Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 101, Nº. 1, pp 1-20, 2007
VII Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

LA ILUSTRACIÓN EN EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

MANUEL LÓPEZ PELLICER *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. E.T.S. Ingenieros Agrónomos. Apartado 22012. 46071 Valencia. mlopezpe@mat.upv.es

1. LA ILUSTRACIÓN

Hasta el comienzo del siglo XVIII la construcción científica se basó en el método geométrico de Euclides (¿325?–265 a.C.) y en la lógica y la metafísica de Aristóteles, pero se podía prever el final del método geométrico por:

- El "*Ensayo sobre el conocimiento humano*" (1660) de Locke (1632–1704),
- el formalismo de Leibniz[1] (1646–1716) con su deseo de superar la lógica de Aristóteles y encontrar un método seguro de razonamiento,
- el descubrimiento por Leibniz y por Newton (1643–1727) del Cálculo Infinitesimal buscando, el primero los elementos más pequeños que componen la naturaleza y el segundo una herramienta para investigar y escribir las leyes de la naturaleza, que no la utiliza en sus *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* escritos aún al *modo geométrico de Euclides* para hacerse entender en su época, dado el desconocimiento generalizado del nuevo Cálculo Infinitesimal,
- y la vida propia que adquiere el nuevo análisis matemático en el siglo XVIII.

El "*Ensayo sobre el conocimiento humano*" causó más impacto que los métodos infinitesimales, lo que provocó que el mismo Leibniz se ocupase del mismo en sus *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (escrito en 1707, con primera edición de 1765) y que David Hume (171–1776) desarrollase el aspecto psicológico del empirismo.

En cambio los métodos infinitesimales recibieron fuertes ataques. El obispo anglicano Berkeley criticó en 1734 a los matemáticos por su falta de rigor y severidad en la utilización de los métodos infinitesimales. En el polo opuesto a estas críticas están las eminentes respuestas de Maclaurin (escritas en 1737 y publicadas en 1742) para justificar y apoyar el método infinitesimal, señalando a Arquímedes como uno de sus remotos precursores.

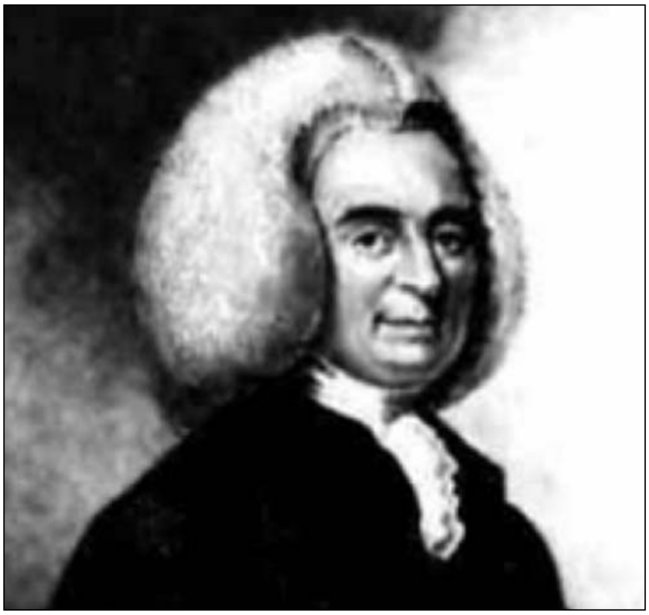

Figura 1. Maclaurin, 1698-1746.

[1] Leibniz de forma independiente también descubrió el Cálculo Infinitesimal, no para explicar el movimiento, como Newton, sino buscando entender la constitución de los cuerpos.

Pero el éxito de Newton al descubrir una Matemática utilizada en el entendimiento y descripción de los fenómenos naturales, estimuló nuevos desarrollos matemáticos y facilitó la difusión de la Ilustración, movimiento filosófico y social nacido en Inglaterra y desarrollado por filósofos y científicos franceses que realizaron una revisión crítica de las nociones fundamentales que afectan al hombre y a la ciencia, bajo la luz exclusiva de la razón, con fe inquebrantable en el progreso humano y con confianza ilimitada en que el trinomio **razón, símbolos algebraicos y métodos infinitesimales** es capaz de resolver cualquier problema analítico. Razón más experimentación, pero sobre todo razón, es lema del pensamiento ilustrado para la comprensión profunda del mundo.

El comienzo de la Ilustración en Francia se sitúa alrededor de 1695 en que P. Boyle (1647–1706) publica su famoso *Dictionaire historique et critique* (desde 1695). Maupertuis y Voltaire hacen que la mecánica de Newton, y con ella las ideas del empirismo inglés, sean discutidas en los salones y en otros círculos cultos. El éxito de la traducción de Diderot de un diccionario inglés de medicina promueve que Diderot y el matemático D'Alambert dirijan una nueva edición corregida de la *Cyclopaedia* de Chambers (desde 1728) que ofrece un resumen de todos los conocimientos y progresos. En esa gran *Enciclopedia* trabajaron los mejores especialistas franceses desde 1751 y fue la mejor exposición del pensamiento ilustrado, que llevó a final de siglo a la Revolución Francesa. ***La Enciclopedia pretende la descripción de todo en términos claros y de un modo inteligente.*** Rousseau, cuya novela educativa *Émile* (1762) tuvo un éxito enorme, figuró temporalmente entre los colaboradores de la Enciclopedia.

Muchos artículos matemáticos de la Enciclopedia se deben a D'Alambert y al marqués de Condorcet (1743–1794). Otros colaboradores fueron J.E. Montuela (1725–1799), que escribió una historia cuidadosamente elaborada de la cuadratura de la circunferencia (1754) y otra de la matemática en general (1758) y el jesuita Bossut, autor de una historia de la matemática en 1784 que amplió para la *Enciclopedia* en 1802 y 1810.

La libertad de pensamiento de la Ilustración hace que se soporten con repugnancia las medidas coercitivas del *antiguo régimen*, que entre guerras, frivolidades y despilfarros en la corte habían reducido el país a la miseria. Por ello se exige cada día más libertades para organizar la vida libre e independientemente. Por otra parte, la descripción de manera fácil de comprender de las investigaciones teóricas y experimentales llevaron a bastantes a posiciones materialistas con fe ciega en el progreso ilimitado, como se describe en la obra *Esquisse* (Bosquejo) del Marqués de Condorcet (1794).

El pensamiento ilustrado alemán se concentra en tres Universidades diferentes: Halle, Gotinga y en el Colegio Superior de Dessau.

En Halle trabajo Wolf, autor de un diccionario matemático en 1716 que influyó mucho en la enseñanza de la matemática en las Universidades de Alemania. Wolf, enamorado del método racional deductivo, defendió el principio de la libertad de investigación y de enseñanza. Por ello se hizo odioso a los partidarios de la docencia autoritaria, dominante hasta entonces en las Universidades alemanas, y se vio obligado a abandonar Halle en 1973. Fue acogido en la Universidad de Magburgo y, al subir al trono en 1740 Federico el Grande, fue llamado de nuevo a Halle, nombrado canciller de esa Universidad en 1743 y barón del Imperio en 1745. Wolf fue un excelente profesor de matemáticas, pero no un creador.

A la universidad de Gotinga se la dotó de una gran biblioteca que permitió a Segner publicar varios libros de introducción a la matemática entre 1747 y 1768, labor continuada por su sucesor, Kästner, con unos notables Elementos de Matemáticas (1753– 1766) y una Historia de la Matemática (1796–1800), obra poco equilibrada con los defectos propios de haberla escrito a edad avanzada.

En el Colegio Superior de Dessau, el *Philantropinum*, fundado y dirigido por Basedow (1774), se utilizaron ideas pedagógicas de Rousseau, enseñando los conceptos matemáticos intuitivamente para que los escolares comprendan su contenido y no aprendan sólo de memoria, método mejorado posteriormente por el pedagogo suizo Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827), que se le considera fundador de la pedagogía moderna de las matemáticas.

2. EULER (1707-1783): LA SITUACIÓN SOCIAL DE SU ÉPOCA

Hace cuatro mil millones de años un asteroide impactó con la Luna y produjo un enorme cráter de 1250 Km de diámetro. Quinientos millones de años después grandes coladas de lava habían rellenado ese cráter y destruido sus paredes, produciendo el *Mar de las Lluvias*. Sobre ese fondo de lava cayó un objeto celeste y produjo un cráter de poco más de 20 Km de diámetro, que se le llama el cráter de Euler y que no guarda proporción con las aportaciones de Euler al conocimiento matemático, pues ensanchó las fronteras del conocimiento matemático en todos sus campos durante el siglo XVIII, siendo la figura destacada de los matemáticos nacidos y muertos en ese siglo.

Junto a Arquímedes, Newton y Gauss, Leonhard Euler es por la calidad y cantidad de su obra uno de los matemáticos más brillantes anteriores al siglo XX. Si la clasificación la hiciésemos por la cantidad de artículos y libros, Euler ocuparía el primer lugar, pues produjo más de 800 libros y artículos y sus obras completas, que se han reeditado en parte con el nombre *Opera Omnia* y ocupan 73[2] volúmenes.

Figura 2. Euler, 1707-1783.

Figura 3. Arquímedes, 287-212 a.C.

Figura 4. Newton,1643-1727.

Figura 5. Gauss, 1777-1855.

[2] Un proyecto editorial que comenzó en 1911 y del que faltan por aparecer volúmenes de correspondencia científica y otros manuscritos. Se estima que la obra completa de Euler ocupará unos 86 volúmenes.

Sin embargo, la excelente valoración de Euler en el mundo matemático se debe más a la riqueza, originalidad, belleza y agudeza de su obra que a su volumen. Su genio es equiparable al de Shakespeare, Bach o Miguel Ángel, pero sigue siendo desconocido para el gran público, desconocedor de la historia de las matemáticas. Si se conociese cuántos de los resultados que utilizamos se deben a Euler se agigantaría su figura y se le situaría por el gran público en la cima de la historia de las matemáticas.

La obra de cualquier científico no depende exclusivamente de su genio personal, pues las circunstancias políticas, sociales y culturales determinan de forma concluyente su producción. Euler, aunque hubiese sido un matemático brillante en cualquier otra época, está marcado por haber vivido en el siglo XVIII, el *Siglo de las Luces*, marcado por dos movimientos continuos: *el de las tropas y el de las ideas.*

A lo largo del siglo los conflictos bélicos, enmascarados en guerras sucesorias, van a perfilar el mapa político futuro de Europa. Euler va a presenciar en primera fila el nacimiento de dos nuevas potencias europeas: Prusia y Rusia.

Euler nace en 1707 y Europa está en guerra. La pugna por la corona española entre Felipe de Anjou y el archiduque Carlos de Habsburgo desató una guerra europea que enfrentó a Francia y Castilla contra Austria, Inglaterra, Holanda, Prusia, Portugal y Saboya. El motivo sucesorio escondía en realidad el intento de las potencias europeas de acabar con la hegemonía francesa en Europa durante el reinado de Luis XIV, el rey Sol. La paz de Utrecht (1713) supuso la entrega de Gibraltar a Inglaterra, el reparto de las posesiones españolas en Europa y el dar al Elector de Brandeburgo el título de rey de Prusia, lo que supuso el nacimiento de una nueva potencia en la que Euler desarrollará su trabajo durante 25 años en la corte de Federico II.

En el extremo oriental de Europa, Pedro I acomete la tarea de modernizar el vasto imperio ruso. Una de sus medidas europeizantes fue la fundación de San Petersburgo, a orillas del Báltico, y la de su Academia en la que Euler trabajó la mitad de su vida. Estas dos nuevas potencias emergentes, además de repartirse Polonia, se van a disputar al genio.

Figura 6. Euler, 1707-1783.

Otra conflagración europea fue la Guerra de Sucesión de Austria (1740–1748), originada aparentemente por la sucesión al trono de Austria, pero generada realmente por la política de expansión de Federico II de Prusia con la anexión de Silesia. En mitad de esta contienda, Euler abandonó la fría Rusia para ocupar una plaza en la Academia de Berlín.

No será esta la última guerra europea de la que Euler será testigo. Una nueva contienda general, la Guerra de los Siete Años, enfrentó a Prusia e Inglaterra contra Francia, España, Rusia, Polonia y Suecia, redefiniendo el instable mapa político del viejo continente. El ejército ruso saqueó una finca propiedad de Euler. La corte rusa ordenó al general al mando de las tropas restituirle los daños causados, pagándole 4000 florines. El gran prestigio de Euler en toda Europa determinó esta indemnización.

El segundo movimiento, no de tropas sino de ideas, es la ya descrita *Ilustración*, desarrollada en Francia y que recorrió Europa desde el Atlántico hasta las orillas del Báltico, penetrando en todas la cortes europeas, incluso las que estaban en guerra con Francia.

Figura 7. Lambert, 1728-1777.

Federico II de Prusia y Catalina II de Rusia se rodearon de los filósofos, científicos, artistas, músicos y literatos más prestigiosos del continente.

Catalina II invitó a trabajar en San Petersburgo a Diderot, a los hermanos Jacob y Nicolaus Bernoulli, a Golbach y al propio d'Alambert, que rechazó la oferta. Federico II exigía hablar francés en su corte e invitó a Euler, Voltaire, Lambert y Maupertuis. También d'Alambert rechazó la invitación.

Figura 8. D'Alambert, 1717-1783.

3. LA OBRA MATEMÁTICA DE EULER

Leibniz murió en 1716, sólo y abandonado por todos, cuando Euler contaba nueve años. Newton fue enterrado en la abadía de Westminster, con honores regios y con la asistencia de Voltaire, once años después, justo cuando Daniel y Nicolás Bernoulli invitaron a Euler a sumarse a la aventura de la Academia de San Petersburgo. En ese momento Euler ya tenía prestigio internacional, pues había ganado dos premios de la Academia de Ciencias de París.

Figura 9. Euler, 1707-1783.

Pero no pensemos que el cálculo, diferencial e integral, estaba difundido por Europa al comienzo del siglo XVIII, pues las aportaciones de Newton, su cálculo de fluxiones, aparece brevemente en el apéndice *Tractatus de qudratura curvarum* de su *Óptica*, publicada en 1704. Sus ideas sobre desarrollos en series infinitas eran conocidas por alguno de sus muy pocos amigos personales y la obra en que aparecen sus resultados *De analysis per equtiones numero terminorum infinitas* vio la luz en 1711; su sistema de cálculo diferencial e integral está en

Methodus fluxionum et serierum infinitarum, publicado en 1727, después de su muerte.

Por otra parte, Leibniz presentó su cálculo diferencial e integral a través de artículos publicados en la revista *Acta Eruditorum*, que también recogió artículos sobre el mismo tema de Johann y Jacob Bernoulli. En 1684 aparece la primera parte del cálculo diferencial y en la década de los noventa Leibniz y los Bernoulli publicaron en esa revisa la solución de problemas famosos, como el de la catenaria, la braquistocrona, los isoperimétricos,… que van a demostrar la potencia de la nueva herramienta matemática.

El primer manual de cálculo diferencial con aplicaciones al estudio de curvas, *Analyse des infiniment petits*, lo publicó el Marqués de L´Hôpital en 1696, recopilando algunas lecciones de Johann Bernoulli, cuya publicación completa se hizo en 1742.

Todo lo anterior justifica que a principios del siglo XVIII muy pocos conocían la valiosa herramienta del cálculo y muchos menos se habían preocupado por validar sus fundamentos. Sólo algunos conocían su potencial para resolver problemas complejos de mecánica, astronomía, náutica o acústica. Las matemáticas, y sobre todo su último invento, el cálculo infinitesimal, se convertían así en una ciencia útil, lejos de las meras especulaciones estéticas. A lo largo del siglo XVIII, las matemáticas entraron en los salones de la Francia ilustrada y en las cortes europeas a través de las Academias de Ciencias. En ese ambiente poco importaba si los cimientos sobre los que se apoyaba el análisis eran sólidos y contaban con un rigor suficiente. Implícitamente se admitía su validez por su capacidad de resolver problemas prácticos hasta el momento irresolubles. Nadie cuestionaba la eficacia de las matemáticas: eran un arma de progreso lejos del rigor actual. Por ello no debe extrañarnos que el mismo Euler, matemático por excelencia de ese siglo, trabajase con expresiones del tipo:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+=0{,}66215...+\frac{1}{2}\ln\left(\infty\right) \qquad \frac{1-x^0}{0}=-\ln\ x$$

que las encontramos formalmente incorrectas, si bien Euler entendía que cuando n es muy grande y cuando t es un número positivo muy cercano a cero los valores:

Figura 10. Johann Bernoulli, 1667-1748.

$$\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}\ln n, \qquad \frac{1-x^t}{t}+\ln x$$

son muy próximos a 0,66215... y a 0. Al juzgar una obra nunca se debe olvidar la época en que se hizo y que el rigor matemático ha sido una variable dependiente del tiempo.

Euler tuvo la fortuna de introducirse desde su juventud en el círculo selecto de conocedores de la obra de Newton y Leibniz y de recibir lecciones del propio Johann Bernoulli, tal vez el mejor conocedor del cálculo de Leibniz en el continente. La vida de Euler no fue especialmente excitante, ya que Euler fue una persona completamente convencional, siempre amable y generosa. Careció de la aureola de algunos de sus más conocidos contemporáneos, como Washington (1732–1799), que condujo ejércitos a la victoria, Robespierre (1758–1794), que lideró una revolución política que le llevó a la muerte, o el capitán Cook (1728–1779), que cruzó mares para explorar continentes desconocidos. Euler sólo fue un gran aventurero intelectual a través del maravilloso paisaje matemático.

Leonhard Euler nació cerca de Basilea, en Suiza. Su padre, modesto pastor protestante, acariciaba la idea de que su hijo Leonhard le sucediese en el púlpito, a lo que parecía estar destinado Euler, dado que su madre también procedía de una familia de pastores. Fue un joven precoz, con un don especial para las lenguas, una memoria extraordinaria y una increíble capacidad de cálculo mental.

A los 14 años entró en la Universidad de Basilea, donde el profesor más famoso que tuvo fue Johann Bernoulli (1667–1748), hombre orgulloso y arrogante, tan rápido en despreciar el trabajo de los demás como en vanagloriarse del suyo propio, lo que tenía cierto fundamento pues en 1721 Johann Bernoulli podía proclamarse como el mejor matemático en activo, ya que Leibniz había muerto y el anciano Newton había dejado de trabajar en matemáticas hacia tiempo. Johann Bernoulli vivía en Basilea en el mismo momento en que Euler necesitaba un tutor.

Bernoulli no fue un profesor para Euler en el sentido moderno de la palabra, sino más bien un guía que le sugería lecturas matemáticas y estaba dispuesto a discutir con él aquellos puntos que parecían especialmente difíciles. Pronto Johann Bernoulli se dio cuenta de que su joven alumno era especial. Según transcurrieron los años y maduró la relación, fue Bernoulli el que pareció convertirse cada vez más en discípulo, por ello Bernoulli, hombre no dado a alabanzas, en una ocasión escribió a Euler:

"*Yo represento el análisis superior como si estuviera en su infancia, peor tú lo estás llevando a su estado adulto*".

La educación matemática de Euler no fue en Matemáticas. Se licenció en filosofía, siendo sus primeros escritos sobre la templanza y sobre la historia de la ley. Luego ingresó en la escuela de teología para convertirse en pastor. Pero su vocación eran las matemáticas. Años más tarde escribió:

"*Tuve que matricularme en la facultad de teología y dedicarme al estudio del griego y el hebreo, pero no progresé demasiado pues la mayor parte de mi tiempo lo dedicaba a los estudios matemáticos y, por suerte, las visitas de los sábados a Johann Bernoulli continuaron*".

Dejó el ministerio con el propósito de convertirse en matemático. Su progreso fue rápido y a los veinte años casi ganó un premio de la Academia de Ciencias de París en competición internacional por su análisis sobre el emplazamiento de los mástiles en un barco de guerra, presagio de lo que vendría más tarde. Su trabajo quedó en segundo lugar.

En 1725, Daniel Bernoulli (1700–1782), hijo de Johann, llegó a Rusia para ocupar una plaza de matemáticas en la nueva Academia de San Petersburgo y, al año siguiente, Euler recibió la invitación para acompañarle. La única plaza vacante en mecánica aplicada a la fisiología, que Euler aceptó por la escasez de plazas. Como no sabía nada de las artes médicas se puso a estudiar fisiología con su ca-racterística laboriosidad, tal vez desde un punto de vista más geométrico que clínico.

Cuando llegó a San Petersburgo en 1727, Euler supo que había sido asignado a Física en lugar de a Fisiología, cambio afortunado para él y para los que podría haber operado con su mentalidad de regla y compás. Durante sus primeros años en Rusia residió en casa de Daniel Bernoulli y ambos se involucraron en amplias discusiones sobre física y matemáticas, que anticiparon el curso de la ciencia europea en las siguientes décadas.

Figura 11. Jacob Bernoulli, 1654-1705.

En 1733 Daniel Bernoulli se trasladó a Suiza para ocupar un puesto académico. La marcha de su buen amigo produjo un vacío en la vida de Euler, pero dejó libre su plaza que pronto ocupó Euler.

Se casó con Katharina Gsell, hija de un pintor suizo que vivía en Rusia. En las cuatro décadas que duró el matrimonio tuvieron trece hijos, de los que sólo cinco alcanzaron la adolescencia y tan sólo tres sobrevivieron a sus padres.

En la Academia de San Petersburgo Euler dedicó mucho tiempo a la investigación, estando a disposición del estado ruso, que pagaba su salario. Preparaba mapas, asesoraba a la armada rusa y probó diseños de bombas contra incendios. Su fama crecía, siendo uno de sus primeros triunfos la resolución del llamado *problema de Basilea*, con el que los matemáticos llevaban luchando un siglo y que consistía en hallar el valor exacto de la serie infinita

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\ldots$$

Las aproximaciones numéricas habían revelado que la suma de esta serie era un valor cercano a $\frac{8}{5}$, pero la respuesta exacta se había resistido a Pietro Mengoli (1625–1686), que había planteado el problema en 1644 a Jacob Bernoulli (1654–1705), hermano de Johann y tío de Daniel, que lo expuso a la comunidad matemática en 1689. Bien entrado el siglo siguiente, el problema seguía sin resolverse. En 1735 demostró Euler que la suma era $\frac{\pi^2}{6}$, resultado nada intuitivo que dio aún más fama a su descubridor. No obstante, la mayor contribución de Euler en teoría de números es el inicio de la teoría analítica de los números primos, que inició con su notable identidad que relaciona los números primos con la serie de las potencias de los recíprocos de los números naturales. En una carta a Christian Goldbach reconoció, sin demostrarlo, la verdad de la conjetura de Goldbach de que *todo número par es la suma de dos números primos*, que es una proposición que aún espera una demostración.

Euler continuó sus investigaciones a ritmo vertiginoso, publicando sus artículos en la revista de la Academia de San Petersburgo, llegando a darse el caso que la mitad de los artículos de algunos números eran todos de Euler. En álgebra, por ejemplo, dio métodos originales de eliminación y de descomposición en fracciones simples y, en especial, se ocupó de la teoría de las ecuaciones. Leonhard Euler es la figura representativa del período algorítmico en el siglo de la Ilustración, también llamado *el siglo de la razón* por la total confianza puesta en el poder de la mente, que llevó a los matemáticos a creer que con los algoritmos algebraicos e infinitesimales e infinitesimales

- toda ecuación algebraica tendrá solución,
- toda ecuación diferencial podrá integrarse
- y que toda serie podrá sumarse.

A esta confianza, que en general resultó beneficiosa, agregó Euler una capacidad de cálculo pocas veces igualada y una fecundidad prodigiosa. Su espíritu ilustrado le llevó a buscar un método general para resolver ecuaciones de cualquier grado[3]. Halló un nuevo método para resolver ecuaciones de grado cuatro, incluido en un método general que le daba la solución de las ecuaciones de grados dos, tres y cuatro, pero nada más[4].

Tres problemas le ensombrecieron este fecundo primer período matemático ruso:

- La inestabilidad política rusa, que se extendió como un torbellino tras la muerte de Catalina I y uno de cuyos efectos fue la intolerancia y sospecha hacia los extranjeros, que, en palabras de Euler, hacía la situación “*bastante difícil*”.
- El que la Academia estuviese dirigida por el burócrata Joham Schunacher cuya mayor preocupación era “*la supresión del talento allí donde pudiera asomar inconvenientemente*”.
- La pérdida de la visión en su ojo derecho en 1738, atribuida a su intenso esfuerzo en cartografía, si bien parece que una severa infección

[3] Los ilustrados tenían confianza en el poder ilimitado de la razón para resolver cualquier problema, lo que es falso, pues hoy sabemos que es imposible encontrar un método general para resolver ecuaciones de grado cinco.

[4] Unos años más tarde, ya en Berlín, elaboró una nueva demostración del teorema fundamental del Álgebra.

que sufrió unos meses antes fue la causa de la ceguera del ojo derecho.

El impacto de la pérdida de visión sobre su dedicación a las matemáticas fue nulo. Euler siguió su programa de investigación y siguió escribiendo sobre construcción de buques, acústica y teoría de la armonía musical.

En ese siglo XVIII los campos que abarcaban las matemáticas eran mucho más amplios que en la actualidad. En el árbol de la ciencia representado en *L'Encyclopedie*, de la rama genérica de las matemáticas surgen otras ramas que hoy son materias autónomas. Los enciclopedistas dividían las matemáticas en dos ramas principales:

1. Matemáticas puras, que comprendían la aritmética y la geometría. La aritmética se dividía en aritmética numérica (teoría de números) y álgebra (álgebra elemental, álgebra infinitesimal y cálculo diferencial e integral). La geometría se dividía en geometría elemental, geometría trascendente (que englobaba la teoría de cuerpos), la táctica militar y la arquitectura militar.

2. Físico-matemáticas o matemáticas mixtas, que englobaba disciplinas como la mecánica, la estática, la hidrostática, la dinámica, la óptica, la neumática o la geometría astronómica.

No le faltaban pues a un matemático profesional del *Siglo de las luces* áreas donde desarrollar su trabajo. Por eso no debe extrañar que sólo el 58% de las obras de Euler sean de lo que hoy entendemos como matemáticas (teoría de números, y en particular teoría analítica de números, álgebra, análisis, geometría, teoría de grafos y la geometría diferencial). Además, escribió sobre mecánica, óptica y acústica (un 28% de su obra), sobre astronomía (un 11%), sobre náutica, arquitectura y artillería (un 2%) y sobre música y filosofía (un 1%). De los más de 73 volúmenes reeditados de su obra, que constituyen su *Opera Omnia*, sólo 29 constituyen la *Opera Matemática*.

En sus aportaciones en teoría de números, Euler contó con la ayuda de su amigo Christian Goldbach (1670–1764). En su respuesta a una carta de Philippe Naude (11684–1745) puso los cimientos a la teoría de las particiones. En este período escribió su libro *Mechanica*, que presentaba las leyes newtonianas del movimiento desde el punto de vista del cálculo, por lo que a esta obra se la considera una pieza clave en la historia de la Física.

La producción de Euler le produjo tal prestigio que Federico el Grande de Prusia (1712–1786) le ofreció un puesto en la revitalizada Academia de Berlín, lo que unido a la inestable situación política en Rusia, que Euler describió como "*un país en que cada persona que habla es colgada*", originó la aceptación de la oferta de Federico de Prusia. En 1741, Leonhard, Katharina y su familia se trasladaron a Alemania.

Vivió en Berlín un cuarto de siglo, que coincidió con la fase intermedia de su carrera matemática. En este período publicó dos de sus grandes obras: un texto de 1748 sobre funciones, *Introductio in analysin infinitorum* y un volumen de 1755 sobre cálculo diferencial, *Instituciones calculi differentialis*.

En su *Introductio*, Euler usa el concepto de función en la forma en que se mantuvo mucho tiempo: "*función de x es toda expresión analítica de una variable obtenida mediante combinación finita o infinita de símbolos algebraicos o trascendentes*". A veces también se refirió a la función como toda relación entre x e y que se represente en el plano mediante una curva trazada *a mano libre*, es decir una curva continua en su acepción intuitiva.

En conexión con las funciones trascendentes aparece una de las más notables contribuciones de Euler al Análisis: los logaritmos como exponentes y la relación de las potencia de base e con los números imaginarios y con las funciones circulares mediante la *identidad o fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$$

una de las fórmulas más bellas y útiles de la matemática que encierra todas las relaciones trigonométricas. El segundo tomo de la *Introductio* es un tratado de geometría plana y del espacio, cuya forma ha estado vigente hasta mediados del siglo XX.

Sus *Instituciones calculi differentialis*, libro escrito cuando estaba prácticamente ciego, consta de tres volúmenes, sobre los temas comunes del cálculo integral actual, la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, y nociones de cálculo de variaciones. Además se le incorporó un cuarto tomo póstumo con una selección de memorias.

Mientras estaba en Berlín, se le reclamó para dar clases de ciencia elemental a la princesa Anhalt Dessau. El resultado fue una obra expositiva que se publicó más tarde con el título *Cartas de Euler dirigidas a una princesa alemana sobre diferentes temas de filosofía natural*. Consta de unas doscientas cartas sobre la luz, el sonido, la gravedad, la lógica, el lenguaje, el magnetismo y la astronomía. A lo largo de la obra, Euler explica por qué hace frío en lo alto de una montaña de los trópicos, por qué la luna parece más grande cuando surge por el horizonte y por qué el cielo es azul. Asimismo, Euler expone su preocupación por uno de los problemas filosóficos mayores: *el problema del mal en el mundo,* en cartas dedicadas al origen del demonio y a la conversión de los pecadores. También dedicó cartas al entonces intrigante asunto de la "*electrización de los hombres y los animales*".

Escribiendo sobre la visión en una carta fechada en agosto de 1760. Euler empezaba con estas palabras: "*Estoy ahora en condiciones de explicar fenómenos de la visión, que indudablemente son una de las grandes operaciones de naturaleza que la mente humana puede contemplar*". Es sorprendente el patetismo de esta afirmación que venía de un autor parcialmente ciego y que pronto sería ciego totalmente. Pero Euler no era persona que dejase que sus infortunios personales interfirieran en su actitud hacia las maravillas de la naturaleza.

Las *Cartas a una princesa alemana* se convirtieron en un éxito internacional. El libro se tradujo a multitud de idiomas en Europa y en 1833 fue publicado en EEUU. En esta edición, el editor se deshizo en elogios a la capacidad expositiva de Euler, indicando que "*la satisfacción del lector es, en cada paso, proporcional a su progreso y cada adquisición sucesiva de conocimiento se convierte en una fuente de mayor satisfacción.* Este libro es uno de los mejores ejemplos de ciencia popular.

Desde Alemania continuó publicando continuamente en la revista de la Academia de San Petersburgo y recibiendo un estipendio regularmente. En la Academia de Berlín, además de sus investigaciones matemáticas, estaba profundamente involucrado en labores administrativas, pues aunque oficialmente no era el director de la Academia, desempeñaba ese puesto de manera informal, asumiendo responsabilidades que iban desde administrar los presupuestos hasta vigilar los invernaderos.

Pero, tal vez por un conflicto de personalidades, Federico el Grande había desarrollado un inexplicable desprecio hacia Euler, sin duda el académico más famoso de su corte. Federico se consideraba a sí mismo como un erudito y un intelectual irónico que gustaba de la filosofía, poesía y de cualquier cosa que fuese francesa. Por ello los asuntos de la Academia se trataban en francés y no en alemán. Federico II consideraba que Euler reducía su interés a ciertos temas científicos matemáticos, ignorando otros muchos y, en cruel referencia a su muy limitada vista, le llamaba "*mi cíclope ilustrado*".

Euler, en efecto, era diferente de los relucientes y sofisticados académicos de Berlín, pues era muy convencional en sus gustos, hogareño, muy trabajador y un protestante calvinista muy devoto, pues hasta que perdió la vista, reunía todas las noches a su familia para leerles y comentarles un capítulo de la Biblia. La teología era uno de sus estudios favoritos y las doctrinas en las que creía eran las más rígidas dentro del calvinismo.

Otro factor que empeoraba las cosas era la fría relación entre Euler y Voltaire, la otra estrella de la Academia. Voltaire disfrutó durante cierto tiempo de ciertas preferencias en el círculo de Federico el Grande: era famoso como autor y como escritor satírico, era tan sofisticado como el rey y era enteramente francés. El cáustico Voltaire describía a Euler como alguien que "*nunca aprendió filosofía, por lo que tenía que contentarse con la fama de ser el matemático que en un cierto tiempo ha llenado más hojas de papel con cálculos*".

Así, después de haber elevado la Academia de Berlín a una gloria matemática que jamás volvería a alcanzar, Euler tuvo que marcharse. Las cosas en Rusia habían mejorado durante su ausencia, particularmente con el acceso al trono de Catalina la Grande (1729–1796), y Euler estaba feliz con el regreso.

La Academia de San Petersburgo no debió dar crédito a su buena suerte cuando, en 1776, dio la bienvenida de nuevo al entonces mejor matemático del mundo. Esta vez, Euler se quedaría para siempre.

Aunque su vida científica continuó avanzando rápidamente, los siguientes años le iban a traer dos nuevas tragedias personales: La primera la pérdida casi completa del ojo bueno que le quedaba. Hacia 1771 estaba prácticamente ciego, y sólo podía leer lo escrito en caracteres muy grandes. La segunda desgracia le vino en 1773 con la muerte de Katharina.

Esta segunda desgracia unida a la ceguera pudo haber marcado el final de los años productivos de Euler. Pero Euler no era un hombre corriente y no sólo mantuvo su producción científica, sino que la incrementó. En 1775 escribió un promedio de un artículo matemático a la semana, lo cual tiene más mérito si se considera que eran otros los que le leían los artículos matemáticos y que tenía que dictar sus ideas.

Cuando se estaba quedando ciego escribió un tratado de Álgebra de 775 páginas, donde también explica el movimiento de la luna, y un enorme compendio en tres volúmenes que desarrollaba el cálculo integral, *Institutiones calculi integralis*. Su prodigiosa memoria y su excepcional capacidad de cálculo le fueron más útiles que nunca cuando sólo podía ver con los ojos de la mente. Podía recitar en latín la *Eneida* completa, y decir, sin utilizar lápiz ni papel, los 100 primeros números primos, sus cuadrados, cubos y hasta sus potencias sextas. Con la ayuda de sus hijos y de su colaborador Nikolaus Fuss publicó más de 300 trabajos durante su período de ceguera. Ha sido sin discusión el matemático más prolífico de la historia. Este hecho objetivo jamás ha sido discutido.

Su increíble obra se explica por su amor a la vida tranquila familiar, huyendo de los fastos de las cortes de San Petersburgo y de Berlín, por su inteligencia excepcional, por su memoria prodigiosa, por su dominio increíble de las técnicas algorítmicas y *por una disciplina de trabajo férrea*. Pero, además, el que durante sus años con ceguera, infortunios continuos y avanzada edad continuase con gran vigor y entusiasmo su trabajo es una auténtica lección para las generaciones venideras. El coraje, la determinación y el completo rechazo de Euler a ser vencido sirven, en el más propio sentido de la palabra, como motivación para matemáticos y no matemáticos. ***La historia de las matemáticas nos proporciona en Euler el genuino ejemplo del triunfo del espíritu humano.***

Tres años después de la muerte de su mujer se casó con la hermanastra de ésta, encontrando una compañera con la que compartir sus últimos años que se extendieron hasta el 18 de septiembre de 1783. Ese día pasó un rato con sus nietos y luego se puso a trabajar en cuestiones matemáticas relativas al vuelo de los globos, entonces tema de interés provocado por el reciente ascenso de los hermanos Montgolfier sobre el cielo de París en un globo propulsado por aire caliente, acontecimiento del que fue testigo Benjamín Franklin, diplomático de los recientemente independientes Estados Unidos.

Después de comer hizo algunos cálculos sobre la órbita del planeta Urano, cuya órbita parecía perturbada por la existencia de un planeta exterior. En efecto, en las décadas siguientes, la peculiar órbita del planeta, analizada a la luz de las ecuaciones que Euler había depurado, llevó a los astrónomos a buscar, y a descubrir, el todavía más distante planeta Neptuno. Si Euler hubiera tenido tiempo se hubiese dedicado al reto de buscar matemáticamente el nuevo planeta. Pero no iba a tener tal oportunidad. A media tarde de esa típica jornada atareada, tuvo una hemorragia masiva que le provocó la muerte en el acto. Sólo la muerte fue capaz de detener una mente que había pasado la vida calculando.

Llorado por su familia, por sus colegas y por la comunidad científica universal, Leonhard Euler fue enterrado en San Petersburgo. Dejó un legado matemático de proporciones épicas, que permitió a la Academia de San Petersburgo seguir publicando artículos suyos inéditos 48 años después de su muerte.

En su elogio fúnebre, el marqués de Condorcet señaló que "*cualquiera que se dedicase a las matemáticas en el futuro sería guiado y sostenido por el genio de Euler del que todos los matemáticos son sus discípulos*". Años más tarde Laplace diría "*Leed a Euler, leed a Euler. Él es el maestro de todos nosotros*". André Weil, uno de los mejores matemáticos del siglo XX, decía "*Durante toda su vida… parece haber llevado en la cabeza la totalidad de las*

Figura 12. El marqués de Condorcet, 1743-1794.

matemáticas de su época, tanto puras como aplicadas".

En la cripta de la catedral de San Pablo en Londres está la tumba de Christopher Wren, arquitecto de ese magnífico y hermoso edificio. La inscripción que figura sobre su lápida es uno de los epitafiios más famosos:

Lector, si monumentum requiris, circumspice
(*Visitante, si buscas su monumento conmemorativo, mira a tu alrededor*).

Creo que ese epitafio también vale para la tumba de Euler, si se le rodease de su obra.

4. MATEMÁTICOS CONTEMPORÁNEOS DE EULER

En el siglo de Euler el análisis matemático adquiere vida propia, se independiza de la geometría y de la ciencia natural y tiñe la matemática de carácter formal, aún no riguroso. En el siglo anterior, la geometría analítica y los métodos infinitesimales habían servido de instrumentos analíticos para la solución de problemas geométricos o para la investigación de leyes naturales. En el siglo XVIII, el análisis matemático, aún prosiguiendo esos fines, se estudia por sí mismo, y hasta la geometría y los fenómenos naturales llegan a servirle de pretextos para nuevos desarrollos analíticos. Por ello casi todos los contemporáneos de Euler se ocuparon preferentemente de análisis matemático.

El carácter puramente algorítmico de la matemática se enriquece a finales del siglo XVIII con la utilización de los métodos del análisis infinitesimal como instrumentos para la resolución de problemas geométricos o físicos, como se verá, por ejemplo, en la obra de Lagrange. Entonces la geometría y la física se impregnan del espíritu del análisis infinitesimal, que lleva a que la geometría adquiera el rango de geometría pura y la física se convierta en física matemática.

Una excepción a la tendencia generalizada hacia el análisis matemático en el siglo XVIII fue Alexis Claude Clairaut, que siendo aún adolescente se ocupó de las curvas en el espacio, y cuya obra más importante de 1743 se refiere a la forma de la Tierra, estableciendo

Figura 13. Clairaut, 1713-1765.

las condiciones matemáticas para el equilibrio de los fluidos y sentando los fundamentos de la futura teoría del potencial. Esta obra se basaba en otra de Maclaurin sobre elipsoides de revolución desarrollada con métodos exclusivamente geométricos, que indujeron a Clairaut a utilizar ese mismo recurso en las demostraciones. Maclaurin y Clairaut figuran entre los últimos matemáticos que resuelven los problemas mecánicos y astronómicos *con el método geométrico*.

Clairaut trabajó en *el problema de los tres cuerpos*, uno de los problemas más célebres de su época del que también se ocupó D'Alambert, redactor del discurso preliminar y de muchos artículos matemáticos y metodológicos de la *Encyclopédie* de 1751. Una contribución importante de D'Alambert fue la solución del problema de la cuerda vibrante, que desempeñó un papel notable en la futura revisión de los principios de análisis y del que, sin éxito, se habían ocupado muchos otros matemáticos de su época, en especial Daniel Bernoulli.

Otros matemáticos destacados que nacieron y murieron en el siglo XVIII fueron Edward Waring, Gabriel Cramer y Johann Heinrich Lambert. Al primero le debemos investigaciones en teoría de

Figura 14. Daniel Bernoulli, 1700-1782.

Figura 15. Lambert, 1728-1777.

números y ecuaciones algebraicas, pues obtuvo relaciones entre los coeficientes de una ecuación y la suma de las potencias de igual grado de sus raíces. Cramer también se ocupó del álgebra, pero para su utilización en el estudio de las curvas planas, donde descubrió la regla conocida con su nombre para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Finalmente, Lambert fue un sabio polifacético que se ocupó de diversas ramas del saber. En matemáticas resolvió problemas de perspectiva, de series, de simbolismo lógico siguiendo las ideas de Leibniz, de la teoría de las paralelas y del número π, demostrando que no es fraccionario.

La generación de Matemáticos siguiente a la de Euler es la de Lagrange. Vivieron la revolución francesa.

5. EL SIGLO DE ORO DE LA MATEMÁTICA FRANCESA

La preferencia por los métodos analíticos, característica de la matemática del siglo XVIII, se acentúa en Lagrange, creador de la "*mecánica racional*", que

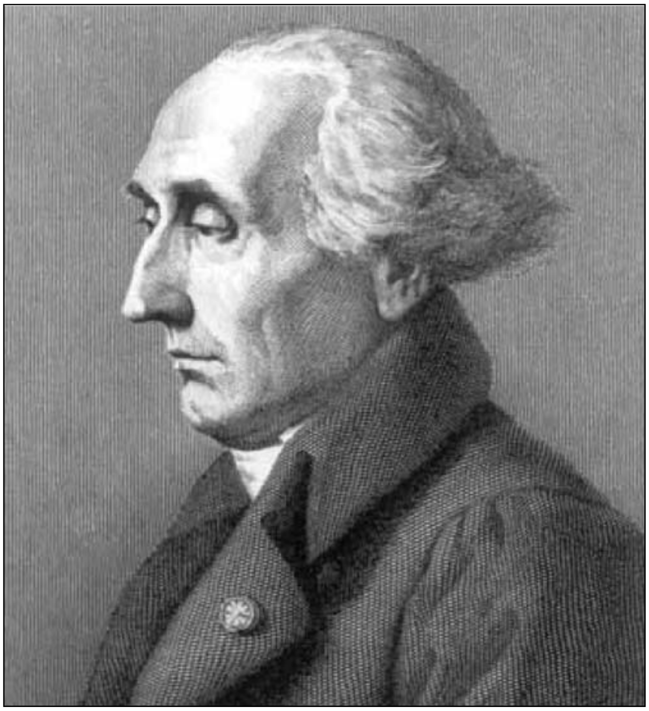

Figura 16. Lagrange, 1736-1813.

la concibe como una rama de la matemática y la llama "*mecánica analítica*".

Joseph Louis Lagrange era de origen francés, si bien nació en Italia. Desde los 30 años residió en Berlín y en París. Desde sus primeros escritos contribuyó a dotar a la matemática de la generalidad y carácter analítico que las caracteriza. En sus primeros trabajos, estando aún en Italia, ya sentó las bases del cálculo de variaciones, independizándolo de los problemas geométricos que le habían dado origen, como el problema de los isoperímetros y confiriéndole una mayor generalidad. Su genio creador destacó en casi todas las ramas de la matemática, destacando particularmente en análisis infinitesimal, teoría de números y teoría de ecuaciones, donde sus estudios son precursores de la teoría de grupos. Simultáneamente aplicó la matemática a los más variados problemas de mecánica, de astronomía y de probabilidades.

En 1797, estando Lagrange en París, se fundó l'École Polytechnique de la que fue profesor unos años. Como resultado de sus cursos, Lagrange publicó dos tratados, en 1797 y en 1801, en los que de una manera original, pero no rigurosa, expone *sus* principios del Análisis Infinitesimal, pretendiendo:

- Evitar los *infinitamente pequeños y los*
- *incrementos evanescentes*.
- Independizar el Análisis tanto de consideraciones geométricas, es decir de la influencia euclídea,
- como de consideraciones mecánicas, que era el punto de vista derivado de las fluxiones de Newton.

Para ello fundamenta el análisis de un modo algebraico partiendo de serie de Taylor, con cuyos coeficientes introduce las *derivadas*, nombre que también le debemos. A partir de las derivadas desarrolla de forma algebraica el Cálculo Diferencial. El Cálculo Integral lo considera inverso al de derivadas. Aunque su "*método de las derivadas*" no es riguroso, tiene el mérito de haber dado a la fórmula de Taylor la importancia central que tiene en Análisis. Su intento de eliminar infinitésimos y límites encontró opositores entre sus contemporáneos, cuyas objeciones pasaron inadvertidas hasta la época de Cauchy.

Figura 17. Laplace, 1743-1827.

Su obra maestra es la *Mécanique Analytique* de 1788, donde considera que la Mecánica es una *geometría de cuatro dimensiones*, siendo el tiempo la cuarta dimensión. Partiendo del principio de las velocidades virtuales y utilizando el cálculo de variaciones, Lagrange edifica toda la mecánica, introduciendo el concepto de potencial, el principio de acción mínima y las coordenadas generalizadas.

La obra de Pierre Simon Laplace en Astronomía fue comparable a la de Lagrange en Mecánica. En sus cinco volúmenes *Mecánica Celeste*, publicados entre 1799 y 1825, recogió todas sus aportaciones junto a las de Newton, Euler, Clairaut, D'Alambert y Lagrange sobre mecánica del sistema solar, expuestos de forma totalmente analítica, sin más datos de observación que los indispensables. Laplace expone la hipótesis de la nebulosa, que ya había sido publicada por Lagrange en un tratado de divulgación de 1796, que contenía un apéndice sobre historia de la Astronomía.

Siguiendo el mismo método, también debemos a Laplace la *Teoría analítica de las probabilidades*, que escribió alrededor de 1812. Volvió sobre esta cuestión en 1820 con su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, obra que carece de fórmulas matemáticas.

Laplace fue un matemático profundo, difícil de leer y con muchas contribuciones originales. Seguimos utilizando la *ecuación de Laplace*, que es una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales, que se le presentó en el estudio de la función potencial.

De méritos ponderables, aunque inferiores a los de Lagrange y Laplace fue su contemporáneo Adrién Marie Legendre, último de los grandes analistas del tipo de Euler y de Lagrange, que llegó a conocer a los nuevos analistas del siglo XIX Cauchy, Abel y Jacobi. Las contribuciones más importantes de Legendre fueron:

1. Un tratado de teoría de números de 1830 en que por primera vez aparece demostrada *la ley de reciprocidad*, que Euler había dado sin demostración y que Gauss la calificó como la "*joya de la aritmética*".
2. Las hoy llamadas "*integrales elípticas*" (1811) que permiten calcular la longitud de un arco de elipse. Más tarde, por inversión, las integrales elípticas dieron lugar a las "*funciones elípticas*". En una edición posterior de su obra, aparecida alrededor de 1830, añadió las investigaciones sobre funciones elípticas hechas por Abel y Jacobi.

Figura 18. Legendre, 1752-1833.

3. En 1794 publicó sus *Éléments de Géométrie*, obra de gran éxito adoptada como libro de texto en el continente europeo y en Estados Unidos. Al contrario de lo que ocurría en los *Elementos* de Euclides, expone primero los teoremas y luego vienen los problemas. La geometría en la obra de Legendre adquiere ya esa fisonomía entre algebraica y geométrica que caracteriza a nuestra geometría elemental. En un *Apéndice* trae, entre otras novedades, la prueba de la irracionalidad de los números π y e, añadiendo la observación profética de que *es probable que el número π no sea irracional algebraico, es decir que no sea raíz de una ecuación polinomio de coeficientes enteros.*

También se ocuparon de cuestiones de análisis y de geometría Mascheroni y Lacroix. Lorenzo Mascheroni escribió en 1797 una *Geometría del compás* donde

Figura 19. Mascheroni, 1743-1800.

prueba que todas las construcciones con regla y compás pueden realizarse sólo con compás, resultado que parece ser era ya conocido con anterioridad.

Se deben a Silvestre François Lacroix tres gruesos volúmenes publicados entre 1797 y 1800. En el primero, dedicado al cálculo diferencial y a sus aplicaciones geométricas, utiliza el método de Lagrange, pero no excluye el uso de infinitésimos; el segundo es sobre cálculo integral y cálculo de variaciones; y el tercero lo dedica a las diferencias finitas y a las series. Una de sus obras didácticas sobre cálculo diferencial e integral se tradujo al inglés en 1816 y en 1820 le agregó dos volúmenes de ejercicios. Esta obra supuso el fin de las fluxiones de Newton en Inglaterra y la adopción de la notación y de los métodos matemáticos continentales en el Reino Unido. Recordando las disputas sobre la paternidad del cálculo diferencial entre Newton y Leibnitz, esta adopción, en alguna manera, compensa a Leibniz de los ataques sufridos por Newton en la defensa de la primacía por el descubrimiento del Cálculo Diferencial e Integral. El término Geometría analítica se debe también a Lacroix.

6. EL RENACIMIENTO DE LA GEOMETRÍA

En la primera mitad del siglo XVIII la geometría no estaba de moda y para pasar por científico había que hacer ostentación de dominar el análisis matemático. Sin embargo, en la segunda mitad de siglo XVIII, la geometría vuelve por sus fueros, y aunque se la sigue estudiando con los recursos del análisis nacen nuevas

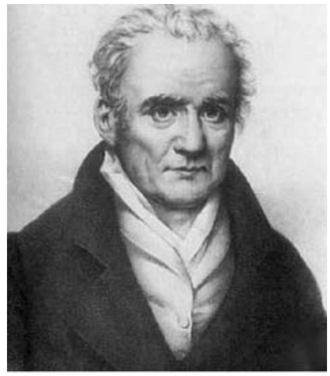

Figura 20. Monge, 1746-1818.

Figura 21. Carnot, 1796-1832.

Figura 22. Poncelet, 1788-1867.

ramas que no se pueden abordar sólo con análisis matemático.

Tal es el caso de la *Geometría Descriptiva* que nace con ese nombre en 1795, gracias a los esfuerzos de Gaspard Monge, y se la define como la rama de la geometría en la que se da unidad y jerarquía científica a los procedimientos surgidos hacia finales del siglo XV para proporcionar a pintores y arquitectos normas para la mejor realización de sus obras.

Se debe a Monge un método para representar curvas y superficies que lleva su nombre. Lo usual en la época de Monge era utilizar las figuras como pretextos para estudios y ejercicios analíticos. Pues bien, Monge, además de representar curvas y superficies utilizó los recursos del Análisis para estudiar nuevas propiedades geométricas de las figuras.

Monge fue un gran maestro, por lo que tuvo muchos discípulos. Entre ellos destacan Jean Baptiste Meusnier y Charles Dupin, que se ocuparon de la curvatura de superficies, Charles Brianchon que, sólo o con Poncelet, se ocupó de las propiedades de las cónicas, y Lazare Carnot que, además de sus actividades militares y civiles se ocupó activamente de la Matemática, publicando en 1797 el libro *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal*, donde ingenuamente defiende que si los conceptos infinitesimales, pese a sus imperfecciones, no conducen a resultados erróneos es debido a que los errores que se cometen con ellos se compensan y anulan.

Jean Víctor Poncelet se unió al grupo de Monge al regresar a Francia tras varios años de cautiverio en Rusia. En 1820 publicó un *Ensayo sobre las propiedades proyectivas de las secciones cónicas* que dos años después lo amplió con el título *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras.* En este libro aparece el principio de la dualidad que motivó una disputa por su paternidad entre Poncelet y Joseph Díaz Gergonne. El principio de Poncelet es un caso particular del de Gergonne, que advirtió su generalidad.

Gergonne tiene además el mérito de haber fundado en 1810 la primera revista periódica dedicada exclusivamente a matemáticas. La dirigió hasta su desaparición en 1832; entonces ya había sembrado semilla, siendo buena prueba el número actual de revistas dedicadas sólo a la publicación de artículos matemáticos.

7. LA FÍSICA MATEMÁTICA

Hemos visto que la segunda mitad del siglo XVIII la geometría toma nueva vida, fundamentalmente por el trabajo de Monge y sus discípulos. En ese mismo período el trabajo de Joseph Fourier da lugar al nacimiento de la Física Matemática, que siguiendo las huellas de Lagrange y Laplace estudia los problemas físicos mediante los recursos del análisis infinitesimal con el mínimo indispensable de hipótesis físicas.

La obra más importante de Fourier es una memoria de 1812 sobre *La teoría analítica del calor*, inicio de la utilización de las series trigonométricas, llamadas hoy *Series de Fourier*. Fourier, con matemática falta de rigor, obtuvo resultados que han sido el origen de importantes desarrollos matemáticos con aplicaciones en Física e Ingeniería. Su primer éxito fue la determinación de la temperatura en diferentes puntos de una placa conociendo la temperatura en el borde de la placa.

Otros científicos nacidos en el siglo XVIII que desarrollaron la Física Matemática fueron:

Thomas Young y Agustín Fresnel, que aplicaron el análisis matemático a la teoría ondulatoria de la luz.

Figura 23. Fourier, 1768-1830.

Figura 24. Poisson, 1781-1840.

Sus éxitos llevaron a imponer la teoría ondulatoria frente a la corpuscular.

André-Marie Ampère, célebre por sus investigaciones en el campo electromagnético.

Siméon Denis Poisson, que obtuvo nuevos resultados en series de Fourier y en descripción de campos; nos es muy familiar por su ecuación que seguimos utilizando.

George Green, que aplicó la función potencial, nombre debido al propio Green, en problemas distintos de los gravitatorios, como electricidad y magnetismo. También es el precursor del Teorema de Stokes, ya que su fórmula para el cálculo de integrales en un camino plano cerrado es la de Stokes en dos dimensiones.

Finalmente, a Gabriel Lamé le debemos contribuciones exclusivamente matemáticas y la aplicación del análisis matemático en la teoría del calor y de la elasticidad.

8. ALGUNOS LIBROS, MÁQUINAS Y ARTÍCULOS MATEMÁTICOS DEL SIGLO DE LA ILUSTRACIÓN

Los libros de matemática general más utilizados fueron los de Clausberg (1732), Bézout (1764/69 y 1770-1772), Lemoine (1790). También se utilizan las máquinas de calcular ideadas por Gersten (1735), Hahn (1774) y Müller (1783).

Respecto a Geometría en Inglaterra se sigue el método de Euclides, pero en lengua inglesa, con demostraciones modificadas y añadiendo explicaciones. El excelente libro de Simson (1756) tuvo un gran éxito. En Francia ya no se enseña siguiendo la tradición euclídea. Predomina la Introducción a la Geometría de Clairaut (1741) y desde 1794 se impone la Geometría de Legendre.

Antes del siglo XVIII la trigonometría sólo era una ciencia auxiliar, pero en este siglo de las Luces se convierte en disciplina matemática independiente. Aportaciones dignas de mención son la excelente trigonometría plana de Euler (1748) y su trigonometría esférica (1753), la reducción de la trigonometría esférica a la plana hecha por Lambert (1765) y Legendre (1787), el notable compendio de todos los conocimientos trigonométricos de Cagnoli (1786) y, finalmente, la gran aportación de Lagrange (1798 – 1799) reduciendo toda la trigonometría al teorema de los cosenos.

Los textos antes citados tienen partes algebraicas, pero también existen buenos textos dedicados al estudio del álgebra simbólica escritos por Saunderson (1740), Simpson (1745), Maclaurin (1748), Clairaut (1746), Condillac (1798) y Condorcet (1799). Una exposición muy interesante y amena es la obra *Introducción al álgebra* de Euler (1770) y tienen gran valor las ediciones posteriores a 1774 con comentarios de Lagrange, desde el punto de vista algorítmico.

Los progresos matemáticos conseguidos en el siglo XVIII se publican en escritos sueltos, con poca divulgación y diseminados en numerosas revistas, por ejemplo:

La descomposición en fracciones simples para integrar las funciones racionales la encontramos en Euler, *Acta academiae scientiarum petropolitanae (San Petersburgo*) 4, 1780.

La demostración de la regla de los signos de Descartes está en Lagrange, *Nouveaux mémoires de l'academie de Sciences. Berlin 1777.*

Problemas de eliminación aparecen en Euler *Histoire et mémoires de l'academie de Sciences de Berlin* 4, 20, 1748.

La regla de Cramer de resolución de sistemas de ecuaciones lineales por medio de determinantes está en Bézout, *Histoire et mémoires de l'academie de Sciences de Paris* 1764 y 1779; en Vandermonde, *Histoire et mémoires de l'ac. sc. de París* 1772; y en Laplace, *Nouveaux mémoires de l'academie de Sciences. Berlin* 1773.

La posibilidad de poder representar las soluciones de las ecuaciones polinómicas en formas compleja hizo suponer a Euler (*Miscellanea Berolinensia* 7, 1743) que todas las ecuaciones de coeficientes reales pueden descomponerse en factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

D'Alambert (*Histoire et mémoires de l'academie de Sciences de Berlin* 2, 1746) trata de demostrar el problema fundamental del álgebra, demostración que Gauss discute (1799) y completa decisivamente.

La resolución de ecuaciones de grado mayor que 2 se encuentra en Euler, *Commentarii Academiae Petropolitanae* 6, 1732, 1733 y siguientes, donde se expone la solución de las ecuaciones de grados tercero y cuarto; en Bézout, *Histoire et mémoires de l'academie de Sciences de París* 1762; en Lagrange, *Nouveaux mémoires de l'academie de Sciences Berlin* 1770-1771; en Vandermonde, *Histoire et mémoires de l'academie de Sciences de París* 1771; y en Malfatti, *Atti Ac. Siena*, 1771, donde a partir de la resolución de ciertas ecuaciones polinómicas de quinto grado se descubre la resolvente de la ecuación polinómica de grado sexto.

Tipos de ecuaciones que pueden resolverse por radicales aparecen en Bézout, *Histoire et mémoires de l'academie de Sciences de París* 1762, 1765 y en Euler en 1776 – 1788.

Problemas relativos a la división de la circunferencia se encuentran en Euler, *Commentarii Academiae Petropolitanae* 13, 1741 – 1745 y en Vandermonde, *Histoire et mémoires de l'academie de Sciences de París* 1771. Estos resultados fueron el punto de partida para que Gauss resolviese con regla y compás la construcción de un polígono regular de 17 lados (1796).

El mejor compendio sobre la resolubilidad de ecuaciones polinómicas se encuentra en Lagrange, *Nouveaux mémoires de l'academie de Sciences Berlin*, 1770-1771, quien duda de que puedan resolverse algorítmicamente la ecuaciones de orden superior, introduce distintos las funciones semisimétricas y abre el camino a los trabajos de Ruffini (1799, intento de demostrar la irresolubilidad de las ecuaciones de grado quinto), de Abel (1824, artículo del Crelles Journal. 1, 1826) y de Galois, quien trabajando alrededor del problema de la irresolubilidad elabora desde 1829 las ideas principales sobre la teoría de conjuntos.

Las fórmulas de Newton para calcular las sumas de las potencias s_k de las soluciones de ecuaciones polinómicas (primera impresión hecha en 1707 para k menor que el grado n de la ecuación) son utilizadas por Euler en *Commentarii Academiae Petropolitanae* 7, 1734 – 1735, para probar que

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

suma que se deseaba calcular desde hacía 80 años. Las fórmulas de Newton son demostradas por Bärmann (1745) y Kästner (1757), e impresas en *Dissertationes Mathematics physisc, Soc. sc. Göttingen* (1771). Las fórmulas para $k \geq n$ son obtenidas y demostradas por Euler (1747; impresión *Opusc.* II, 1750).

BIBLIOGRAFÍA

1. Bailhache, P. (1995) Deux mathématiciens musiciens: Euler et d'Alembert. *Physis Riv. Internaz. Storia Sci. (N.S.)* **32** (1), 1-35.
2. Borgato, M.T. & Pepe, L. (1987) Lagrange in Turin (1750-1759) and his unpublished lectures at the Royal School of Artillery. *Boll. Storia Sci. Mat.* **7** (2), 3-43.
3. Borgato, M.T. & Pepe, L. (1988) An unpublished memoir of Lagrange on the theory of parallels. *Boll. Storia Sci. Mat.* **8** (2), 307-335.
4. Borgato, M.T. & Pepe, L. (1989) The family letters of Joseph-Louis Lagrange. *Boll. Storia Sci. Mat.* **9** (2), 192-318.
5. Bourbaki, N. (1976) *Elementos de la Historia de las Matemáticas*. Ed.: Alianza Universidad.
6. Boyer, C. B. (1986) *Historia de la Matemática*. Ed.: Alianza Editorial S.A..
7. Calinger, R. (1996) Leonhard Euler: The first St Petersburg years (1727-1741). *Historia Mathematica* **23**, 121-166.
8. Cassirer, E. (1993) *La Filosofía de la Ilustración*.

Ed.: Fondo de Cultura Económica de España.

9. Chobanov, G. & Chobanov, I. (1988) Lagrange or Euler? III. The future. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* **82** (2), 63-109.

10. Comte, C. (1989) Joseph-Louis Lagrange poète scientifique et citoyen europeen. *La Recherche* **208**, 394-396.

11. Costabel, P. (1989) Lagrange et l'art analytique, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série génerale, La vie des sciences*, 167-177.

12. Delsedime, P. (1971) La disputa delle corde vibranti ed una lettera inedita di Lagrange a Daniel Bernoulli. *Physis - Riv. Internaz. Storia Sci.* **13** (2), 117-146.

13. Dunham, W. (2000) *Euler el maestro de todos los matemáticos*. Ed.: Nivela (Madrid).

14. Edwards, H.M. (1983) Euler and quadratic reciprocity. *Math. Mag.* **56** (5), 285-291.

15. Erdös, P. & Dudley, U. (1983) Some remarks and problems in number theory related to the work of Euler. *Math. Mag.* **56** (5), 292-298.

16. Fraser, C.G. (1985) J. L. Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations. *Arch. Hist. Exact Sci.* **32** (2), 151-191.

17. Fraser, C.G. (1987) Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus. *Historia Math.* **14** (1), 38-53.

18. Fraser, C.G. (1990) Lagrange's analytical mathematics, its Cartesian origins and reception in Comte's positive philosophy. *Stud. Hist. Philos. Sci.* **21** (2), 243-256.

19. Fraser, C.G. (1992) Isoperimetric problems in the variational calculus of Euler and Lagrange. *Historia Math.* **19** (1), 4-23.

20. Fraser, C.G. (1994) The origins of Euler's variational calculus. *Arch. Hist. Exact Sci.* **47** (2), 103-141.

21. Frisinger, H. H. (1981) The solution of a famous two-centuries-old problem: The Leonhard Euler Latin square conjecture. *Historia Math.* **8** (1), 56-60.

22. Gaukroger, S. (1982) The metaphysics of impenetrability: Euler's conception of force. *British J. Hist. Sci.* **15** (50), 132-154.

23. Hamburg, R.R. (1976/77) The theory of equations in the 18th century: The work of Joseph Lagrange. *Arch. History Exact Sci.* **16** (1), 17-36.

24. Hazard, P. (1991) *El pensamiento europeo en el siglo XVIII*. Ed.: Alianza Editorial.

25. Hirano, Y. (1995) Quelques remarques sur les travaux de Lagrange qui concernent la théorie des équations algébriques et la notion préliminaire de groupes. *Historia Sci.* (2) **5** (1), 75-84.

26. Julia, G. (1942-1950) La vie et l'oeuvre de J.-L. Lagrange. *Enseignement Math.* **39**, 9-21.

27. Le Lionnais, F. (1962) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Ed.: Eudeba.

28. Lützen, J. (1983) Euler's vision of a general partial differential calculus for a generalized kind of function. *Math. Mag.* **56** (5), 299-306.

29. Munck, T. (2001) *Historia social de la Ilustración*. Ed.: Editorial Crítica.

30. Panza, M. (1991) The analytical foundation of mechanics of discrete systems in Lagrange's 'Théorie des fonctions analytiques', compared with Lagrange's earlier treatments of this topic I. *Historia Sci.* (2) **1** (2), 87-132.

31. Panza, M. (1992) The analytical foundation of mechanics of discrete systems in Lagrange's 'Théorie des fonctions analytiques', compared with Lagrange's earlier treatments of this topic II. *Historia Sci.* (2) **1** (3), 181-212.

32. Sachs, H., Stiebitz, M. & Wilson R.J. (1988) An historical note: Euler's Königsberg letters. *J. Graph Theory* **12** (1), 133-139.

33. Shields, A.L. (1988) Lagrange and the 'Mecanique analytique'. *The Mathematical intelligencer* **10** (4), 7-10.

34. Szebehely, V. (1992) Lagrange and the three-body problem, La 'Mécanique analytique' de Lagrange et son héritage, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **126**, suppl. 2, 201-213.

35. Taton, R. (1992) Lagrange et la Révolution française (juillet 1789 - novembre 1795), La 'Mécanique analytique' de Lagrange et son héritage. *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **126**, suppl. 2, 215-255.

36. Taton, R. (1988) Sur quelques pièces de la correspondance de Lagrange pour les années 1756-1758. *Boll. Storia Sci. Mat.* **8** (1), 3-19.

37. Taton, R. (1974) Inventaire chronologique de l'oeuvre de Lagrange. *Rev. Hist. Sci.* **27**, 3-36.

38. Valjavec, F. (1964), *Historia de la Ilustración en Occidente*. Ed.: Ediciones Rialp.

39. van Maanen, J.A. (1983/84) Leonhard Euler (1707-1783): man, worker, migrant, genius. *Nieuw Tijdschr. Wisk.* **71** (1) 1-11.

40. von Wiese, B. (1979), *La cultura de la Ilustración*. Ed.: Centro de Estudios Políticos y Constitucionales.

41. Weil, A. (1984) Euler. *Amer. Math. Monthly* **91** (9), 537-542.