Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 101, Nº. 2, pp 259-283, 2007
VIII Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

EL ESPACIO Y EL TIEMPO EN LAS MATEMÁTICAS Y EN LA FÍSICA

Dario Maravall Casesnoves *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22. 28004 Madrid.

Esta conferencia es un breve resumen de la historia de la evolución de los conceptos de espacio y tiempo, desde los comienzos de la Ciencia hasta nuestros días.

El final de esta historia es que el espacio y el tiempo pierden su independencia y se funden en un solo ente que es el espacio-tiempo.

Nuestras ideas sobre el espacio y el tiempo han experimentado un cambio radical y revolucionario con el nacimiento de la Teoría de la Relatividad de Einstein a principios del siglo XX. Las nuevas ideas están deshumanizadas y alejadas de nuestras sensaciones, están impregnadas de un tinte surrealista y se vuelven más difíciles. Es preciso recurrir a una modificación de la palabra entender para que nos resulten más inteligibles.

El espacio y el tiempo clásicos son más parecidos a lo que nos sugiere la percepción sensible, responden al viejo esquema del espacio caja, como contenedor de la materia, en cuyo seno se mueve, y del hombre que vive en él.

El tiempo clásico responde al esquema del tiempo río, que fluye siempre en el mismo sentido, sin retroceder nunca, durante su transcurso se desenvuelve el movimiento de la materia, y la vida del hombre.

El espacio clásico es homogéneo, continuo, indefinidamente divisible, físicamente inactivo, independiente del tiempo y de la materia; tiene tres dimensiones. El hecho de suponerlo infinito dio origen en el siglo XIX a la paradoja de Olbers según la cual no puede existir la noche. La solución de esta paradoja la dio el universo finito y curvo de Einstein.

Al espacio clásico se le llama euclídeo porque se le puede aplicar la geometría de Euclides; que hasta el siglo XIX se creyó que era la única posible. Dos cualidades muy importantes de este espacio es que puede expandirse y contraerse sin cambiar de forma ni salirse del mismo, cosa que no le sucede, por ejemplo, a una superficie esférica. La otra cualidad es su isotopía, que consiste en que el espacio es visto de la misma manera cualquiera que sea la posición del observador en el espacio.

El tiempo clásico es homogéneo, uniforme, continuo e indefinidamente divisible, independiente del espacio, de la materia y del movimiento, tiene una dimensión. A diferencia del espacio, está orientado, tiene flecha, siempre avanza desde el pasado hasta el futuro pasando por el presente, que siempre es un instante fugaz; nunca retrocede.

Antes de que naciera la Teoría de la Relatividad, desde que se descubrió la radiactividad, apareció un tiempo microscópico aleatorio, que es el intervalo de tiempo entre las desintegraciones de dos átomos radiactivos. Pero macroscópicamente reaparece la certidumbre del tiempo, debido a un proceso matemático llamado convergencia en probabilidad, y así la desintegración de la mitad de un cuerpo radiactivo, no tarda un intervalo de tiempo aleatorio sino cierto, o más exactamente es la suma de un tiempo cierto y de un tiempo aleatorio infinitesimal, prácticamente igual a cero.

En mi libro A (véase bibliografía) dedico un capítulo a la teoría de los procesos estocásticos de la radiactividad en donde se exponen algunos resultados que he obtenido en esta materia, en espacial en el caso de mezcla de cuerpos radiactivos y de la desintegración de una serie radiactiva. Allí exponemos y comparamos las teorías probabilista y determinista. Explicamos los procesos estocásticos con condiciones iniciales aleatorias, mucho más complejos que aquellos en los que las condiciones iniciales son ciertas. También exponemos los resultados que obtuve de que la diferencia entre el tiempo que tarda en desintegrarse un número infinito de átomos radiactivos y su valor medio (ambos infinitos) es una forma indeterminada $\infty - \infty$, cuyo valor verdadero es una variable aleatoria finita, que calculamos. Demostramos que los valores medios en el cálculo probabilística son iguales a los valores obtenidos en el tratamiento determinista.

A lo largo de la Historia se han producido revoluciones culturales y científicas, y crisis de la Ciencia. Una crisis científica consiste en la ruptura de unos esquemas conceptuales (paradigmas) que durante periodos bastante largos de tiempo son universalmente aceptados y sirven durante este tiempo para la adquisición de nuevos conocimientos y la resolución de los problemas. La ruptura se produce cuando el resultado de un descubrimiento científico o de un experimento está en contradicción con los esquemas conceptuales vigentes, y es entonces cuando la Ciencia en cuestión entra en crisis. La salida de la crisis se produce cuando se establecen nuevos esquemas conceptuales, que sustituyen a los antiguos y que están de acuerdo tanto con los conocimientos científicos antiguos como con los nuevos, entonces se dice que se ha producido y resuelto una crisis científica. También creo que se puede considerar la revolución científica como la acción acumulativa de cambios en la cantidad de conocimientos científicos que llegan a producir un cambio en la calidad del conocimiento, de acuerdo con la tercera ley dialéctica de los saltos. Esta ley más que al materialismo dialéctico de Marx, corresponde a su continuación con la doctrina llamada marxismo leninismo.

Una revolución científica no es exactamente lo mismo que una revolución cultural, pero tiene muchos puntos de contacto. Seguramente la primera revolución cultural tuvo lugar en el neolítico, unos 4000 años a.d.C., cuando el hombre se transforma de cazador y pescador en agricultor y ganadero, y consiguió así su dominio sobre el hábitat en que vivía. Otra revolución cultural importante tuvo lugar en Mileto en el siglo VII a.d.C., cuando comienzan las Matemáticas y la Filosofía griegas con Tales. Los griegos han influido sobre nuestra Ciencia, principalmente con su Filosofía y su Geometría. Las doctrinas filosóficas que mas han influido sobre nosotros son las de Platón (427-347), Aristóteles (384-322), los atomistas (Leucipo, Demócrito y Epicuro) y los pitagóricos. Tres grandes legados científicos nos han dejado los griegos, uno falso y otros dos verdaderos, que han durado siglos y que son: La Física y la Lógica de Aristóteles y la Geometría de Euclides. La lógica aristotélica, que sigue siendo verdadera, ha reinado casi sin rival hasta la segunda mitad del siglo XIX, en que comienza el desarrollo de la lógica matemática, que origina en el siglo XX el gran florecimiento de las lógicas no aristotélicas. La geometría de Euclides (siglo III a.d.C.), sigue siendo verdadera, y reinando sin rival hasta comienzos del siglo XIX, en que surge la primera geometría no euclídea con Bolyai (1802-1860) y Lobatschewski (1792-1856), y a partir de ahí se sigue con la geometría no euclídea de Riemann (1826-1866) en la segunda mitad del siglo XIX, y el espectacular desarrollo de las geometrías no euclídeas del siglo XX.

La Física aristotélica es falsa y dura hasta el siglo XVII en que Galileo pone fin a su reinado, porque con él llega el final de la Física aristotélica y el comienzo de una nueva Física, que consolidará Newton, y dura hasta el siglo XX en que la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica ponen fin a la Física clásica iniciada por Galileo y Newton, y dan comienzo a una nueva Física. No obstante, así como la Física aristotélica es falsa, la Física clásica sigue siendo verdadera en un ámbito de aplicación muy grande, y solamente una parte de los fenómenos físicos (muy importantes y vada vez en mayor número) escapan a su control y tienen que ser estudiados y resueltos por los métodos de la Mecánica cuántica y de la Teoría de la Relatividad. En la segunda mitad del siglo XX nacen la Electrodinámica y la Cromodinámica Cuántica, prolongación de la Mecánica Cuántica, que entre otras cosas explican las dos nuevas fuerzas o interacciones débil y fuerte que se añaden a las dos únicas conocidas hasta entonces que eran la gravitatoria y la electromagnética. Surge también en nuestros días la Física de las partículas elementales y la moderna Cosmología, para el estudio de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande.

Entre Tales y Euclides transcurren unos cuatro siglos y entre ellos viven importantes matemáticos griegos que fueron incrementando el volumen del saber geométrico. entre ellos descuella como un gigante Pitágoras que se cree que vivió entre los años 570 y 480 a.d.C. Pitágoras descubrió el teorema que lleva su nombre de que “el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos”, que es de una gran importancia. Muchos siglos después, con el descubrimiento del cálculo diferencial, los geómetras lo extendieron a los triángulos infinitesimales, lo que les permitió calcular la distancia entre dos puntos infinitamente próximos del espacio en cualquier sistema de coordenadas o de una superficie, es el o diferencial de las distancias. El es la base de la geometría diferencial euclídea y de los espacios riemannianos y no riemannianos modernos. He extendido el teorema de Pitágoras a los triángulos imaginarios, lo que me ha permitido desarrollar una trigonometría de los mismos (véase notas); en ellos se da la particularidad de que la hipotenusa (imaginaria) sea menor que un cateto real. También en I, K y P (bibliografía) he mostrado la necesidad de modificar el teorema de Pitágoras en las geometrías no euclídeas (elíptica e hiperbólica) en uno de sus modelos geométricos.

Los griegos llamaban segmentos conmensurables a los segmentos de longitudes a y b, tales que existen dos números enteros m y n para los que $na=mb$ y llamaban a m/n el cociente a/b. Al principio creyeron que todo par de segmentos eran conmensurables, pero como consecuencia del teorema de Pitágoras se dieron cuenta de que existían pares de segmentos que no tenían esa propiedad y a estos segmentos les llamaron inconmensurables. Aplicando el teorema de Pitágoras obtuvieron que la diagonal del cuadrado es igual al lado multiplicado por $\sqrt{2}$. Su demostración de que $\sqrt{2}$ no es igual al cociente de dos enteros es la que se utiliza hoy en día. Al cociente de dos números enteros le llamamos número racional y a $\sqrt{2}$ le llamamos irracional. El conjunto de los números racionales e irracionales le llamamos hoy de los números reales. Los números irracionales se dividen en algebraicos y transcendentes, los primeros son las raíces de una ecuación algebraica, como $\sqrt{2}$ que es solución de la ecuación:

$$x^2 = 2 \tag{1}$$

y a los irracionales que no son algebraicos son los números transcendentes, como es el caso de π que es el cociente de dividir la longitud de la circunferencia por la del diámetro, que era conocido por los griegos. Éstos conocían y manejaban bien todos los números racionales, pero de los irracionales solo conocían algunos ejemplos como π y las raíces cuadradas de los números enteros que se pueden calcular por la aplicación repetida del teorema de Pitágoras.

La teoría correcta del número real no se conoce hasta la segunda mitad del siglo XIX, y es debida a Dedekind y a Cantor. Por esta razón hoy se consideran defectuosas algunas de las demostraciones de Euclides, entre ellas la primera, la que utiliza para la construcción de un triángulo equilátero, en la que admite sin demostración que dos circunferencias de igual radio e igual éste a la distancia entre sus centros se cortan en dos puntos; aunque la visión de la figura nos muestra que así nos lo parece, nada prueba que existan tales puntos, porque al no conocerse la teoría del número real, las circunferencias pueden tener “agujeros”. Hubo que esperar a poseer una teoría correcta del número real para poder demostrar la proposición de Euclides sin tener que contemplar la figura, solo por vía deductiva.

Arquitas que vivió aproximadamente entre los años 430 y 345, perteneciente a la escuela pitagórica, utilizó mecanismos y por tanto la Mecánica para la adquisición de nuevos conocimientos geométricos; consideró que una curva podía ser generada por el movimiento de un punto, y una superficie por el movimiento de una curva. Por ello fue criticado por Platón y Aristóteles, pero sin embargo tuvo un gran mérito, es el pionero de la disciplina que muchos siglos después se llamó geometría cinemática y también geometría del movimiento. Hoy esta nueva rama de la Ciencia que había sido la base de la Teoría e Ingeniería de los mecanismos, es también la base de la moderna Robótica.

La crítica de Platón y Aristóteles a Arquitas fue en parte buena, porque favoreció el desarrollo de la geometría como una ciencia abstracta y deductiva. El esquema de las ciencias deductivas fue establecido por Aristóteles basándose en tres postulados, del que el más importante es el llamado "*de deductividad*", que todavía es aceptado hoy. Admite que todos los conceptos científicos se definen por un cierto número de conceptos primitivos y todas las verdades científicas deben de ser demostradas a partir de ciertas verdades indemostrables (los axiomas) mediante las leyes de la lógica.

Sin embargo la crítica a Arquitas fue mala, porque debido a la gran autoridad de Platón y Aristóteles, se obstaculizó el uso de uno de los métodos más potentes para hacer progresar la geometría, que es la introducción en ésta del movimiento.

Euclides hacia el 300 a.d.C. recopiló el saber geométrico anterior a él, enriquecido con sus contribuciones propias en sus *"Elementos"* (Estoiecheia). Comienza con las definiciones, los postulados y las nociones comunes. Vamos a escribir las siete primeras definiciones, para después comentarlas. Son las siguientes:

1. Un punto es lo que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos.
4. Una línea recta es aquella que yace por igual sobre sus puntos.
5. Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura.
6. Los extremos de una superficie son líneas.
7. Una superficie plana es la que yace por igual sobre sus líneas rectas.

Lo que él llama línea es lo que nosotros llamamos curva, y lo que llama línea recta es lo que llamamos segmento. Lo que nosotros llamamos recta es la unión de la definición 4 y del postulado 2. Al establecer extremos a curvas y superficies está considerando figuras geométricas acotadas y no ilimitadas, si bien por el postulado 2 considera la posibilidad de rectas ilimitadas.

Utiliza cinco postulados, que hoy llamaríamos axiomas. Son:

1. (Es posible) trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier otro.
2. (Es posible) prolongar continuamente en línea recta una recta dada.
3. (Es posible) trazar un círculo con cualquier centro y distancia (radio).
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta incide sobre otras dos formando del mismo lado, ángulos internos menores que dos rectos, al prolongarlos indefinidamente se encuentran por el lado en que los ángulos sean menores que dos rectos.

El 5º postulado es equivalente al que llamamos de las paralelas que afirma *"por un punto exterior a una recta, pasa exactamente una paralela a esta recta"*.

Las cinco nociones comunes que utiliza Euclides son:

1. Cosas que son iguales a una misma cosa, son también iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se suman cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si a cosas iguales se restan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Cosas que encajan cada una en la otra son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

Obsérvese que los cinco postulados y la noción común 4 son de carácter geométrico, mientras que las otras cuatro nociones comunes tienen un carácter más general, con un campo de aplicación mucho mayor, por lo que en realidad la noción 4 es un auténtico postulado. Euclides considera que los postulados y las nociones son verdades incuestionables, prácticamente evidentes, como hicieron sus seguidores.

Durante muchos siglos, hasta el XIX, la influencia de los "Elementos" y el prestigio de Euclides fueron enormes, y se consideró a la geometría como la ciencia deductiva y demostrativa más perfecta, hasta el punto de que aún en el siglo XX se hablaba de la *"nostalgia de la geometría"*, que es la aspiración que tenían otras ciencias de conseguir una base axiomática tan buena como la de Euclides.

En el siglo XIX suceden dos acontecimientos muy importantes que echan por tierra la admiración hacia Euclides, que son el advenimiento de la geometría no euclídea a principio de siglo y la crisis de los fundamentos de las matemáticas, a finales de siglo, que conducen al abandono de la axiomática de Euclides por insuficiente y a considerar falsas algunas de sus proposiciones, como la que sirve para la construcción del triángulo equilátero, a la que antes nos referimos.

En 1899 Hilbert establece una nueva axiomática, con 7 axiomas, que es la que hoy se admite.

Aún cuando se sigue reconociendo el mérito grandísimo de Euclides y de su obra y se le sigue teniendo como un grande entre los grandes, se le hacen críticas que llegan a ser feroces, hasta el punto de hablar del *"fracaso de Euclides"* y Dieudonné, uno de los fundadores de Bourbaki en el congreso de matemáticas de Royaumont en 1959 lanzó el famoso grito de *"Abajo Euclides"*, que no va dirigido contra la persona sino contra lo que representa. Se afirma que los griegos tenían ideas confusas sobre postulados y axiomas, que las definiciones de Euclides son inaceptables e inoperantes. Sin embargo Euclides sigue la línea de Aristóteles quien define los axiomas y postulados de la siguiente manera: *los axiomas (las nociones comunes de Euclides por ejemplo) son verdades comunes a todas las ciencias y los postulados son los primeros principios aceptados universalmente para cada ciencia concreta.* Más alejados están Aristóteles y Euclides respecto a lo que es una definición, para el primero es el **nombre** que se le da a una colección de cosas que tienen propiedades iguales y para que la definición sea correcta debe expresarse en términos de algo previo a la cosa definida, es preciso usar términos indefinidos en toda definición. Se acusa a Euclides de no hacer esto, que si hace Hilbert en su axiomática.

Hoy día no se hace distinción entre axioma y postulado y se emplea más la primera palabra. Se considera que la base sobre la que se construye una teoría matemática está constituida por nociones primeras o términos primitivos, y de axiomas que son relaciones entre los mismos, escogidos arbitrariamente, que no sean contradictorias entre sí, que se admiten como verdaderas por consenso. A la teoría matemática que se construye sobre una base axiomática, se le exige que sea consistente (coherente) y completa. La consistencia o coherencia significa que no se puede obtener nunca una proposición de la misma que sea a la vez verdadera y falsa (principio de contradicción). La completitud significa que nunca se puede obtener una proposición que no sea verdadera o falsa (principio del tercero excluido, el *tertium non datur* de los escolásticos). Las proposiciones tienen que estar bien formuladas.

Hasta el siglo XVIII la geometría es la de Euclides, considerada como la única posible y verdadera, y a la que se adapta tanto el universo como el mundo que nos rodea; las máquinas y construcciones así como la forma de la Tierra en la que vivimos.

A partir del siglo XIX ya no es así, al principio del siglo aparecen dos nuevas geometrías, tan verdaderas como la euclídea, que son la hiperbólica de Bolyai y Lobatschevski y un poco mas tarde la elíptica de Riemann. Después viene una proliferación de geometrías y con el advenimiento de la Teoría de la Relatividad el universo deja de ser euclídeo. Sobre esto y sobre la axiomática de Hilbert volveremos más adelante.

La duda es muchas veces creadora, y la duda sobre el 5º postulado de Euclides condujo, durante el siglo XVIII, a tratar de demostrarlo como teorema, por los trabajos de Saccheri, Lambert y Gauss entre otros, y al no conseguirlo a la posibilidad de negarlo (considerarlo falso) y así se pudieron construir las dos primeras geometrías no euclídeas antecitadas.

Las críticas a las definiciones de Euclides las han destrozado, no obstante es interesante analizar algunas. El concepto de punto euclidiano es para la geometría equivalente al átomo de Demócrito en Física, y en tiempos modernos a los neutrinos, leptones y quarks, que no tienen partes. Por el contrario la recta si tiene partes como son los segmentos, así como cualquier otra figura geométrica que también tiene partes y todas están formadas por puntos. En el proceso mental de divisibilidad de cualquier figura se van obteniendo partes de la misma, contenidas en partes mayores y que contienen partes menores (noción 5), hasta llegar a los puntos que ya no tienen partes; el punto es un todo con una sola parte que es igual a sí mismo.

En la definición 2 al decir que una curva (línea) solo tiene longitud y en la 5 al decir que una superficie tiene solo longitud y anchura permitirán en la geometría analítica introducir la dimensión 1 para la curva, 2 para la superficie, 3 para el espacio; lo cual unido a que el punto no tiene longitud y por tanto tiene la dimensión cero, y por generalización ascendente permitió llegar al espacio de cualquier número de dimensiones. Por tanto estas definiciones de Euclides, aunque defectuosas e insuficientes si poseen cierta operatividad.

La crítica es mayor para la definición de recta porque "yace por igual" significa no tener puntos privilegiados, cosa que le pasa también a la circunferencia; pero el postulado 2 distingue ya claramente a la recta de la circunferencia.

Posteriormente se van creando nuevas ramas de la geometría como la geometría cinemática, la analítica, la descriptiva, la proyectiva, la reglada.

Uno de los primeros ejemplos de geometría cinemática es el de la cicloide (figura 1) que es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta. Rodar significa que la velocidad del punto de contacto de la circunferencia con la recta es en cada instante nula. El segmento AB es la longitud de la circunferencia y el OC (C es el punto más alto) mide el diámetro. Por tanto el cociente AB/OC es igual a π. La cicloide ha atraído a muchos matemáticos y sobre ella se han escrito muchas páginas. Por su belleza se le ha llamado la Helena de la Geometría, en recuerdo de la bellísima esposa de Menelao, raptada por Paris y causa de la guerra de Troya.

Vamos a dar dos ejemplos de la importancia de la cicloide en Mecánica:

1º) Si consideramos el arco de cicloide simétrico respecto a la horizontal AB de la figura 1, supuesto vertical el plano, si se obliga a un punto material a moverse sobre la cicloide, se obtiene un péndulo, pues bien este péndulo, a diferencia del circular, es tautócrono; lo que significa que abandonando el móvil con velocidad inicial nula, en cualquier punto de la cicloide, tarda siempre el mismo tiempo en llegar al punto más bajo de la cicloide. En este caso la concavidad de la cicloide está dirigida hacia arriba, al revés que en la figura.

2º) Dados dos puntos M y N, la curva situada en el plano vertical que los contiene, que pasa por ellos y que goza de la propiedad de que un punto material pesado obligado a moverse sobre ella, si es abandonado sin velocidad inicial en el punto más alto M, tarda un tiempo mínimo en llegar al punto más bajo N es una cicloide como la de la figura 1 pero puesta en vertical así como la recta AB. A estas curvas se les llama braquistocronas y son importantes en Mecánica y en Óptica geométrica. Véase E.

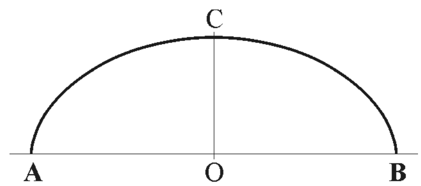

Figura 1

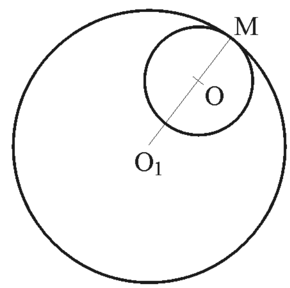

Figura 2

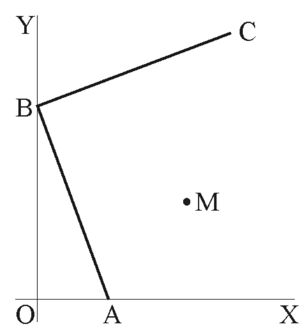

Figura 3

En la figura 2 se han representado dos circunferencias tangentes, una interior a la otra. Si la circunferencia interior rueda sobre la exterior, cualquier punto de ella describe una curva llamada hipocicloide. Si las dos circunferencias son ruedas dentadas constituyen un engranaje hipocicloidal, muy importante en la ingeniería mecánica. En el caso particular en que el radio de la circunferencia interior sea igual a la mitad del radio de la exterior, cualquier punto de la circunferencia interior describe un diámetro de la exterior. Curiosamente el movimiento de un plano invariablemente ligado a la circunferencia interior móvil respecto al plano fijo de la exterior es el mismo que el de un segmento AB (Figura 3), cuyos extremos se mueven sobre dos rectas fijas OX y OY de un plano fijo, perpendicular entre sí, esto en el último caso anterior.

Si las dos circunferencias en vez de ser una interior a otra, las dos son exteriores, la rodadura de una sobre la otra, hace que los puntos de la móvil describan unas curvas llamadas epicicloides, también muy importantes en la ingeniería mecánica.

En la historia de la astronomía las epicicloides junto a las excéntricas tuvieron una gran importancia para poder explicar los movimientos de los cuerpos celestes en la errónea teoría geocéntrica de Ptolomeo, la cual perdieron cuando esta teoría fue sustituida por la heliocéntrica de Copérnico. Puede verse mi conferencia (N de la Bibliografía) que va a ser digitalizada por el Museo Histórico Científico de Florencia.

Lo anterior son algunos ejemplos de los progresos que se pueden obtener en geometría cuando se combina con el movimiento. Sus aplicaciones son importantes en la Teoría de Mecanismos, la Cinemática de las Máquinas y la Robótica. Véase mi libro E.

En el siglo XVII Descartes creó la Geometría Analítica que resulta de aplicar el álgebra y el análisis a la geometría; desde entonces existen dos métodos para el estudio de la geometría que son el sintético que es el que procede de los griegos y el analítico creado por Descartes. Los resultados que se obtienen por ambos métodos nunca son contradictorias, porque se trata de dos métodos distintos y de una sola ciencia.

La geometría sintética se desarrolla partir de una axiomática, antes la de Euclides, ahora la de Hilbert; por el contrario la geometría analítica se desarrolla a partir de las definiciones de las figuras geométricas, de las operaciones con ellas y de sus transformaciones y de las definiciones de distancia y ángulo, utilizando el cálculo como herramienta.

En la geometría analítica del plano, un punto viene definido por dos números reales que son sus coordenadas x,y; una recta se define por una ecuación lineal (2)

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{2}$$

Los coeficientes u, v se comportan como las coordenadas de la recta, las llamadas tangenciales. Para el punto hemos utilizado las cartesianas.

También se define la distancia entre dos puntos y el ángulo entre dos rectas. Las figuras geométricas se definen por sus ecuaciones, así la de una circunferencia de centro (a,b) y radio R es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{3}$$

Con las ecuaciones y el cálculo se pueden resolver los mismos problemas que se resuelven utilizando el método sintético. Ahora bien, la Geometría Analítica es mucho más rica que la sintética, porque en ella hay la posibilidad de introducir elementos imaginarios (puntos, rectas, circunferencias, etc.) y puntos en el infinito y la recta del infinito (puntos impropios y la recta impropia).

El infinito se introduce utilizando las coordenadas homogéneas x, y, t, de las que se obtienen las cartesianas dividiendo x e y por t, son x/t, y/t. Estas coordenadas se llaman homogéneas porque multiplicando x, y, t por un mismo número real los nuevos valores siguen siendo las coordenadas homogéneas del mismo punto.

Si en la (2) se sustituye 1 por w, se obtienen las coordenadas homogéneas de la recta y hay que sustituir la (2) por la

$$ux + vy + wt = 0 \tag{4}$$

Las coordenadas homogéneas de un punto del infinito son x,y,t=0 y la ecuación de la recta del infinito es t=0, que se expresan por

$$x, y, 0; \qquad t = 0 \tag{5}$$

Los elementos imaginarios aparecen cuando las soluciones de las ecuaciones son imaginarias, y así por ejemplo mientras que en la geometría sintética las rectas respecto a una circunferencia pueden ser secantes, tangentes y exteriores, en la analítica las exteriores cortan a la circunferencia en dos puntos imaginarios, los cuales determinan una cuerda imaginaria. Así mismo en la geometría sintética desde un punto interior a una circunferencia no se pueden trazar tangentes a la misma, pero en la analítica si se pueden trazar dos tangentes imaginarias, cuyos puntos de contacto con la circunferencia son imaginarios. Véase B y C.

En la geometría analítica todas las circunferencias de un plano tienen dos puntos comunes (los puntos cíclicos), porque la ecuación de la circunferencia (3) en coordenadas homogéneas se obtiene sustituyendo R^2 por R^2t^2, y las intersecciones de ella con la recta del infinito $t=0$ (5) da

$$t=0;\quad (x-a)^2+(y-b)^2=0 \quad\Rightarrow\quad y-b=\pm i(x-a) \qquad (6)$$

Las ecuaciones de las dos rectas (6), (signos + y −) definen las llamadas rectas isótropas, que son imaginarias, pasan por el punto real (a,b) (centro de la circunferencia) y por los puntos imaginarios llamados cíclicos, por los que pasan todas las circunferencias del plano. Las rectas isótropas (6) gozan de la propiedad de que con cualquier otra recta forman un mismo ángulo imaginario cuya tangente vale

$$\pm i;\quad i=\sqrt{-1} \qquad (7)$$

y consigo misma un ángulo indeterminado.

También existen circunferencias imaginarias, de las que solamente vamos a usar aquellas cuyo centro es real y cuyo radio es imaginario iR; su ecuación es

$$(x-a)^2+(y-b)^2+R^2=0 \qquad (8)$$

Dos coordenadas cartesianas o tres homogéneas definen un punto en el plano, si usamos tres coordenadas cartesianas o cuatro homogéneas se define un punto en el espacio. Así mismo tres coordenadas tangenciales o cuatro homogéneas definen un plano en el espacio, de este modo se pasa de la geometría analítica del plano a la del espacio. Aumentando de una en una las coordenadas cartesianas y tangenciales se va aumentando de una en una las dimensiones y por tanto se puede construir una geometría analítica del espacio euclídeo de n dimensiones. Véase mis libros B y C.

En M (bibliografía) he introducido las circunferencias y esferas completas. Una circunferencia completa la he definido como el “lugar geométrico de los puntos de un plano reales o imaginarios que equidistan de otro” (véase la figura 4 y M). La circunferencia completa se compone de una circunferencia real y de las infinitas hipérbolas equiláteras imaginarias, cuyos vértices reales son los puntos diametralmente opuestos de la circunferencia real. Para fijar la posición de un punto de ella se necesitan dos coordenadas reales y una imaginaria. Una de la reales fija la posición del eje mayor de la hipérbola imaginaria, es el ángulo que forma éste con un diámetro fijo de la circunferencia; la segunda coordenada real es la distancia x del centro de la circunferencia a la proyección del punto de la hipérbola sobre su eje mayor; la tercera coordenada, que es imaginaria, es la distancia imaginaria y del punto anterior a su antedicha proyección, se cumple que:

$$x^2+y^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad y=i\sqrt{x^2-R^2} \qquad (9)$$

Para poder representar una circunferencia completa (dos coordenadas reales y una imaginaria) sobre un plano (dos coordenadas reales) he recurrido al siguiente artificio: dibujo las figuras reales con trazo continuo y las imaginarias con trazo discontinuo; y los puntos imaginarios los encierro dentro de un pequeño circulito.

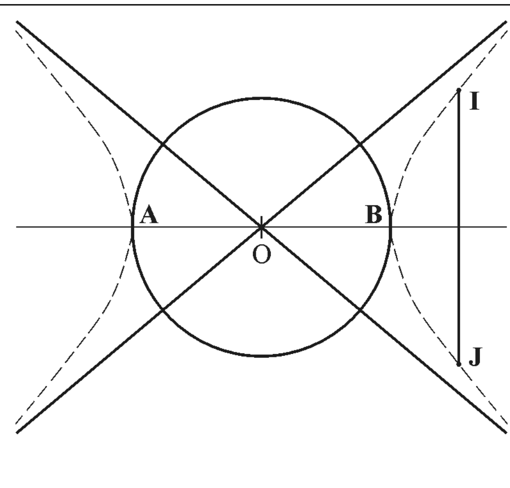

Figura 4

He definido la esfera completa como “el lugar geométrico de los puntos del espacio reales e imaginarios equidistantes de otro”. Se compone de una esfera real y de infinitas hiperboloides equiláteros de revolución de dos hojas, imaginarias cuyos ejes son los diámetros de la esfera. Cada hiperboloide es engendrado por la revolución de una hipérbola equilátera imaginaria alrededor de su eje real. Se puede utilizar la geometría descriptiva para la representación de la esfera completa utilizando el anterior artificio usado para la circunferencia completa. La esfera completa tiene cinco coordenadas por cada punto, tres reales y dos imaginarias. De igual modo puede definirse una hiperesfera completa. Véase en M esta teoría, así como la de la trigonometría de los triángulos imaginarios a que da lugar. Véase M.

Si de acuerdo con Aristóteles una definición es poner nombre a una cosa, vamos a ver la importancia que un nombre puede tener en geometría. Oscar Wilde escribió una comedia muy conocida titulada *“La importancia de llamarse Ernesto”*, la traducción literal al español del nombre Ernesto rompe el juego de palabras que hay en inglés entre el nombre del protagonista y *earnest* que significa “muy serio o muy formal”, lo que le da un tinte, que no tiene, de teatro del absurdo y en español se debía de haber puesto otro nombre como Casto, Justo, Inocencio o algo así. Pues bien, si Oscar Wilde en la ficción dio un ejemplo de la importancia de un nombre, la geometría en la realidad ha dado varios ejemplos de la importancia que puede tener una definición, que según Aristóteles es un nombre. Vamos a dar dos ejemplos.

La bisectriz de un ángulo se puede definir de dos maneras. Definición 1: *“la recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales”*. Definición 2: *“el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los dos lados de un ángulo”*. Estas dos definiciones aparentemente son equivalentes, pero no lo son del todo, tienen su importancia práctica por lo siguiente. En el movimiento de un plano sobre otro plano, lo que tiene gran aplicación en Teoría de Mecanismos, Ingeniería Mecánica, Robótica, Bobillier descubrió una construcción geométrica para obtener los centros de curvatura de las trayectorias de los puntos móviles, utilizando la bisectriz de un ángulo de dos rectas. En el caso muy excepcional de que estas dos rectas sean paralelas, como según la definición 1, dos rectas paralelas no tienen bisectriz, la construcción de Bobillier no sirve. Ya en el siglo XX, Bricard utilizando la definición 2, dado que en este caso dos rectas paralelas si tienen bisectriz que es la recta paralela a ellas y que equidista de ambas, pudo obtener la solución. Por tanto la construcción de Bobillier sirve cuando las dos rectas en cuestión se cortan, entonces existe centro instantáneo de rotación, pero falla cuando son paralelas, entonces en vez de rotación instantánea hay traslación instantánea, y entonces hay que utilizar la de Bricard; el centro instantáneo de rotación es ahora un punto del infinito. Más adelante daremos otro ejemplo, véase E.

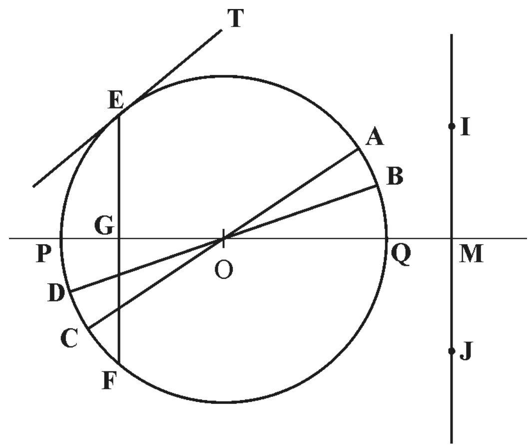

Figura 5

Al definir e investigar la que he llamado razón doble de dos circunferencias (véase las notas y la bibliografía) he definido el ángulo de dos rectas OA y OB (figura 5), mediante la razón doble de los cuatro puntos A, C, B, D que están sobre una circunferencia de centro O por la fórmula:

$$\tan \frac{AOB}{2} = \sqrt{-(ACBD)} \qquad (10)$$

Así mismo he definido el ángulo que forman una recta EF y una circunferencia (figura 5) por la fórmula:

$$\tan \frac{TEF}{2} = \sqrt{-(G\infty PQ)} = -\sqrt{-(GPQ)} \qquad (11)$$

donde ∞ es el punto del infinito de la recta . El paréntesis de la última (11) es la razón simple de los tres puntos G, P y Q. El valor de la cantidad subradical de (11) es positivo.

Obsérvese que en el caso de la razón doble de la recta *IJ* y de la circunferencia (figura 5) la razón simple es positiva y por tanto el ángulo y la tangente son imaginarios. Por *I*, *J* encerrados en un pequeño circulito he representado las dos intersecciones imaginarias de la circunferencia con la recta exterior *IJ*.

La razón doble (ΣΓ) de dos circunferencias la he definido por la razón doble de las cuatro intersecciones de y con su diámetro común, que es igual a la razón de las intersecciones de Σ y Γ con cualquier circunferencia ortogonal a ambas (véase notas y L). Esta razón doble es invariante para la inversión. Se extiende a las esferas e hiperesferas.

Una cualidad para que un Profesor sea un buen pedagogo es que haga fáciles las cosas difíciles, para que los alumnos puedan comprender bien sus explicaciones; pues bien, a veces un Investigador para conseguir sus propósitos tiene que hacer difícil lo fácil, y así por ejemplo Laguerre dio una definición de ángulo muy sofisticada, pero muy útil para sus aplicaciones tanto a la geometría euclídea, como a las dos geometrías no euclídeas (elíptica e hiperbólica). La definición de Laguerre es muy distinta a la nuestra (10). Véase mis libros B y C.

Otro ejemplo de la importancia de una definición es la que sigue. En el siglo XIX Steiner en Alemania introdujo, seguramente por primera vez, la inversión, lo hizo desde el punto de vista de la Matemática Pura. A continuación en Inglaterra, Lord Kelvin estudió e investigó la inversión por sus aplicaciones a la Física, en especial a la Teoría del Potencial. Se pueden dar dos definiciones de inversión. La definición 1 es así: dado un punto *O* (el centro de inversión) el inverso de un punto *A* es otro punto *B* que está sobre *OA* y tal que

$$OA \cdot OB = k^2 \tag{12}$$

siendo k^2 una constante positiva o negativa.

Según la definición 1 la simetría no es una inversión.

La definición 2 es así: dado un punto *O* y una circunferencia de centro *O* y radio *k* (real o imaginario), *A* y *B* son inversos si están sobre un mismo diámetro y son conjugados armónicos respecto a las intersecciones de la circunferencia con el diámetro *OAB*, porque entonces se cumple (12).

Según la definición 2 la simetría es una inversión, cuando la circunferencia degenera en una recta Δ su centro es el punto del infinito de las rectas perpendiculares a Δ, y el radio infinito. Este resultado no lleva a considerar los límites en Geometría.

En Análisis Matemático los límites tienden a ser estáticos, mientras que en geometría algunos son dinámicos y dependen del procedimiento seguido para definirlo. Y así por ejemplo un punto *P* puede ser considerado como una circunferencia de radio cero, y en ese caso es el límite de una sucesión de circunferencias de centro *P* y cuyo radio tiende a cero; y el límite de las tangentes a las circunferencias es el haz de rectas que pasan por *P*. Límite 1.

Ahora bien, una sucesión de circunferencias tangentes a la recta *OY* en *O* cuyos radios tienden a cero, tienden al punto *O* y sus tangentes tienden a la recta *OY*. Límite 2.

Las dos sucesiones de circunferencias de los límites 1 y 2 son posibles en virtud del axioma 3 de Euclides y se pueden escoger iguales las circunferencias de una y otra sucesión pero sus límites sin embargo son distintos porque el primero es una circunferencia de radio cero con infinitas tangentes y el segundo con una sola tangente. La diferencia entre los dos límites anteriores 1 y 2, aunque parezca trivial es importante (véanse las notas).

Otro ejemplo: una sucesión de circunferencias del mismo centro *O*, cuyo radio tiende a infinito, tienden a llenar todo el plano, y el límite contiene a todos los puntos del plano. Definición o límite 1.

Una sucesión de circunferencias que permanecen tangentes a la recta *OY* en *O* de radio *R* tienen por ecuación respecto a *OY* y *OX* perpendicular a *OY*, la:

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0 \tag{13}$$

y cuando *R* tiende a infinito tienden a *OY* (de ecuación $x=0$). Tienden a llenar el semiplano a la derecha de *OY* ($x>0$). Las circunferencias tienen como límite *OY*, sus tangentes también, su centro tiende al punto del infinito de *OX* y sus diámetros a las paralelas a *OX*. Definición 2.

Al igual que en el caso en que el radio tendía a cero, también las circunferencias de las sucesiones de las definiciones de los límites 1 y 2 pueden ser iguales, pero sus límites son distintos. También esta diferencia no es trivial (véase notas).

Todas las definiciones y límites anteriores pueden extenderse a las esferas e hiperesferas.

En relación con el número de dimensiones: cero para un punto, uno para una recta o curva, 2 para un plano o superficie etc., existen dos clases de generalizaciones una ascendente y la otra descendente.

La primera es más común. Por ejemplo la definición de la circunferencia como "lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro" se puede generalizar a 3 y a n dimensiones y así surgen la esfera y la hiperesferas. Para unificar la terminología llamaremos S_2 y V_2 a la longitud y área de la circunferencia; S_3 y V_3 al área y al volumen de la esfera y así sucesivamente. Existen unas fórmulas (véase D bibliografía) $S_n(R)$ y $V_n(R)$ que dan los valores en función de R y n (R es el radio y n el número de dimensiones), del área y del volumen de la hiperesfera. Para todas se cumple que

$$\frac{dV_n(R)}{dR} = S_n(R) \tag{14}$$

Para $n=2$ y $n=3$ se obtienen las conocidas fórmulas de la circunferencia y de la esfera.

$$S_2(R) = 2\pi R;\ V_2(R) = \pi R^2;\ S_3(R) = 4\pi R^2; \quad V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{15}$$

He introducido la generalización en sentido descendente y así he llamado bipunto a la circunferencia en una dimensión: "el lugar geométrico de los puntos de una recta que equidistan de otro". Es un par de puntos, el centro es su punto medio y R es igual a la mitad de la distancia entre los dos puntos. Pues bien, si hacemos $n=1$ en las fórmulas anteriores se obtiene

$$S_1(R)=2;\quad V_1(R)=2R \tag{16}$$

Obsérvese que $S_1(R)$ es independiente de R y que las dos (16) cumplen la (14). El "volumen" de un bipunto es la longitud del segmento cuyos extremos son los dos puntos, y el "área" vale 2. De esta forma se generalizan en sentido descendente la longitud ("área") de la circunferencia y el área ("volumen"). He extendido el concepto de ángulo a dos bipuntos (véanse notas).

Pero también puede generalizarse a cero dimensiones, es decir a un punto los conceptos de área y volumen y se obtiene para el volumen

$$V_0(R)=1 \tag{17}$$

y para el área se obtiene una indeterminación, que levantada da:

$$\lim_{n\to 0} S_n(R) = \delta(R) \tag{18}$$

que es la delta de Dirac. El "área" de un punto es la delta de Dirac y el "volumen" es 1. Véase mi libro D.

La negación del 5º postulado de Euclides (el de las paralelas) condujo a Bolyai y a Lobatschewski a la creación de la primera geometría no euclídea (la hiperbólica) y a Riemann en la segunda mitad a la segunda geometría no euclídea (la elíptica). El impacto fue muy grande, la geometría euclídea dejó de ser la única verdadera, la geometría ya no es una ciencia de la realidad sino una creación lógica, pero libre, de la mente humana, cuyo contenido va presupuesto en sus axiomas. Como consecuencia del fracaso de la demostración del quinto postulado en el siglo XVIII, se llegó a la negación y a la construcción de nuevas geometrías libres de contradicción interna, de acuerdo con los métodos de la lógica tradicional. A pesar de la claridad en el razonamiento no euclídeo en geometría, quedaba el temor de que al irse acumulando nuevos y nuevos teoremas se pudiera acabar llegando a una contradicción, porque no se había demostrado aún que las geometrías no euclídeas estuvieran libres de contradicciones. Por eso fue un paso muy importante el dado por Beltrami en 1868, al exponer el primer modelo euclídeo de la geometría hiperbólica, en el que se representa sobre la pseudoesfera (superficie del espacio euclídeo) el plano hiperbólico. Posteriormente Riemann representó el plano elíptico sobre la esfera. Poincaré demostró que si existen contradicciones en estas dos geometrías no euclídeas, existen también en la euclídea, ya que se pueden construir modelos de las dos primeras en la última.

Otros pasos decisivos fueron dados por Cayley y Klein, que ligaron entre sí las geometrías no euclídeas con la proyectiva, y subordinaron a esta última la geometría métrica. Klein en su programa de Erlangen definió la Geometría como "el estudio de las propiedades invariantes de un grupo de transformaciones" y según sea el grupo así es la geometría. Con el programa de Erlangen se intensifica el proceso de deshumanización de la geometría, que se va alejando de la constructividad real y de toda posibilidad de visualización y materialización, pero a cambio de ello presta un gran servicio a la Física y a la Cosmología modernas, preparando el camino a la Teoría de la Relatividad de Einstein.

En mis publicaciones y en mi libro P e utilizado ocho modelos de geometría hiperbólica y seis de geometría elíptica, utilizando modelos geométricos euclídeos sobre parte del plano, de la esfera o de hiperboloides de revolución.

La crisis de los fundamentos de las Matemáticas a fines del XIX afectó fuertemente a la geometría. Pasch (1843-1930) preparó el camino a Hilbert (1862-1943), consideró al espacio geométrico como la construcción que se hace mentalmente el hombre y como reflejo del espacio físico, se dio cuenta de que los puntos, rectas y planos no deben ser definidos, solamente se nos hacen comprensibles y manejables por sus propiedades que resultan de los axiomas. encontró por primera vez la existencia de una proposición geométrica cuya verdad es universalmente aceptada y en la que cree firmemente hasta un niño, que no figuraba en la axiomática anterior a él, ni se puede demostrar como un teorema. Propuso entonces enunciarlo como un axioma, que hoy lleva su nombre. El axioma de Pasch afirma: "Si A, B y C no están alineados, y si una recta D de un plano corta a AB entre A y B, entonces D corta necesariamente a AC entre A y C o a BC entre B y C", A, B y C son puntos.

Tanto el axioma de Pasch como los cinco postulados de Euclides o el axioma de Arquímedes se pueden demostrar en la geometría analítica.

En M demostré por reducción al absurdo físico, que si la ley de la inercia de la Mecánica es verdadera, forzosamente la antecitada proposición de Pasch es verdadera y entonces o es un teorema o en caso contrario un axioma.

En mi opinión igual que la introducción del movimiento en la geometría ha echo progresar a ésta, me parece que también la introducción de la demostración por reducción al absurdo físico en la geometría la hace progresar.

El renacer de la geometría proyectiva en el siglo XIX introdujo en ella los elementos imaginarios y los del infinito (impropios), aparecen los puntos cíclicos y las rectas isótropas. Se puede ya utilizar para su estudio el método sintético sin necesidad de recurrir al analítico.

Las demostraciones defectuosas de Euclides, como la que antes hemos descrito de la construcción de un triángulo equilátero son debidas a que los griegos, aunque conocían y manejaban bien los números racionales, sus conocimientos sobre los irracionales eran escasos; podían conocer las raíces cuadradas de los números enteros e incluso de los racionales por la aplicación reiterada del teorema de Pitágoras. Conocían también el número π y algunas curvas transcendentes, pero esto no era suficiente para legitimar la demostración de Euclides.

El uso del álgebra en la geometría analítica, introdujo el conocimiento de los números algebraicos e incrementó el conocimiento de nuevos números transcendentes, pero tampoco era suficiente. Solamente cuando Dedekind y Cantor por dos métodos distintos, desarrollaron la teoría rigurosa del número real, y cuando se demostró que el conjunto de los números reales no era numerable, sino que tenía la potencia del continuo, es cuando se estuvo en condiciones de eliminar la posibilidad de la existencia de "agujeros" en las dos circunferencias de la antecitada construcción de Euclides, al establecer la correspondencia biunívoca (biyección) entre el conjunto de los números reales y el de los puntos de una recta. Con estos nuevos conocimientos ya es posible la axiomática de Hilbert.

Hilbert (1862-1943) publicó la primera edición de su libro "Fundamentos de la Geometría" en 1899; yo conozco la séptima que es de 1930 en la traducción española de 1953. Califica a su libro en la introducción de "un nuevo ensayo para construir la geometría sobre un sistema completo de axiomas lo más sencillo posible". Afirma después que "los axiomas de la geometría y el averiguar sus conexiones, es problema que se encuentra discutido desde tiempos de Euclides, en numerosos y excelentes de la literatura matemática". Actualmente se puede decir que la axiomática de Hilbert es la solución final del problema planteado.

Hilbert da una lista de veinte axiomas de los que el número 12 es de de Pasch, el número 18 es el postulado de las paralelas de Euclides, el axioma 19 es el de Arquímedes. Utiliza las tres nociones no definidas de punto, recta y plano, sobre las cuales insiste en que son denominaciones totalmente arbitrarias y añade que igual podía haberlas llamado vasos de cerveza, sillas y mesas.

El axioma de Pasch es de pocos años antes que el libro de Hilbert, y el de Arquímedes es posterior a Euclides, afirma que "dados dos segmentos a y b ($a<b$) existe un número entero positivo n tal que $n \cdot a$ es mayor que b". Este axioma lleva como consecuencia el postulado 2 de Euclides y su importancia va más allá de la geometría, se aplica hoy a los grupos totalmente ordenados que se llaman arquimedianos si cumplen el axioma de Arquímedes, de los que es un ejemplo el conjunto de los números reales que es un grupo aditivo totalmente ordenado.

El éxito de la axiomática de Hilbert se ve reforzado porque al suprimir el axioma nº 18 (el quinto postulado de Euclides, de las paralelas) se puede fundamentar la geometría proyectiva y al sustituirlo por otro axioma, se puede fundamentar la geometría hiperbólica y también la elíptica, en uno y en otro caso el axioma que sustituye al quinto postulado es distinto.

Resulta muy interesante el apéndice tercero del libro de Hilbert en el que define el sentido de una semirrecta y desarrolla la teoría de la adición y multiplicación de sentidos en la geometría hiperbólica en forma abstracta. En mi libro P he efectuado el cálculo de la adición y multiplicación de sentidos en forma analítica sobre un modelo geométrico euclídeo de la geometría hiperbólica en el que las rectas son las cuerdas de una circunferencia Σ; y he obtenido la composición de las velocidades de la relatividad restringida mediante un método gráfico. El sentido de una semicuerda es su intersección con Σ.

Al considerar la indefinición de los puntos, rectas y planos, si encontramos tres clases de objetos geométricos X, Y, Z que satisfacen los axiomas de Hilbert, entonces estos desempeñarían el papel de los puntos, rectas y planos, y obtendríamos así modelos euclídeos de la geometría euclídea ordinaria. Habría que hablar entonces de geometría euclídea en plural y no en singular. En I, J y las notas adjuntas, he encontrado tres modelos euclídeos nuevos de la geometría euclídea ordinaria y propongo numerarlas de uno a cuatro las geometrías euclídeas así obtenidas en la que el número 1 corresponde a la ordinaria. Véanse las notas.

La geometría euclídea y las dos no euclídeas, son las tres igualmente verdaderas y desde el punto de vista lógico las tres están a la misma altura; sin embargo <u>existe una diferencia sustancial entre la primera y las dos últimas y es que mientras existen modelos euclídeos de geometrías no euclídeas, por el contrario no existen modelos no euclídeos de la geometría euclídea</u>. Las definiciones de las figuras y de las transformaciones de las no euclídeas se expresan en el lenguaje de la euclídea (se traducen a él) y los teoremas se obtienen por los métodos euclídeos y se traducen al lenguaje no euclídeo. Cambian de significado palabras como paralelismo, perpendicularidad, cambian la distancia y los ángulos, las propiedades de las figuras geométricas, etc.

Existe una jerarquía de las tres geometrías, en la base está la euclídea y sobre ella se edifican las no euclídeas. Para poder conocer las geometrías no euclídeas hay que conocer antes la euclídea. Exactamente lo mismo puede decirse de las cuatro geometrías euclídeas, la primera es la básica (la ordinaria) sobre la que se construyen las otras tres y también para conocer cualquiera de estas tres hay que conocer la primera. Véanse las notas.

Con Einstein se rompen estos viejos esquemas conceptuales y puede hablarse, con razón, del espacio y del tiempo antes y después de Einstein. En la Teoría de la Relatividad Restringida, la primera y más sencilla el espacio y el tiempo no son independientes sino que forman un continuo tetradimensional, de modo que los puntos y los instantes se funden en los <u>sucesos</u> formados por la asociación de un punto del espacio y un instante. Se abandonan los conceptos clásicos de pasado y futuro por otros nuevos, y un tercer concepto sin homólogo clásico, que es el tiempo que transcurre en otro lugar del espacio y que no se halla con nuestro aquí y ahora en relación de pasado ni de futuro. El concepto de simultaneidad que nos es tan familiar se complica enormemente y requiere un análisis muy difícil. El espacio y el tiempo siguen siendo físicamente inactivos y adquieren una estructura métrica pseudoeuclídea. Véanse mis libros F y G.

La Mecánica clásica utiliza el espacio y el tiempo definido por Newton: "el tiempo absoluto, verdadero y matemático transcurre en sí, uniformemente y sin ninguna relación con los objetos externos"; la definición de un punto material como un punto geométrico dotado de una masa y cinco postulados que se admiten como verdades indemostrables o evidentes por sí mismas, entiendo que no son verdades lógicas, sino que se imponen a la mente, porque jamás la experiencia, de la que se tiene conocimiento histórico se ha manifestado en contradicción con ellas.

Se ha llegado a la enunciación explícita de estos postulados por un camino totalmente inductivo, como resultado de un número muy grande de observaciones, que han sugerido a los físicos la necesidad de una aceptación universal. Posteriormente ha sido comprobado por los físicos que los resultados obtenidos por vía analítica de estos postulados, nunca eran desmentidos por la experiencia, lo que les confirmó la necesidad de admitirlos como verdades indemostrables.

Cuando los adelantos y refinamientos de la Técnica experimental permitieron efectuar medidas de extraordinaria precisión, que mostraron los errores de los resultados obtenidos a partir de la Mecánica y de la Física clásica, se habló de la crisis de estas ciencias y surgió en el siglo XX una nueva revolución científica con la Teoría de la Relatividad y de la Mecánica Cuántica.

Entre estos postulados figura la ley de la inercia que afirma "todo punto material, supuesto aislado o está en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo de velocidad constante (uniforme)".

El punto de partida de la Mecánica clásica es la ecuación de Newton que afirma que "la fuerza ejercida sobre un punto material F es igual al producto de la masa m por la aceleración a"; es la:

$$F = m \cdot a \tag{19}$$

(la ecuación es vectorial). Por tanto si sobre un punto no se ejerce ninguna fuerza, la aceleración es nula y la velocidad es constante, si es cero el punto está en reposo y en caso contrario se mueve con movimiento rectilíneo uniforme. La ley de inercia se sigue de la ecuación de Newton (19). Véase mi libro E.

Se llama referencial a todo sistema que permite fijar la posición de un punto en el espacio. El más sencillo es el formado por tres ejes formando un triedro trirrectángulo $OXYZ$, de modo que la posición de un punto viene fijada por sus tres coordenadas cartesianas x,y,z. En la Mecánica clásica el tiempo es un parámetro de valor universal.

Un referencial se llama inercial si en él se verifica la ley de inercia y la ecuación (19). Se demuestra que todo referencial en movimiento de translación rectilíneo y uniforme respecto a un referencial inercial es también inercial. Este es el principio de la Relatividad de Galileo de la Mecánica clásica. Son ejemplos de referenciales inerciales el usado por Copérnico para su teoría heliocéntrica, y el usado por Newton para establecer su ley de gravitación universal. No es inercial el referencial ligado a un punto de la Tierra, debido al movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su eje.

Se llaman transformaciones de Galileo a las que sirven para pasar de las coordenadas de un punto respecto a un referencial inercial a sus coordenadas respecto a otro referencial inercial que se mueve con un movimiento uniforme de traslación respecto al primero. El tiempo es el mismo en uno otro referencial, es el de Newton. Las ecuaciones de la mecánica son invariantes respecto a las transformaciones de Galileo, lo que significa que no podemos darnos cuenta de un movimiento uniforme y rectilíneo del referencial. Por el contrario las ecuaciones de Maxwell y la de las ondas del electromagnetimo y de la óptica no son invariantes respecto a las transformaciones de Galileo, por lo que la velocidad de la luz no es la misma en dos referenciales inerciales en un movimiento uniforme de traslación de uno respecto al otro. Estas consecuencias son muy importantes e hicieron entrar en crisis a la Mecánica y Física clásicas. Hubo necesidad de cambiar las transformaciones de Galileo por las de Lorentz, para las que si son invariantes las antecitadas ecuaciones de Maxwell y de las ondas, y para las que la velocidad de la luz es la misma en referenciales inerciales. Einstein formulaba en 1905 el principio de la Relatividad restringida que afirma: "la sustitución de un referencial inercial por otro ha de dejar invariantes las leyes de la Física", y por tanto es necesario sustituir las transformaciones de Galileo por la de Lorentz. Para velocidades muy pequeñas en comparación con la de la luz, apenas hay diferencias, por lo que para ellas se pueden seguir usando la Mecánica y la Física clásica.

Desde el punto de vista matemático las transformaciones de Galileo y de Lorentz forman grupo, lo cual es estrictamente necesario para poderlas usar en Física.

Las consecuencias físicas de este cambio de transformaciones son muy importantes, entre ellas figuran:

a) la invariancia de la velocidad de la luz en el vacío c para observadores en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.
b) la no existencia de velocidades superiores a la de la luz en el vacío.
c) la contracción de las longitudes
d) la dilatación del tiempo y la existencia de un tiempo local
e) la equivalencia entre masa y energía.

La contracción de las longitudes consiste en que si ℓ es la longitud de una barra medida por un observador en reposo respecto a ella, si la barra se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo respecto al observador, la medida de la longitud es más pequeña, excepto si la dirección del movimiento es perpendicular a la barra, en cuyo caso no hay contracción. La contracción es máxima cuando la barra y la dirección del movimiento son paralelos.

La existencia del tiempo local, significa que en la Relatividad restringida el tiempo no es un parámetro, sino que es una coordenada, y que en las transformaciones de Lorentz el tiempo depende de las coordenadas espaciales del lugar. Mientras que en las de Galileo el tiempo permanece el mismo y lo que queda invariante es la distancia d entre dos puntos

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \qquad (20)$$

y en las de Lorentz lo que queda invariante es la pseudodistancia entre dos sucesos Δ^2 del pseudoespacio cuatridimensional espacio-tiempo:

$$\Delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2 \qquad (21)$$

La dilatación del tiempo significa que "la marcha de un reloj en movimiento es más lenta que la del mismo en reposo" o lo que es igual, que el intervalo de tiempo entre dos sucesos medidos por dos observadores en movimiento uniforme y rectilíneo, tiene una duración distinta.

La equivalencia entre masa y energía (principio de inercia de la energía) viene dado por la ecuación de Einstein:

$$E = mc^2 \qquad (22)$$

donde E es la energía, m la masa y c la velocidad de la luz en el vacío. En virtud de (22) el contenido de energía modifica la masa inerte. La (22) marca también la posibilidad de la materialización de la energía, por ejemplo un fotón puede transformarse en un electrón y un positrón. Y también la desmaterialización de la masa, el ejemplo contrario un electrón y un positrón pueden aniquilarse y crear un fotón.

Hay que distinguir entre energía de masa y energía nuclear, la primera corresponde a la (19) y la segunda a la que se libera en algunas reacciones nucleares (la fusión y la fisión) como consecuencia de una pérdida de masa del sistema reaccionante de acuerdo con la (22).

La (22) explica el origen de la energía liberada por el Sol y las estrellas, primero cualitativamente explicó lo que entonces era un enigma y posteriormente en forma cuantitativa de acuerdo con las teorías de Bethe y Von Weizsäcker.

Es importante señalar que en un medio material transparente la velocidad de la luz es menor que c, vale c/n siendo n el índice de refracción ($n > 1$) y por tanto una partícula eléctrica puede moverse en ese medio con una velocidad inferior a c y superior a c/n, en cuyo caso provoca el efecto Cerenkov que consiste en una emisión de luz entre azul y violeta, que es una onda parecida a la producida por un avión supersónico.

En la Relatividad general, matemática y conceptualmente más complicada que la restringida, el espacio, el tiempo y la materia dejan de ser independientes, los dos primeros son físicamente activos. La materia configura la estructura y la métrica del espacio-tiempo, que ya no es ni plano ni infinito, sino curvo y finito, su geometría se denomina pseudo-rriemanniana. Surgen nuevos fenómenos físicos, inconcebibles en la Física anterior, entre ellos el espacio ya no es estático sino dinámico, está en expansión y como está en expansión no puede hacerse sin salirse de sí mismo, hay que introducir en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones ficticio, el espacio tridimensional no euclídeo. La expansión del universo fue observada por los astrónomos en los años veinte, se conoce con el nombre de fuga de las galaxias, que provoca un corrimiento hacia el rojo de los rayos espectrales de la luz procedente de ellas. Está de acuerdo con la Relatividad general.

En el sistema solar los fenómenos explicados por la Relatividad general son el movimiento del perihelio de Mercurio, de las rayas espectrales de la luz solar hacia el rojo (dilatación gravitacional del tiempo) y la curvatura de los rayos luminosos procedentes de una estrella que pasan cerca del Sol. Estos fenómenos son inexplicable por la Física clásica.

En 1915 Einstein enunció el principio de la Relatividad general, que es una generalización del de la restringida. El principio de la Relatividad general de einstein afirma: “Si se sustituye un referencial inercial S por otro S_1 que no lo es, si existe un campo gravitatorio C en S_1, que lo convierte en inercial, las leyes de la Física son las mismas en S que en S_1 con C”.

La formulación matemática de la Teoría de la Relatividad general la hizo Einstein en 1917, mediante un principio de mínimo en un espacio pseudo-rriemanniano que es de cuatro dimensiones, tres espaciales y uno temporal. Casi al mismo tiempo llegó Hilbert a las mismas conclusiones.

La Cosmología moderna y la Física de partículas elementales se explican por el uso conjunto de la Teoría de la Relatividad y de las Teorías Cuánticas (Mecánica, Electrodinámica y Cromodinámica Cuánticas). La teoría, la observación y el experimento han conducido a enormes macromagnitudes espaciales y temporales como son la edad del universo o las distancias a las galaxias más lejanas, y también pequeñísimas micromagnitudes como son las dimensiones y las vidas medias de las partículas elementales inestables; así como a pretender conocer lo que sucedió en los primeros intervalos de tiempo infinitesimales después del principio del universo (Big Bang).

Combinando las probabilidades y la mecánica clásica se desarrolló en la segunda mitad del siglo XIX la mecánica estadística clásica y en los años veinte del siglo XX las dos mecánicas estadísticas cuánticas. Combinando las probabilidades con la mecánica relativista desarrollé la mecánica estadística relativista en 1985 en una artículo de la Revista “Trabajos de Estadística e Investigación Operativa” y en 1984 y 1988 en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Para cerrar voy a hacer referencia a la exploración de longitudes y tiempos inconcebiblemente pequeños que se llaman de Planck. La longitud de Plank es del orden de 10^{-33} cm, por debajo de la cual el espacio que conocemos y en que vivimos, deja de ser como nos parece que es, y se convierte en lo que se llama espuma cuántica. El tiempo de Plank es del orden de 10^{-43} seg., es el intervalo de tiempo más pequeño que puede existir, y si el intervalo entre dos sucesos en menor, no se puede saber cual de los dos sucesos sucede antes.

Tan curioso y extraño como los anteriores es la posible existencia de bucles cerrados en el tiempo, de modo que un viajero en el espacio-tiempo, siguiendo uno de estos bucles ruede regresar a su punto de partida tanto en el espacio como en el tiempo. Están relacionados con las máquinas del tiempo que permiten viajar retrocediendo en el tiempo. Esto es polémico y Stephen Hawking, uno de los científicos más importantes de nuestra época, ha formulado la conjetura de protección cronológica, según la cual, las leyes de la Física no permiten la construcción de una máquina del tiempo.

Fuera del texto de la conferencia vamos a incluir unas breves notas extraídas de mis propias investigaciones, ampliamente desarrolladas en mis publicaciones citadas en la Bibliografía. Requieren un aparato matemático complicado y van dirigidas a lectores especializados en la materia.

Nota 1.

UNA REGLA DE INDETERMINACIÓN ALEATORIA EN EL PROCESO ESTOCÁSTICO DE LA DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA. UN NUEVO TEOREMA.

El valor medio del tiempo aleatorio en que se desintegra totalmente un cuerpo radiactivo constituido por n partículas, cuando n tiende a infinito, también tiende a infinito; es una variable cierta.

El tiempo aleatorio en que se desintegra totalmente el anterior cuerpo radiactivo, es una variable aleatoria que también tiende a infinito, al tender n a infinito.

La diferencia entre ambas variables anteriores, la aleatoria y la cierta, cuando n tiende a infinito, tiende a una variable aleatoria finita, cuyo valor medio es cero y cuya varianza y demás momentos centrales son finitos. Esto es lo que vamos a demostrar.

Toda la teoría, incluidos estos resultados, han sido desarrollados en mi libro “Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos” y en mis memorias allí citadas.

La función característica (fc) $\varphi(z)$ y la de densidad de probabilidad $f(t)$ del tiempo aleatorio que tarda en desintegrarse una partícula, cuando el número de partículas no desintegradas del cuerpo radiactivo es j, son respectivamente:

$$\varphi_j(z)=\frac{1}{1-\frac{iz}{\lambda j}}; \quad f_j(t)=\lambda j e^{-\lambda j t} \tag{1}$$

Por tanto la fc del tiempo aleatorio que tardan en desintegrarse las n partículas iniciales, por ser la suma de n variables aleatorias independientes, es el producto de las (1) cuando j varía de 1 a n. Es:

$$\varphi(z)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(z)=\frac{1}{1-\frac{iz}{\lambda j}} \tag{2}$$

El valor medio $m(j)$ y la varianza $\sigma^2(j)$ de (1) son:

$$m(j)=\frac{1}{\lambda j}; \quad \sigma^2(j)=\frac{1}{\lambda^2 j^2} \tag{3}$$

de aquí que el valor medio m y la varianza σ^2 de (2) que son la suma de $m(j)$ y $\sigma^2(j)$ cuando j varía de 1 a n, valen:

$$m=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}; \quad \sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} \tag{4}$$

Cuando n tiende a infinito la m de (4) también tiende a infinito y la σ^2 de (4) tiende a un valor finito. Por tanto cuando n tiende a infinito, también tienden a infinito el tiempo medio y el tiempo aleatorio que tardan en desintegrarse totalmente el cuerpo, es decir todas sus partículas. Ahora bien, la diferencia entre estos dos tiempos (el aleatorio y el medio que es una variable cierta) tiende a una variable aleatoria cuyo valor medio es cero, y su varianza es finita, vale:

$$\sigma^2(\infty)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} \tag{5}$$

La fc de la diferencia entre estos dos tiempos es:

$$\Psi(z)=\left(\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{iz}{\lambda j}}\right)e^{-iz\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda j}}; \quad n=\infty \tag{6}$$

la exponencial de (6) es por ser el tiempo medio una variable cierta.

Tomando logaritmos en (6), se obtiene para el logaritmo del producto infinito encerado entre paréntesis el valor:

$$iz\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda j}+\left(\frac{-z^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2 j^2}+\dots\right) \tag{7}$$

y para la exponencial de (6) fuera del paréntesis, el logaritmo vale:

$$-iz\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda j} \tag{8}$$

Por tanto el logaritmo de (6) es la suma de (7) y (8):

$$\ln\Psi(z)=(7)+(8) \tag{9}$$

que es una serie convergente, lo que demuestra la propiedad anteriormente enunciada.

Se puede calcular $\Psi(z)$ exactamente de la siguiente manera:

$$\ln \Psi(z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{iz}{\lambda j}\right) \tag{10}$$

por otra parte es:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \ldots \tag{11}$$

y aplicando (11) a (12)

$$x = \frac{iz}{\lambda j} \tag{12}$$

se obtiene

$$-\ln\left(1 - \frac{iz}{\lambda j}\right) = \frac{iz}{\lambda j} - \frac{z^2}{2\lambda^2 j^2} + \ldots + \frac{(iz)^k}{k\lambda^k j^k} + \ldots \tag{13}$$

y llevando este valor a (9) se obtiene:

$$\ln \Psi(z) = -\frac{z^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2 j^2} - \frac{iz^3}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^3 j^3} + \ldots + \frac{(iz)^k}{k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k j^k} + \ldots \tag{14}$$

que es una serie convergente que da exactamente el valor de $\ln\Psi(z)$ y por tanto de $\Psi(z)$.

Lo anterior levanta una indeterminación aleatoria del tipo $\infty - \infty$ y da su valor verdadero. Lo que hemos hecho es la solución de un fenómeno físico particular, que se puede generalizar a otros muchos, por lo que constituye un teorema. Se aplica a todos aquellos casos en los que una sucesión de variables es tal que su valor medio tiende a infinito, pero que la varianza y los demás momentos centrales convergen a números finitos, entonces la diferencia entre la variables aleatorias de la sucesión y sus valores medios convergen a una variable aleatoria finita de valor medio nulo.

Nota 2.

LAS CUATRO GEOMETRÍAS EUCLÍDEAS.

Hilbert en su libro "Los Fundamentos de la Geometría" axiomatizó la geometría euclídea de tres dimensiones a partir de tres entes no definidos que llama puntos, rectas y planos, mediante 20 axiomas igual a 9 + 11. El número de entes que utiliza es 3.

En mi libro inédito antecitado introduciendo n-3 entes nuevos y n^2 más 11 axiomas en total he conseguido axiomatizar el espacio euclídeo de n dimensiones. Los nuevos entes son los n-3 hiperplanos de tres a n-1 dimensiones que junto a los tres entes de Hilbert hacen n.

El problema que me he planteado es el siguiente: supuesto verdadero todo el saber geométrico acumulado y la axiomática de Hilbert, averiguar si existen tres clases de objetos geométricos X,Y,Z, tales que sustituyendo los puntos, rectas y planos de la axiomática de Hilbert por X,Y,Z, las proposiciones que se obtienen son verdaderas, son auténticos teoremas. Si existen tales X,Y,Z decimos que hemos obtenido un nuevo modelo euclídeo de la geometría ordinaria o clásica, en la que los elementos de la Geometría son los X,Y,Z, que ya no son entes no definidos, sino objetos definidos en función de los puntos, rectas y planos. Hemos demostrado que hemos encontrado tres ternas de X,Y,Z distintos, que guardan entre sí las mismas relaciones que los puntos, rectas y planos de la axiomática de Hilbert, de modo que estos X,Y,Z son los "puntos", "rectas" y "planos" de tres nuevas geometrías euclídeas que llamamos segunda, tercera y cuarta.

En la geometría euclídea en el caso de dos dimensiones, el "plano" es el plano euclídeo del que se ha suprimido un punto O y se ha añadido otro que representamos por ∞ que no puede representase en el dibujo. Las "rectas" son las rectas ordinarias que pasan por O y las circunferencias que pasan por O; el punto no representable ∞ es el que es común a todas las rectas que pasan por O (O se ha suprimido). A este plano le llamo plano inversivo incompleto y lo denoto *PI*, al plano euclídeo lo denoto *PE*. El ds de *PI* es coordenadas polares planas respecto a O:

$$ds^2 = \frac{k^4\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2\right)}{r^4} \tag{1}$$

cuyas geodésicas son las "rectas" de *PI*. La distancia entre dos puntos A y B de *PI* es igual a la distancia euclídea entre los puntos A_1 y B_1 inversos de A y B en la inversión de centro O y potencia k^2. Los ángulos son iguales a los euclídeos. *PE* es conexo y *PI* no lo es.

En tres dimensiones se puede definir una segunda geometría euclídea, suprimiendo un punto O, de modo que las "rectas" son las circunferencias y las rectas que pasan por *O*; los “planos” son las superficies esféricas y los planos que pasan por *O*, y en cada “recta” se introduce un nuevo punto ∞, irrepresentable, que son los puntos por los que pasan todas las “rectas” de un “plano” que pasan por el punto suprimido *O*. El *ds* de este nuevo espacio *EI* en coordenadas polares con origen en *O* es

$$ds^2 = \frac{k^4\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2(\theta) d\varphi^2\right)}{r^4} \qquad (2)$$

Hay una 3ª geometría euclídea que llamamos *SI*, cuyo modelo vamos a describir. Véase figura 6.

S es una superficie esférica de diámetro *OA* y radio *R*, de la que se suprime el punto *O*. La proyección estereográfica desde *O*, de *S* sobre el plano Δ tangente en *A* a *S*, es igual a una inversión de centro *O* y potencia $4R^2$.

En esta inversión las rectas de Δ se transforman en las circunferencias de *S* que pasan por *O* (punto que se ha suprimido). Las “rectas” de *SI* son las circunferencias de *S* que pasan por *O* (de las que se suprime *O*) y puntos son los puntos ordinarios. El *ds* de *SI* es:

$$ds^2 = \frac{R^2\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2\right)}{\cos^4\dfrac{\theta}{2}} \qquad (3)$$

las geodésicas de (3) desprovistas del punto *O*, son las “rectas” de *SI*, y la distancia entre dos puntos de *SI* es igual a la distancia euclídea entre sus inversos de Δ. Véase el fin de esta nota.

Hay una 4ª geometría euclídea que llamamos *SII*. Las rectas y las circunferencias se transforman en esta inversión anterior, en las circunferencias de *S* que pasan por *A* y desprovistas del punto *A* son las “rectas” de *SII*. La métrica es la (4) como veremos en la nota 7ª. El *PI* de Δ (con *A* suprimido) es la proyección estereográfica de *S*, desde O sobre el plano tangente en *A*.

Los puntos y “rectas” de *SI* y *SII* cumplen los 15 axiomas de Hilbert que fundamentan el plano euclídeo.

Para *SI* en el caso de tres dimensiones las “rectas” y “planos” son las circunferencias y las superficies esféricas que pasan por *O*; y para *SII* las que pasan por *A*. Las primeras con el punto *O* suprimido y las últimas con el punto *A* suprimido.

La distancia entre dos puntos de *SII* es igual a la distancia entre sus inversos en el *PI* de Δ, medidos con la métrica (1).

Se pasa de *SI* al *PE* de Δ y viceversa, y de *SII* al *PI* de Δ y viceversa, mediante las inversiones anteriores o proyecciones estereográficas. Por tanto se puede pasar de *PE, PI, SI* y *SII*, de uno a otro cualquiera por inversiones, ya que se pasa del *PE* de Δ al *PI* de Δ mediante una inversión de centro *A*.

SII tiene el mismo soporte *S* que el *SII*, solo que en el primero se suprime el punto *A*, y en el segundo el punto *O*. En ambos las “rectas” son circunferencias de *S*, que pasan por *A* (suprimido) para *SII* y por *O* (suprimido) para el *SI*.

Los ángulos entre “rectas” son los euclídeos.

SII procede de invertir un *PI* desde un punto *O* con potencia $4OA^2$ (*A* es la proyección de *O* sobre *PI*, cuyo punto excluido es el *A*). Las circunferencias y las rectas del *PI* que pasan por *A* (punto suprimido) que son las rectas del *PI* se transforman en las circunferencias de *S* que pasan por *A* (suprimido) que son las rectas de *SII*, en la antecitada inversión.

Los resultados anteriores los hemos extendido a *n* dimensiones.

También hemos extendido a *n* dimensiones la axiomática de Hilbert expuesta en su libro “Fundamentos de Geometría” para tres dimensiones, necesito crear tres entes indefinidos y 25 axiomas. Para extenderla a *n* dimensiones hemos necesitado *n* entes indefinidos y $n^2 + 11$ axiomas.

Al extenderla a *n* dimensiones estas tres nuevas geometrías euclídeas (2ª, 3ª y 4ª), los “puntos”, “rectas”, “planos” e “hiperplanos” satisfacen la axiomática de Hilbert que hemos extendido a *n* dimensiones.

El *ds* de SII cambiando en (3) θ por $\pi - \theta$ es:

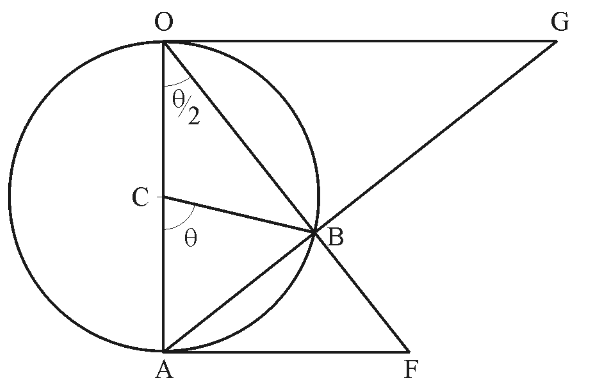

Figura 6

$$ds^2 = \frac{R^2\left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2\right)}{\text{sen}^4 \dfrac{\theta}{2}} \qquad (4)$$

La figura 6 representa la sección de una esfera *S* de centro *C* y radio *R*; *O* y *A* son puntos diametralmente opuestos; *AF* y *OG* son las trazas sobre el plano del papel de los planos tangentes en *A* y *O* a *S*. *F* y *G* son las proyecciones estereográficas de *B* desde *O* y *A*.

Llamamos θ al ángulo ACB y entonces $COB = \theta/2$, y:

$$AF = r; \quad OG = \rho; \quad r\rho = 4R^2 \qquad (5)$$

se tiene que:

$$r = 2R\tan(\theta/2); \quad \rho = \frac{2R}{\tan(\theta/2)} \qquad (6)$$

el ds^2 del plano tangente a *S* en *A* es:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \qquad (7)$$

Llevando el valor (6) de *r* a (7) se obtiene (3), que muestra la equivalencia de la métrica del *PE* (7) y del *SI*.

Si en (7) se hace el cambio de *r* por ρ y el cambio de ρ por (6) se obtiene:

$$ds^2 = \frac{16R^4\left(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2\right)}{\rho^4} \qquad (8)$$

que muestra que el plano tangente a *S* en *O* es un *PI* y la equivalencia entre la métrica del *PI* y de *SII*. Se puede extender a *n* dimensiones.

Nota 3.

LÍMITES GEOMÉTRICOS QUE IMPLICAN OTROS.

Dada una circunferencia de centro *O* y radio *R*, de ecuación:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$

la ecuación general de las circunferencias ortogonales a (1) es

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + R^2 = 0 \qquad (2)$$

donde α y β son la coordenadas del centro de (2). Si hacemos tender *R* a cero en (1), la (1) tiende al punto *O*, y la (2) tiende al conjunto de circunferencias que pasan por *O*, porque

$$R=0 \Rightarrow (2) = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 \qquad (3)$$

Los diámetros de (1) que son las rectas que pasan por *O* se conservan. Por tanto si el límite de una sucesión de circunferencias concéntricas, cuando el radio tiende a cero, es *O*, el límite de la sucesión del conjunto de circunferencias ortogonales tiende al conjunto de circunferencias que pasan por *O*.

Si se invierte con centro *O* y potencia R^2, la sucesión decreciente de circunferencias cuando *R* tiende a cero, se convierte en la sucesión de circunferencias inversas de las anteriores, que es creciente y tiene como límite todo el plano, porque sus radios tienden a infinito, y por tanto todo punto del plano es interior a una circunferencia de esta sucesión. En esta inversión los conjuntos de circunferencias ortogonales a las de la sucesión decreciente, se convierten en las circunferencias ortogonales a las de la sucesión creciente y como el límite de las primeras son las circunferencias que tienden a pasar por *O* (centro de inversión) sus inversas tienden al conjunto de todas las rectas del plano, excepto las que pasan por *O*, las cuales se conservan. Se sigue que el límite de la sucesión de las circunferencias (1) cuando R tiende a infinito es el conjunto de todas las rectas del plano excepto las que pasan por O.

Los resultados anteriores son independientes de que las circunferencias (1) sean reales o imaginarias, es decir que R^2 sea positivo o negativo.

Este resultado es muy importante como se verá en las notas 4ª y 5ª.

Nota 4.

LAS DOS PRIMERAS GEOMETRÍAS EUCLÍDEAS COMO LÍMITES DE LAS GEOMETRÍAS ELÍPTICA E HIPERBÓLICA CUANDO LA CURVATURA TIENDE A CERO O A INFINITO.

Es sabido que el interior de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{1}$$

si R es real es el soporte de un plano hiperbólico, en el que las "rectas" (líneas geodésicas) son los arcos interiores a (1) de sus circunferencias ortogonales. He demostrado que también lo son los arcos exteriores y entonces a diferencia del caso anterior el plano hiperbólico no es conexo.

Lo mismo sucede para el plano elíptico en que es sabido que los arcos interiores a (1) de las circunferencias ortogonales a la circunferencia imaginaria

$$x^2 + y^2 + R^2 = 1 \tag{2}$$

y también he demostrado que lo son los arcos exteriores y entonces el plano elíptico no es conexo.

De lo anterior y de la nota 3ª se sigue el límite de una sucesión de planos hiperbólicos (o elípticos) cuando R tiende a infinito es un plano euclídeo PE, caso en que la curvatura del espacio es nula.

Si la sucesión de planos hiperbólicos (o elípticos) es tal que R tiende a cero, de la nota 3ª se sigue que su límite es un PI, en cuyo caso la curvatura del espacio es infinita

En el primer caso los soportes euclídeos de los planos hiperbólicos (o elípticos) es el interior de (1) y en el segundo caso es el exterior de (1).

Estos resultados se extienden a tres y a n dimensiones.

Nota 5.

TEORÍA UNIFICADA DE LAS DOS GEOMETRÍAS EUCLÍDEAS Y DE LAS GEOMETRÍAS ELÍPTICA E HIPERBÓLICA.

Es sabido que el ds de un plano hiperbólico o elíptico en coordenadas polares es

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{\left(1 \pm \frac{r^2}{R^2}\right)^2} \tag{1}$$

donde el signo menos ($r \leq R$) corresponde al hiperbólico y el signo más al elíptico.

Si en (1) hacemos $R = \infty$ se obtiene el ds del plano euclídeo.

En el caso de que el plano hiperbólico o elíptico no sea conexo, entonces en vez de la (1) el ds es:

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{\left(\frac{r^2}{R^2} \pm 1\right)^2}; \quad r \geq R \tag{2}$$

En el caso de (2) si multiplicamos por

$$\frac{k^4}{R^4} \tag{3}$$

se obtiene el ds de un plano homotético, cuya razón de homotecia es k/R. La (2) se transforma en la

$$ds^2 = \frac{k^4\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2\right)}{\left(r^2 \pm R^2\right)^4} \tag{4}$$

y si en (4) hacemos $R = 0$ se obtiene el ds de un PI.

Estos resultados son los mismos que los que obtuvimos en la nota 4ª por otro procedimiento.

Este resultado se extiende a tres y a n dimensiones.

La geometría euclídea es más básica que las no euclídeas, porque existen modelos euclídeos de geometrías no euclídeas y en cambio no existen modelos no euclídeos de de la geometría euclídea. Lo que si que existen so modelos euclídeos de la geometría euclídea ordinaria, como en el caso de tres dimensiones sobre el propio espacio euclídeo o sobre una hiperesfera de tres dimensiones inmersa en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones.

Nota 6.

LA RAZÓN DOBLE DE DOS CIRCUNFERENCIAS, DOS ESFERAS Y DOS HIPERESFERAS.

He llamado razón doble $(\Sigma\Sigma_1)$ de dos circunferencias coplanarias Σ y Σ_1 a la razón doble de las cuatro intersecciones ABA_1B_1 de Σ y Σ_1 con su diámetro común, que si son reales y V es el ángulo que forman sus radios en un punto común se tiene que:

$$\tan\frac{V}{2} = \sqrt{-\left(ABA_1B_1\right)} = \sqrt{-\left(\Sigma\Sigma_1\right)} \tag{1}$$

de lo que se sigue que

$$V = \frac{1}{i}\ln\frac{1+i\sqrt{\left(\Sigma\Sigma_1\right)}}{1-i\sqrt{\left(\Sigma\Sigma_1\right)}} \tag{2}$$

De lo anterior se sigue que si dos circunferencias son tangentes y una es interior a la otra V vale cero, y si son exteriores V vale π. Véase la (10) del texto de la conferencia.

La razón doble de dos circunferencias se conserva en la inversión. También se puede definir como la razón doble de los cuatro puntos FGF_1G_1 en los que Σ y Σ_1 cortan a cualquier circunferencia ortogonal a las dos.

La definición anterior me ha permitido extender la definición de ángulo a dos circunferencias que no se cortan y a una circunferencia real y otra imaginaria.

Una recta Δ se puede considerar como una circunferencia de radio infinito, cuyo centro es el punto del infinito de las rectas perpendiculares a ella, lo que me ha permitido definir la razón doble de una circunferencia Σ y de una recta Δ, tanto si se cortan en que el ángulo es real, como si no se cortan en que el ángulo es imaginario. Véase la (11) del texto de la conferencia.

Así mismo se puede definir la razón doble de dos rectas Δ y Δ_1, como la razón doble de las intersecciones de Δ y Δ_1 con cualquier circunferencia, cuyo centro sea la intersección de Δ y Δ_1. Véase la figura 5.

También un punto A puede considerarse como una circunferencia de centro A y radio cero, por lo que puede definirse la razón doble de un punto A y de una recta Δ o una circunferencia Σ. Si B y C son las intersecciones de Σ con su diámetro que pasa por A es:

$$\sqrt{-\left(\Sigma A\right)} = \sqrt{-\left(BCAA\right)} = \sqrt{-1} = i \tag{3}$$

luego la tangente del ángulo V que forman A y Σ vale i, porque $\tan\left(V/2\right)$ vale i (3) y por tanto

$$\tan V = \frac{2i}{1-i^2} = i \tag{4}$$

Si el punto está sobre Σ entonces (3) es

$$\sqrt{-\left(\Sigma A\right)} = \sqrt{-\left(BAAA\right)} = \frac{0}{0} \tag{5}$$

es indeterminada, lo cual significa en este caso que el ángulo que forman Σ y A puede ser cualquiera, la indeterminación no puede levantarse como en otros casos. Por tanto los puntos que son reales, se comportan para esta propiedad como las rectas isótropas que son imaginarias. Respecto a un punto A y una recta Δ se mantienen los resultados (4) y (5). Hemos extendido el concepto de ángulo a puntos con rectas y circunferencias.

La razón doble puede extenderse a dos circunferencias Σ y Σ_1 sobre la superficie de una esfera S, debido a que la proyección estereográfica conserva los ángulos (es un inversión). Se tiene que $(\Sigma\Sigma_1)$ es igual a la razón doble $(\Gamma\Gamma_1)$ siendo Γ y Γ_1 la proyección estereográfica de Σ y Σ_1 desde cualquier punto de S, aunque estas proyecciones sean distintas unas de otras, pero se cortan bajo el mismo ángulo.

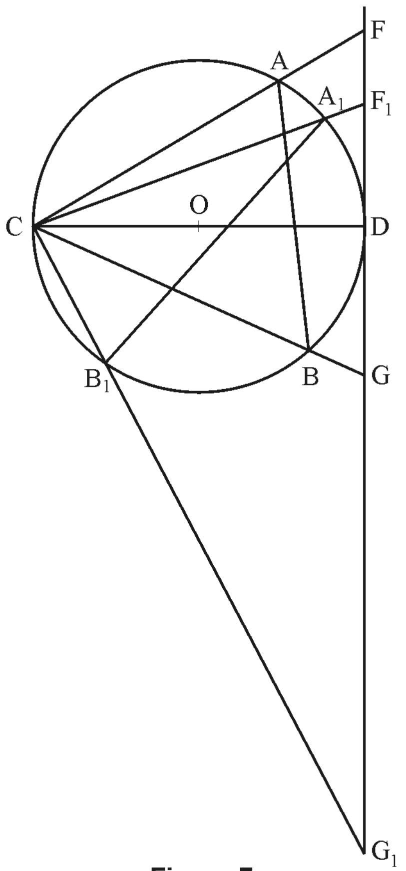

Figura 7

También puede definirse $(\Sigma\Sigma_1)$ como la razón doble de las intersecciones de Σ y Σ_1 con cualquier circunferencia de S ortogonal a ellas; éstas son las secciones planas de S por los planos que pasan por los polos P y P_1 respecto a S de los planos que contienen a Σ y Σ_1. En particular $(\Sigma\Sigma_1)$ es igual a la razón doble de las intersecciones de Σ y Σ_1 con el meridiano de S que está sobre el plano diametral de S que contiene a P y P_1 (véase la figura 7). En la figura 7 si llamamos Ω y Δ al meridiano y al plano diametral, Ω es la circunferencia y Δ el plano del papel. Los planos que contienen a Σ y Σ_1 son perpendiculares a Δ, y lo cortan según los diámetros AB y A_1B_1 de Σ y Σ_1; P y P_1 son los polos de AB y A_1B_1 respecto a Ω. La protección estereográfica de S desde cualquiera de sus puntos, sea el C sobre el plano tangente en D a S (O es el centro de S y D el punto diametralmente opuesto a C) transforma Σ y Σ_1 en dos circunferencias Γ y Γ_1 sobre Δ de diámetros FG y F_1G_1. Se tiene que

$$(\Sigma\Sigma_1)=(ABA_1B_1)=(FGF_1G_1)=(\Gamma\Gamma_1) \qquad (6)$$

He extendido la razón doble a dos esferas S y S_1 de la que se pueden dar las siguientes definiciones equivalentes:

1º). (SS_1) es igual a la razón doble $(ABCD)$ de las intersecciones AB y A_1B_1 de S y S_1 con su diámetro común.
2º). (SS_1) es igual a la razón doble de las dos circunferencias Σ y Σ_1 intersecciones de S y S_1 con cualquier plano diametral común a S y S_1.
3º). (SS_1) es igual a la razón doble de las dos circunferencias intersecciones de S y S_1 con cualquier esfera ortogonal a ambas.

Los resultados anteriores se pueden extender a n dimensiones, pero no se pueden extender a circunferencias que no estén sobre un mismo plano o la misma esfera.

Pueden consultarse mis publicaciones. En mi libro inédito "Geometría de 2 a N dimensiones y Trigonometría imaginarias" he realizado una investigación muy amplia sobre esta materia.

Nota 7.

ISOMETRÍAS ENTRE *PE*, *PI*, *SI SII*.

La proyección estereográfica de S desde O sobre el plano Δ tangente a S en A (figuras 6 y 8) es una inversión de centro O y potencia $4R^2$.

Llamamos *SI* a S suprimiendo el punto O, dotado de la métrica (3) de la nota 2ª, en la que las "rectas" son las circunferencias que pasan por O (suprimido este punto). La proyección estereográfica de S sobre Δ desde O, es un *PE* cuya métrica es la (7) de la nota 2ª. Existe una correspondencia biunívoca (biyección) entre *SI* y el *PE* de Δ, definida por la antecitada proyección estereográfica (o inversión). La distancia entre los puntos de *SI* medidos con su métrica, es igual a la distancia euclídea entre sus homólogos en el *PE* de Δ. Los ángulos entre "rectas" son los euclídeos (figura 6).

Llamamos *SII* a S suprimiendo el punto A (figura 8), dotado de la métrica (4) de la nota 2ª, en la que las "rectas" son las circunferencias que pasan por A

(suprimido este punto). La proyección estereográfica de *S* sobre Δ, es un *PI* cuya métrica es la (8) de la nota 2ª. Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos y "rectas" de *SII* y del *PI* de Δ, definida por la proyección estereográfica. La distancia entre dos puntos de *SII* es igual a la distancia entre los puntos homólogos del *PI*, ambas medidas con sus métricas.

Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos y "rectas" de *SI* y *SII*, siendo homólogos los puntos diametralmente opuestos de *S*, en la figura 8 son homólogos *B* y B_1, pertenecen a *SI* uno y a *SII* el otro.

Los ángulos entre rectas son los euclídeos. Se pasa de un punto de *SI* al homólogo de *SII* mediante la sustitución de la coordenada θ:

$$\theta \rightleftarrows \pi - \theta \qquad (1)$$

Por tanto existe una correspondencia biunívoca entre *PE*, *PI*, *SI* y *SII*.

Al igual que se han obtenido en la nota 2ª a partir de las fórmulas (3), (5) y (6) las equivalencias de las (7) y (8) con (3), se pueden obtener a partir de la (4) las nuevas equivalencias de (4). Comparando la figura 6 y la 8 y como ahora es:

$$B_1OA = \theta/2; \quad B_1CA = \theta; \quad OF_1 = r_1 = \frac{2R}{\tan\frac{\theta}{2}}; \qquad (2)$$
$$AG_1 = \rho_1 = 2R\tan\frac{\theta}{2}$$

en la que las dos últimas son la (6) de la nota 2ª intercambiadas, se tiene que llevando a la (4) de la nota 2ª el valor (2) de θ en función de r_1 y ρ_1, se obtiene:

$$ds^2 = dr_1^2 + r_1^2 d\varphi^2; \quad ds^2 = 16R^2\frac{d\rho_1^2 + \rho_1^2 d\varphi^2}{\rho_1^4} \qquad (3)$$

que corresponde a la métrica del *PE* en el plano tangente a *S* en *O*, y a la métrica del *PI* en el plano tangente a *S* en *A*.

En *SI* y en *SII* la distancia entre dos puntos situados sobre un mismo meridiano que pasa por *O* y *A* se calcula haciendo dφ=0 en (3) y (4) de la nota 2ª, por lo que resulta muy fácil la integración de *ds* y por tanto el cálculo de dicha distancia. Comparando las dos distancias en *SI* y en *SII* se comprueba la profunda diferencia entre ambos.

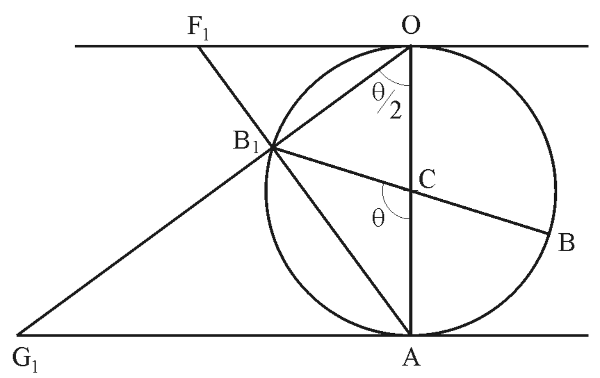

Figura 8

BIBLIOGRAFÍA

1. **Bell**: *"Historia de las Matemáticas"*. Editorial Efe, 1949.
2. **Bell**: *"Los Grandes Matemáticos"*. Editorial Losada, 1948.
3. **Morris Kline**: *"El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días"*, tres tomos. Alianza Universidad, 1992.
4. **Hilbert**: *"Fundamentos de Geometría"*. CSIC, 1953.
5. **Borel**: *"El Espacio y el Tiempo"*. Montaner Simón. 1931.
6. **Gamow**: *"Biografía de la Física"*. Alianza Editorial, 1985.

LIBROS DEL AUTOR

A. *"Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos"*. Editorial Paraninfo, 1974.
B. *"Geometría Analítica y Proyectiva del Plano"*. Editorial Dossat, 2ª edición, 1965.
C. *"Geometría Analítica y Proyectiva del Espacio"*. Editorial Dossat, 1961.
D. *"Ecuaciones Diferenciales y Matrices"*. 2ª edición. Editorial Dossat, 1965.
E. *"Mecánica y Cálculo Tensorial"* 2ª edición. Editorial Dossat, 1965.

F. *"Filosofía de las Matemáticas"*. Editorial Dossat, 1961.

G. *"Grandes Problemas de la Filosofía Científica"*. Editora Nacional, 1973.

OTRAS PUBLICACIONES DEL AUTOR

I. Discurso de Investidura Doctor Honoris Causa. Universidad Politécnica de Valencia, 1997.

J. *"La utilidad de las Matemáticas en el progreso material e intelectual del hombre"*, en *"2000, Año Mundial de las Matemáticas"*. Real Academia de Ciencias.

K. *"La N-esfera y el espacio inversivo incompleto, modelos euclídeos de geometrías no euclídeas clásicas"*, en *"Fronteras de la Informática"*. Editado por la Real Academia de Ciencias y la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid, 1994.

L. *"Una definición proyectiva de ángulo y la razón doble de dos circunferencias; esferas en una dimensión; los N+1-edros ortocéntricos y las esferas ortogonales en espacios euclídeos de N dimensiones"*, en *"Contribuciones Matemáticas en honor del Profesor José Javier Etayo"*. Editado por la Universidad Complutense de Madrid, 1994.

M. *"Historias paralelas de las Matemáticas y de la Física"* en el Programa de Promoción Científica y Tecnológica 2002-03 que va a ser publicado por la Real Academia de Ciencias.

N. *"El Legado de Galileo en la evolución de la Física hasta hoy"*, en *"En torno a Galileo"* editado por Amigos de la Cultura Científica 1993.

LIBROS INÉDITOS DEL AUTOR

P. *"Geometrías no euclídeas y Teoría de la Relatividad"*.

Q. *"Geometría de 1 a N dimensiones y Trigonometría imaginaria"*.