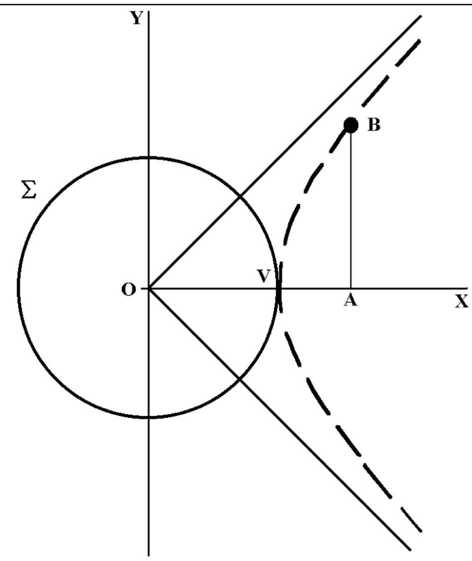

Figura 1

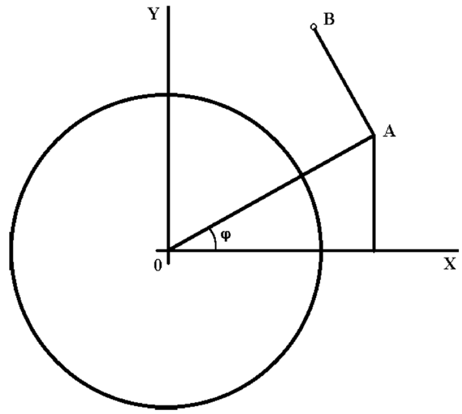

Figura 2

El extraordinario progreso alcanzado hoy por la Física ha sido posible por los asombrosos y carísimos experimentos realizados por los físicos experimentales, por la complicada y sofisticada Matemática actual y por el gran ingenio y talento de los físicos teóricos, que han sabido utilizar los potentes métodos matemáticos modernos para la explicación, unas veces de los resultados de los experimentos físicos, y otras veces para predecir cuáles tenían que ser los resultados de experimentos todavía no realizados.

El estado actual de la Física y de las Matemáticas es una firme prueba de la creencia de Galileo y de algunos precursores suyos, en que el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático.

Para el lector especialista interesado por la técnica matemática incluyo las notas que siguen, entresacadas de mis investigaciones publicadas o que figuran en mis libros, aun inéditos, titulados "Modelos euclídeos de geometrías no euclídeas sobre espacios conexos y no conexos" y "La pluralidad de las geometrías euclídeas y proyectivas y la trigonometría de los triángulos imaginarios".

El objeto de estas notas es poner de manifiesto los aspectos surrealistas y sumamente curiosos de las figuras imaginarias, las cuales no se pueden dibujar sobre el papel, pero se pueden representar gráficamente de manera simbólica, de modo que aunque son invisibles y no nos son accesibles por la percepción sensible, sí que se puede razonar sobre ellas, efectuar construcciones y acceder a las mismas a través de la inteligencia.

Nota 1ª La circunferencia y la esfera completas. Generalización a *n* dimensiones. Casos real e imaginario.

Llamo circunferencia completa a la figura geométrica formada por una circunferencia real Σ, de radio R y centro O (figura 1) y al conjunto de sus intersecciones imaginarias con todas las rectas de su plano exteriores a ella. Es por tanto el lugar geométrico de todos los puntos reales e imaginarios que están a la distancia R de O. Una circunferencia completa está formada por la circunferencia real Σ y todas las infinitas hipérbolas equiláteras imaginarias, cuyos vértices reales son dos puntos diametralmente opuestos de Σ.

En la figura 1 se ha representado Σ, y una de las dos ramas de una de tales hipérbolas, cuyo vértice real es V, en el interior del ángulo formado por las dos bisectrices de OX y OY. Las curvas imaginarias las representamos por trazos discontinuos y los puntos imaginarios rodeados por un circulito. (B) es el punto imaginario de intersección de Σ y de la recta real A(B). Las dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad ; \qquad x^2 - y^2 = R^2 \qquad (1)$$

son las de Σ y las de una hipérbola equilátera real (sería la de la figura 1 si el trazado fuera continuo) coincidente con la imaginaria (la de trazado discontinuo). Por coincidente entendemos que la abscisa A es real y la ordenada B es el producto por *i* de la ordenada de (1). Se sigue que si OA= ρ entonces:

$$i=\sqrt{-1} \quad ; \quad OA=\rho; \quad A(B)=i\sqrt{\rho^2-R^2} \Rightarrow OA^2+A(B)^2=R^2 \qquad (2)$$

$$|A(B)|<OA$$

y por tanto (B) pertenece a la circunferencia completa $\bar{\Sigma}$. El punto (B_1) simétrico de (B) respecto de A, también pertenece a la circunferencia completa $\bar{\Sigma}$.

En la figura 2 se ha girado la recta OA un ángulo φ. Las coordenadas de (B) respecto a O son:

$$x=\rho\cos\varphi-i\sqrt{\rho^2-R^2}\operatorname{sen}\varphi;\ y=\rho\operatorname{sen}\varphi+i\sqrt{\rho^2-R^2}\cos\varphi \qquad (3)$$

donde los sumandos reales son las coordenadas de A y las imaginarias las proyecciones de A(B) respecto a OX y OY, o, lo que es lo mismo, las coordenadas de (B) relativas a A.

Las (3) son las ecuaciones paramétricas de la circunferencia completa $\bar{\Sigma}$.

Se puede establecer una correspondencia biunívoca (biyección) entre los puntos de $\bar{\Sigma}$ y los del hiperboloide equilátero de revolución (hiperbólico) de ecuación

$$x_1^2+y_1^2-z_1^2=R^2 \qquad (4)$$

cuya circunferencia de garganta es Σ (OZ_1 perpendicular a OX y OY); (4) tiene las ecuaciones paramétricas:

$$x_1=RCh\alpha\cos\varphi; \quad y_1=RCh\alpha\cdot\operatorname{sen}\varphi \quad z_1=RSh\alpha \qquad (5)$$

En la biyección hacemos corresponder las coordenadas x_1, y_1 de un punto del hiperboloide P a las x, y de A, y el producto $i\cdot z_1$ al segmento A(B); es decir el punto A es la proyección de P sobre XOY, y el módulo del segmento A(B) es la coordenada z_1 de P. Se sigue que $\bar{\Sigma}$ es un continuo bidimensional en el plano complejo biyectivo al hiperboloide (4) siendo los puntos homólogos de ambos los que tienen los mismos valores de ρ y φ, valiendo α:

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}=R; \quad R\cdot ch\alpha=\rho\Rightarrow R\cdot sh\alpha=\sqrt{\rho^2-R^2}=z_1 \qquad (6)$$

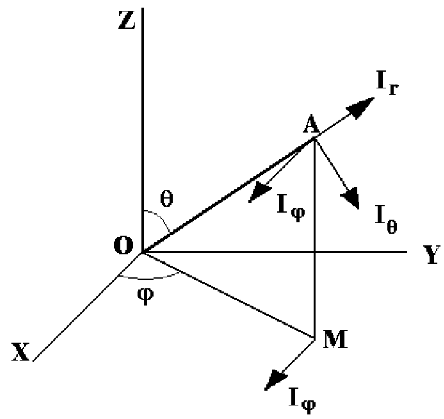

Figura 3

Lo anterior lo podemos generalizar al espacio. Llamo esfera completa $\bar{\Sigma}$ a la figura geométrica formada por una esfera real Σ de centro O y radio R (figura 3) y al conjunto de las circunferencias imaginarias intersecciones de Σ con todos los planos exteriores. $\bar{\Sigma}$ está formada por Σ y el conjunto de los infinitos hiperboloides imaginarios, equiláteros de revolución, de dos hojas, cuyos vértices reales son dos puntos diametralmente opuestos de Σ. La ecuación de uno cualquiera de estos hiperboloides, si tomamos como eje OZ_1 el diámetro de Σ que une los vértices, es:

$$z_1^2-\left(x_1^2+y_1^2\right)=R^2 \qquad (7)$$

que junto a la ecuación de Σ:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (8)$$

desempeñan en el espacio el mismo papel que la circunferencia y la hipérbola (1) en el plano.

En la figura 3, A es un punto exterior a Σ a distancia ρ de O. M es la proyección de A sobre XOY; ρ es mayor que R.

Los puntos imaginarios de $\bar{\Sigma}$, situados en la intersección Σ de con el plano Δ perpendicular a OA por A, están sobre una circunferencia imaginaria de radio (9) y centro A

$$i\sqrt{\rho^2-R^2} \quad ; \quad \rho>R \qquad (9)$$

Si llamamos $\vec{I}_r$, $\vec{I}_\theta$, $\vec{I}_\varphi$ a los vectores unitarios correspondientes a las coordenadas polares o esféricas (representados en la figura 3), se expresan con relación a los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ correspondientes a las coordenadas cartesianas, por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I_r} &= sen\theta\cos\varphi\vec{i} + sen\theta sen\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \\ \overrightarrow{I_\theta} &= \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta sen\varphi\vec{j} - sen\theta\vec{k} \\ \overrightarrow{I_\varphi} &= -sen\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \end{aligned} \tag{10}$$

$\overrightarrow{I_\varphi}$ es paralelo al plano XOY y perpendicular al plano AOMZ; $\overrightarrow{I_\theta}$ está en el plano AOMZ y es perpendicular a $\overrightarrow{I_r}$.

El punto A viene definido por

$$\overrightarrow{OA} = \rho\overrightarrow{I_r} \tag{11}$$

y un punto (B) de $\bar{\Sigma}$ situado en Δ está definido por:

$$\overrightarrow{O(B)} = \rho\overrightarrow{I_r} + i\sqrt{\rho^2 - R^2}\left(\cos\chi\overrightarrow{I_\theta} + sen\chi\overrightarrow{I_\varphi}\right) \tag{12}$$

donde χ es el ángulo que fija la posición de (B) en Δ.

De (12), habida cuenta de (10), se obtienen las ecuaciones paramétricas de $\bar{\Sigma}$, que son:

$$\begin{aligned} x &= \rho sen\theta\cos\varphi + i\sqrt{\rho^2 - R^2}\left(\cos\chi\cos\theta\cos\varphi + sen\chi\cos\varphi\right) \\ y &= \rho sen\theta sen\varphi + i\sqrt{\rho^2 - R^2}\left(\cos\chi\cos\theta sen\varphi + sen\chi\cos\varphi\right) \\ z &= \rho\cos\theta - i\sqrt{\rho^2 - R^2}\cos\chi\, sen\theta \end{aligned} \tag{13}$$

Los sumandos reales son las coordenadas de A y los imaginarios las coordenadas relativas de (B) respecto a A. De (12) es inmediato que (B) pertenece a $\bar{\Sigma}$, porque sus coordenadas satisfacen a (8). De (13) también se sigue la misma conclusión, pero después de cálculos bastante largos.

El hiperboloide generalizado del espacio euclídeo de cinco dimensiones, de ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \left(x_4^2 + x_5^2\right) = R^2 \tag{14}$$

tiene las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= R\, ch\alpha\, sen\theta\cos\varphi \\ x_2 &= R\, ch\alpha\, sen\theta\, sen\varphi \\ x_3 &= R\, ch\alpha\cos\theta \\ x_4 &= R\, sh\alpha\cos\chi \\ x_5 &= R\, sh\alpha\, sen\chi \end{aligned} \tag{15}$$

que implican las:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} &= \rho = R\, ch\alpha \\ \sqrt{x_4^2 + x_5^2} &= R\, sh\alpha = \sqrt{\rho^2 - R^2} \end{aligned} \tag{16}$$

Por el mismo razonamiento que en el caso del plano, se puede establecer una biyección entre $\bar{\Sigma}$ y el hiperboloide (14), siendo los puntos homólogos los que tienen los mismos valores de ρ, θ, φ, χ, con α dado por (16). Las coordenadas x_1, y_1, z_1 corresponden a las coordenadas de A, y las x_4, x_5, multiplicadas por i, a las coordenadas relativas de (B) respecto a A.

$\bar{\Sigma}$ es un continuo tetradimensional en el espacio euclídeo complejo de tres dimensiones, biyectivo del hiperboloide del espacio euclídeo real de cinco dimensiones (14).

Obsérvese que las coordenadas A y (B), (3) y (13) son las cartesianas, pero en la biyección de los hiperboloides (7) y (14) y de la circunferencia y la esfera completas, las coordenadas de A son también las cartesianas anteriores, pero las coordenadas relativas de (B) respecto a A, en el primer caso (figura 2) es la abscisa de (B) respecto a A sobre la recta A(B), y en el segundo caso son las cartesianas respecto a los ejes ortogonales que pasan por A en el plano Δ. El paso de unas a otras coordenadas de (B) en el primer caso es muy sencillo, pero en el segundo caso es bastante complicado, aunque factible, como hemos hecho partiendo de los dos últimos sumandos de (12), utilizando las (10) para llegar a las partes imaginarias de (13).

He generalizado esta teoría a n dimensiones. Si Σ es una hiperesfera de centro O y radio R, de ecuación:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots\ldots + x_n^2 = R^2 \tag{17}$$

llamo hiperesfera completa $\bar{\Sigma}$ a la figura formada por Σ y sus intersecciones con todos los hiperplanos exteriores a Σ; las ecuaciones son hiperesferas de $n-1$ dimensiones. $\bar{\Sigma}$ está formado por Σ y los infinitos hiperboloides de dos hojas, equiláteros de revolución, imaginarios, cuyos vértices reales son dos puntos diametralmente opuestos sobre Σ. Si tomamos ejes cartesianos, siendo OX_1 el que une los dos vértices, la ecuación de un hiperboloide cualquiera es:

$$x_1^2 - \left(x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2\right) = R^2 \qquad (18)$$

(17) y (18) desempeñan el mismo papel que las dos (1) en el caso del plano y que (8) y (17) en el caso de tres dimensiones.

Si A es un punto exterior a Σ, a una distancia ρ de O ($\rho > R$), los puntos de $\overline{\Sigma}$ situados en el hiperplano Δ perpendicular a OA por A, están sobre una hiperesfera de centro A y radio (9)

Llamamos $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ a las coordenadas cartesianas de A respecto a O, y $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\ldots, x_{2n-1}$ a las coordenadas de un punto cualquiera (B) situado sobre Δ y $\overline{\Sigma}$, relativas a A. Se puede establecer una biyección entre $\overline{\Sigma}$ y el hiperboloide generalizado del espacio euclídeo de $2n-1$ dimensiones, de ecuación:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots\ldots + y_n^2 - \left(y_{n+1}^2 + y_{n+2}^2 + \ldots\ldots + y_{2n-1}^2\right) = R^2 \quad (19)$$

siendo los puntos homólogos los

$$\begin{array}{l} x_j = y_j \quad , \quad j = 1,2,3,\ldots\ldots,n \quad ; \\ x_k = iy_k \, , \quad k = n+1,\, n+2, \ldots\ldots, 2n-1 \end{array} \qquad (21)$$

La hiperesfera completa $\overline{\Sigma}$ es un continuo $2n-2$ dimensional en el espacio euclídeo complejo de n dimensiones, biyectivo al hiperboloide (19) del espacio euclídeo real de $2n-1$ dimensiones.

Los cálculos para la obtención de las coordenadas de (B) respecto a O se pueden realizar como en el caso del plano y del espacio ordinario, tomando coordenadas polares en un espacio de $2n-1$ dimensiones, pero son largos y complicados.

Si en las fórmulas anteriores sustituimos R por iR, obtenemos las fórmulas relativas a la circunferencia, la esfera y las hiperesferas imaginarias completas (véase nota 2), en donde en la figura 7 se ha representado la circunferencia imaginaria completa.

Llamo circunferencias real e imaginaria coincidentes a las que tienen el mismo centro y el módulo del radio es igual.

Nota 2. La trigonometría de los triángulos imaginarios

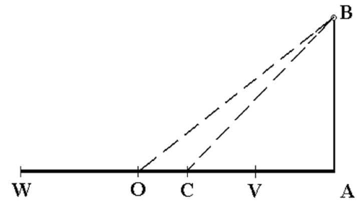

Figura 4

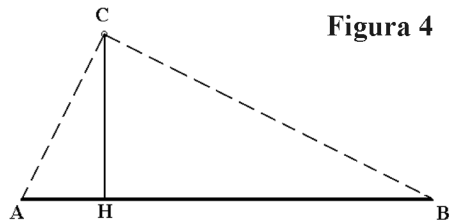

Figura 5

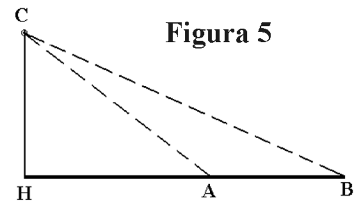

Figura 6

En la figura 4 los puntos O, V, A, (B), tienen la misma significación que en la figura 1. W es el otro extremo del diámetro OV; C es el polo respecto a la circunferencia Σ de la recta A(B).

El triángulo OA(B) (figura 4) es imaginario, los vértices O y A son reales y el (B) imaginario, el ángulo OA(B) es recto, el cateto OA es real, el A(B) su soporte es una recta real pero su longitud es imaginaria, la hipotenusa O(B) es imaginaria pero su longitud es real, porque por la nota 1 fórmula (2) vale R. Es:

$$OA = \rho > R \quad ; \quad A(B) = i\sqrt{\rho^2 - R^2} \quad ; \quad O(B) = R \qquad (1)$$

Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente hay que sustituirlas por nuevas funciones que designamos cosi, seni y tgi, que se expresan mediante funciones hiperbólicas:

$$\begin{array}{l} \cos\mathrm{i}\,(B)OA = \dfrac{OA}{O(B)} = \dfrac{\rho}{R} = Ch\alpha \\ sen\mathrm{i}\,(\mathrm{B})\mathrm{OA} = \dfrac{\mathrm{A}(\mathrm{B})}{\mathrm{O}(\mathrm{B})} = \dfrac{i\sqrt{\rho^2 - R^2}}{R} = i\; Sh\alpha \end{array} \qquad (2)$$

de las que se siguen, para un mismo ángulo:

$$\cos\mathrm{i}^2 + sen\mathrm{i}^2 = 1 \quad ; \quad \mathrm{tgi} = \frac{sen\mathrm{i}}{\cos\mathrm{i}} = i\, Th\alpha \qquad (3)$$

Al argumento α de las funciones hiperbólicas le llamaremos ángulo imaginario. Si $\rho < R$, A es interior a Σ, B y el triángulo son reales, cosi, seni y tgi coinciden con el coseno, el seno y la tangente.

De la figura 4 se deduce que

$$\begin{aligned} &\cos\mathrm{i}\,O(B)A = sen\mathrm{i}(B)OA \\ &sen\mathrm{i}O(B)A = \cos\mathrm{i}(B)OA \\ &\mathrm{tgi}\,O(B)A = \frac{1}{\mathrm{tgi}\,(B)OA} \end{aligned} \quad (4)$$

fórmulas análogas a las de los ángulos complementarios reales.

Se cumple el teorema de Pitágoras, pero no se cumplen las dos propiedades: "un lado es menor que la suma de los otros dos" y "la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos", debido a la existencia de ángulos y longitudes imaginarias. El cosi unas veces es un *Ch* y otras un *i Sh* y entonces el seni es un *i Sh* o un *Ch*.

El triángulo CA(B) (figura 4) también es imaginario y en él se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} &OC = \frac{R^2}{\rho} \quad ; \quad CA = \rho - \frac{R^2}{\rho} \quad ; \\ &C(B)^2 = CA^2 + A(B)^2 \Rightarrow C(B) = \frac{iR\sqrt{\rho^2 - R^2}}{\rho} \end{aligned} \quad (5)$$

la longitud de la hipotenusa es imaginaria a diferencia del caso anterior. Se tiene también que:

$$\begin{aligned} &sen\mathrm{i}(B)CA = \cos\mathrm{i}(B)OA \quad ; \\ &\cos\mathrm{i}(B)CA = -sen\mathrm{i}(B)OA \end{aligned} \quad (6)$$

Los dos triángulos imaginarios anteriores se distinguen en que la longitud de la hipotenusa es real en el primero e imaginaria en el segundo. Ambos son rectángulos y lo parecen, pero lo que es curioso es que el triángulo O(B)C que no lo parece, es rectángulo en (B). Este último tiene sus lados O(B) y C(B) imaginarios y se cumple en él el teorema de Pitágoras:

$$OC^2 = O(B)^2 + C(B)^2 \quad (7)$$

como se comprueba si en (7) se sustituyen los cuadrados por los valores antes obtenidos. Se tiene que:

$$\begin{aligned} &\cos\mathrm{i}OC(B) = -\cos\mathrm{i}(B)CA \quad ; \\ &sen\mathrm{i}OC(B) = sen\mathrm{i}(B)CA \end{aligned} \quad (8)$$

que son las mismas relaciones que existen entre el seno y el coseno de los ángulos suplementarios reales.

El triángulo W(B)V (figura 4) es un triángulo imaginario en el que el ángulo en (B) es recto, porque de los dos triángulos W(B)A y V(B)A se deduce que

$$\begin{aligned} &W(B)^2 = WA^2 + A(B)^2 = (\rho + R)^2 - (\rho^2 - R^2) \\ &V(B)^2 = (\rho - R)^2 - (\rho^2 - R^2) \\ &W(B)^2 + V(B)^2 = 4R^2 = WV^2 \end{aligned} \quad (9)$$

luego se cumple el teorema de Pitágoras y el ángulo en (B) es recto, lo que demuestra que la circunferencia completa es el lugar geométrico de los puntos reales e imaginarios desde los que se ve un diámetro bajo un ángulo recto.

Así se va desarrollando la trigonometría de los triángulos rectángulos imaginarios. Vamos a pasar ahora a triángulos imaginarios no rectángulos como los de las figuras 5 y 6.

El de la figura 5 es el triángulo imaginario formado por los centros A y B de dos circunferencias reales de radios R y R_1 que no se cortan, y el punto imaginario (C) intersección de ambas circunferencias. (C)H es el eje radical y llamaremos d a la distancia AB, α y β a los ángulos imaginarios A(C)H y H(C)B. Los dos triángulos A(C)H y H(C)B son como el OA(B) de la figura 1. Se tiene que

$$\begin{aligned} &AH^2 - R^2 = BH^2 - R_1^2 \quad ; \\ &H(C) = i\sqrt{AH^2 - R^2} \end{aligned} \quad (10)$$

la primera por pertenecer H al eje radical de las dos circunferencias y la segunda por la (1), o sea la aplicación del teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos imaginarios de la figura 5.

Llamaremos ρ y ρ_1 a AH y a HB; $\rho + \rho_1$. Por las propiedades del seno y el coseno hiperbólicos es:

$$\begin{aligned} &\cos\mathrm{i}(\alpha + \beta) = \cos\mathrm{i}\alpha\cos\mathrm{i}\beta - sen\mathrm{i}\alpha\; sen\mathrm{i}\beta \\ &sen\mathrm{i}(\alpha + \beta) = sen\mathrm{i}\alpha\cos\mathrm{i}\beta + \cos\mathrm{i}\alpha\; sen\mathrm{i}\beta \end{aligned} \quad (11)$$

y como:

$$\cos i\alpha = \frac{(C)H}{R};\ cosi\beta = \frac{(C)H}{R_1};$$
$$seni\alpha = \frac{\rho}{R};\ seni\beta = \frac{\rho_1}{R_1} \qquad (12)$$

de la primera (11) y (12) se sigue que

$$\cos i(\alpha+\beta) = \frac{(C)H^2}{RR_1} - \frac{\rho\rho_1}{RR_1} \qquad (13)$$

Multiplicando y dividiendo por 2 la (13) y por la aplicación del teorema de Pitágoras a los dos triángulos, se obtiene

$$\cos i(\alpha+\beta) = \frac{R^2-\rho^2+R_1^2-\rho_1^2-2\rho\rho_1}{2RR_1} = \frac{R^2+R_1^2-d^2}{2RR_1} \qquad (14)$$

De la segunda (11) y de (12) también se sigue que

$$seni(\alpha+\beta) = \frac{(C)H\rho}{RR_1} + \frac{(C)H\rho_1}{RR_1} = \frac{(C)Hd}{RR_1} \qquad (15)$$

Las (14) y (15) son análogas a las de los triángulos reales. Se extiende de esta manera la definición del ángulo $(\alpha+\beta)$ que forman dos circunferencias reales que no se cortan. También se cumple que

$$\frac{seni(C)AB}{R_1} = \frac{seni(C)BA}{R} = \frac{seni\,A(C)B}{d};$$
$$A(C)B = \alpha+\beta \qquad (16)$$

las dos primeras por sus propias definiciones en los dos triángulos rectángulos imaginarios de la figura 1. La tercera a partir de la (15) y de las definiciones de los dos primeros senis.

La figura 6 corresponde a dos circunferencias reales, cuando una es interior a la otra.

El ángulo imaginario que forman una circunferencia real Σ y una recta A(B) que no se cortan (figura 4) es el que forman la tangente imaginaria en (B) a Σ y la recta A(B), o lo que es lo mismo, el ángulo que forma el radio O(B) de Σ y el diámetro OA perpendicular a A(B); su cosi, por lo visto antes vale ρ/R (figura 4) que es Ch α. La recta O(B) vimos que era perpendicular a la C(B), por tanto esta última es la tangente imaginaria a Σ en (B), o sea una de las dos tangentes imaginarias a Σ que pasan por el punto real C interior a Σ.

La circunferencia completa $\bar{\Sigma}$ se puede definir también como la envolvente de las tangentes reales e imaginarias de Σ. Dijimos antes que C es el polo de A(B) respecto a Σ y se cumple también que O es el polo de A(B) respecto a Ω, la circunferencia imaginaria de centro C y radio C(B), y ambas Ω y Σ son ortogonales.

Si la recta CD es perpendicular a OC y D pertenece a Σ es

$$CD^2 = R^2 - OC^2 = R^2 - \frac{R^4}{\rho^2} \Rightarrow CD = \frac{R\sqrt{\rho^2-R^2}}{\rho} \qquad (17)$$

por tanto el punto imaginario (E) coincide con D y es tal que

$$C(E) = iCD = C(B) \qquad (18)$$

pertenece por tanto a Σ.

En el caso de una circunferencia imaginaria Ω (figura 7), su completa $\bar{\Omega}$ se obtiene sustituyendo R por *i*R en las ecuaciones anteriores y la hipérbola equilátera imaginaria de la figura 1 se sustituye por la figura 7. Ahora cualquiera que sea la posición de A sobre OX, el punto (B) es imaginario, porque es en la figura 7:

$$OA = \rho;\quad A(B) = i\sqrt{\rho^2+R^2};\quad O(B) = iR;$$
$$seni(B)OA = \frac{\sqrt{\rho^2+R^2}}{R} = Ch\alpha;\quad \cos i(B)OA = \frac{\rho}{iR} = \frac{Sh\alpha}{i} \qquad (19)$$

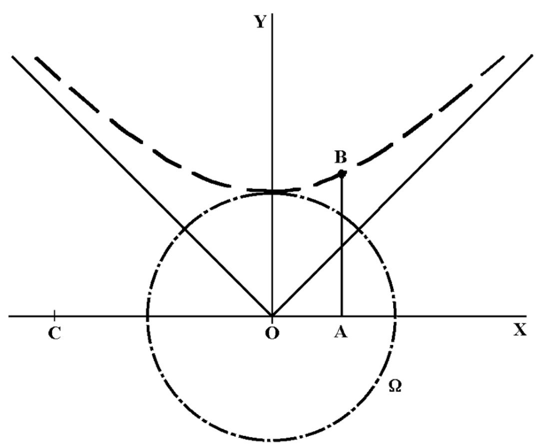

Figura 7

El punto C polo de A(B) respeto a Ω es el centro de una circunferencia real Σ ortogonal a Ω. La recta (B)C perpendicular a O(B) es la tangente imaginaria a Ω en (B). El punto O es el polo de A(B) respecto a Σ. Se cumplen las:

$$OC \cdot OA = -R^2; \quad CA = \rho + \frac{R^2}{\rho}; \qquad C(B)^2 = CA^2 + A(B)^2 \tag{20}$$

de la que se sigue que

$$C(B) = \frac{R}{\rho}\sqrt{\rho^2 + R^2} \tag{21}$$

también se cumple que

$$OC^2 = C(B)^2 + O(B)^2 \tag{22}$$

En la figura 4, a partir de la circunferencia real Σ de radio R y centro O se llega a la circunferencia imaginaria Ω de centro ρ. En la figura 7 a partir de la circunferencia imaginaria Ω de centro O se llega a la circunferencia real Σ de centro ρ. En las dos figuras Ω y Σ son ortogonales.

Obsérvese que dos rectas imaginarias pueden ser perpendiculares y una real y otra imaginaria nunca pueden serlo, por el contrario una circunferencia real y otra imaginaria pueden ser ortogonales, mientras que dos imaginarias nunca pueden serlo.

Se tiene que:

$$(14) = 0 \Leftrightarrow (15) = 1 \tag{23}$$

y sean reales o imaginarios los radios, (23) es la condición de ortogonalidad. Las (14) y (15) son válidas sean las circunferencias las dos reales, una real y la otra imaginaria, o las dos imaginarias y en este último caso no se cumple nunca que (14) valga cero.

El ángulo imaginario α es el argumento real del seno, coseno, tangente y cotangente hiperbólica que definen el seni, cosi y tgi del ángulo imaginario.

BIBLIOGRAFÍA

1. Bell, "Historia de las Matemáticas", Editorial Efe 1949
2. Bell, "Los grandes Matemáticos", Editorial Losada 1948
3. Bourbaki, "Elementos de Historia de las Matemáticas", Alianza Universidad 1976
4. Morris Kline, "El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días", Alianza Universidad, tres tomos 1992
5. Morris Kline, "Matemáticas, la pérdida de la certidumbre", Editorial Siglo Veintiuno 1985
6. Dieudonné, "En honor del espíritu humano. Las Matemáticas hoy" Alianza Universidad 1987
7. Dieudonné, "Panorama de las Matemáticas puras. La elección buorbakista", Editorial Reverté 1987
8. Devlin, "El lenguaje de las Matemáticas", Editorial Ma Non Troppo 1998
9. Gray, "El reto de Hilbert", Editorial Crítica (Drakontos) 2003
10. Y las publicaciones de la Real Academia en las que he colaborado: "Cincuentenario de la Mecánica Cuántica" 1975, "Centenario de Einstein" 1979, "Conferencias de Historia de las Matemáticas" siglos XVII, XVIII y XIX (dos tomos) y XX, 1988, 1992, 1994, 1998, "Historia de la Estadística" 1989, "2000, Año mundial de las Matemáticas" 2002

Y mis libros:

1. "Filosofía de las Matemáticas"
2. "Teoría de la Investigación Matemática"
3. "Didáctica y Dialéctica Matemáticas"

Editados por Dossat en 1961, 1966 y 1969;

4. y el editado en 1973 por la Editora Nacional titulado "Grandes Problemas de la Filosofía Científica"