Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 101, Nº. 2, pp 285-305, 2007
VIII Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

ALGUNOS DESCUBRIMIENTOS MATEMÁTICOS DEL SIGLO XX

MANUEL LÓPEZ PELLICER *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. E.T.S. Ingenieros Agrónomos. Apartado 22012. 46071 Valencia. mlopez@mat.upv.es

1. INTRODUCCIÓN

Es razonable pensar que el siglo XX ha tenido más matemáticos que todos los siglos anteriores juntos, lo que nos obliga a describir sólo algunos descubrimientos matemáticos del siglo XX. En la selección de descubrimientos hemos tenido en cuenta los premios importantes, intentando cierta objetividad, si bien descubrimientos muy relevantes no han sido seleccionados, como la caracterización de Turing de la Teoría del Algoritmo (1936), el análisis no estándar de Robinson (1961), la Teoría del Caos (1963) y de las Catástrofes (1964), o muchos de los grandes descubrimientos en Análisis Matemático por los que se han dado varias de las últimas medallas Fields. Tal vez la selección óptima sea difícil de alcanzar, sobre todo si se hace con varias limitaciones.

En cualquier caso, agrupando los descubrimientos matemáticos que describimos, hemos intentado resaltar profundas diferencias entre los descubrimientos matemáticos a lo largo del siglo, que aparece dividido en tres tercios.

Los descubrimientos que vamos a considerar en el primer tercio del siglo XX son cuestiones axiomáticas y teoremas que continúan la Matemática del siglo anterior. El primer tercio está dividido del segundo por la Segunda Guerra Mundial, que trajo el desarrollo de los ordenadores y el interés por problemas prácticos. En el segundo tercio nos encontraremos con problemas teóricos y axiomáticos, como el Teorema de independencia de Cohen de 1963, junto a descubrimientos motivados para resolver problemas concretos de otras ciencias, como el método simplex de Dantzing de 1947, el inicio de la inteligencia artificial (con el análisis de Shannon del juego del ajedrez en 1950) o el teorema de existencia de equilibrio de Arrow-Debreu de 1954, que supone el comienzo de la consideración de la Matemática en la Economía, siguiendo la huella de cómo la Matemática ayudó a la Física en los dos siglos anteriores al siglo XX.

Los descubrimientos del último tercio del siglo XX están relacionados con problemas largos, que exigen equipos de investigadores ayudados de potentes ordenadores, o bien largos años de esfuerzos. Ejemplos de los primeros problemas resueltos con ayuda de ordenador son la clasificación de los Grupos Finitos, asociada a Gorenstein y terminada en 1972, la resolución del problema de los cuatro colores encontrada por Appel y Haken en 1976, y la solución de Hale de 1998 al problema de del empaquetamiento de Kepler. Prototipo de largos años de esfuerzo es la prueba de Wiles del último teorema de Fermat, finalizada en 1995. También se relata en este período el descubrimiento de los fractales y de los invariantes de Jones en teoría de nudos.

2. PRIMER TERCIO DEL SIGLO XX: DE LA AXIOMÁTICA DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS (1902) A LA AXIOMATIZACIÓN DE LA PROBABILIDAD (1933)

Cantor y Frege quisieron reducir la Aritmética a Teoría de Conjuntos, pero la paradoja de Bertrand Rusell de 1902 exigió distinguir entre conjuntos y clases o bien establecer un nuevo sistema axiomático que restringiese el concepto de conjunto evitando la aparición de paradojas. En 1908, Zermelo publicó su

Figura 1. Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo 1871-1953.

axiomática de la Teoría de Conjuntos, que fue completada en 1921 por Abraham Fraenkel. Diez años más tarde, Kurt Gödel probó en 1931 la imposibilidad de formular un sistema completo de axiomas para una teoría *T* que contenga a los números naturales, pues probó que no todas las proposiciones matemáticas expresables en el lenguaje de la teoría *T* pueden ser probadas o refutadas utilizando esa teoría *T*.

Muy poco antes, en 1930 un grupo de matemáticos franceses, conocidos con el nombre colectivo de Nicolás Bourbaki, intentaron fundamentar la matemática sobre estructuras. Antes de la aparición de las estructuras, de la teoría de conjuntos se deducía la teoría de los números naturales, luego se obtenían los números enteros y, finalmente, se construían los números racionales y luego los números reales con sus operaciones. Los bourbakistas definen los números reales y sus operaciones por la *estructura algebraica de cuerpo*, las propiedades de orden de los números reales están en una *estructura de orden*, compatible con su estructura algebraica y las propiedades de los números reales relacionadas con la idea de proximidad están en una *estructura topológica*. Las ideas del grupo Bourbaki están expuestas en la obra *Elementos de Matemáticas*, titulo inspirado en la obra *Los Elementos* de Euclides.

Se criticó que con las estructuras se perdían las propiedades particulares de los ejemplos concretos, pues los números reales tienen particularidades que no están dentro de la estructura general de cuerpo topológico. Se pensó que no era posible renunciar a los ejemplos de cierta estructura y a las aplicaciones que conservan esa estructura. Así nació el concepto de *categoría*, introducido por Saunders MacLane y Samuel Eilenberg, quien recibió el Premio Wolf en 1986. Un ejemplo de categoría son los conjuntos y las funciones definidas entre ellos.

Así como el matemático relaciona los conjuntos por *funciones* y las estructuras por *morfismos*, las categorías se relacionan mediante ciertas “funciones” que conservan sus propiedades y que se llaman *functores*. MacLane afirmó en su libro *Categories for the Working Mathematician* (1971) que las categorías son el fundamento de la Matemática que necesita el matemático para su trabajo.

Otro de los grandes descubrimientos del primer tercio del siglo XX fue la medida de Lebesgue (1902). Sus antecedentes se encuentran en *Los Elementos* de Euclides, escritos unos 300 años a. C., donde no aparecen las definiciones de longitud, área o volumen, pero se postularon propiedades que permitían calcular áreas de polígonos y volúmenes de poliedros, mediante descomposición en figuras elementales. Hasta comienzos del siglo XIX la existencia del área de una superficie se dio por supuesta. En 1823, Agustín Cauchy definió el área de una superficie por una integral, lo que le llevó a la existencia de superficies que no tienen área, debido a la existencia de funciones no integrables.

Figura 2. Henri Léon Lebesgue 1875-1941.

En 1833, Jànos Bolyai complementó el método de descomposición de Euclides probando que un polígono puede descomponerse en un número finito de triángulos que pueden recomponerse para formar un cuadrado de área igual a la del polígono. En 1899 David Hilbert publicó *Los Fundamentos de la Geometría* y un año más tarde, en el tercer problema de su conferencia de 1900, preguntó si era posible un resultado similar al de Bolyai con poliedros. Hilbert preguntaba por la descomposición de un poliedro en tetraedros con los se pudiese formar un cubo de volumen igual al del poliedro. Max Dehn dio inmediatamente respuesta negativa, incluso con un tetraedro.

En los Elementos, además del método de descomposición se utiliza el método de aproximaciones sucesivas por polígonos para obtener el área de figuras circulares. Este método lo utilizó Eudoxo (siglo IV a.C.), cuatro siglos después Arquímedes (alrededor del 225 a.C.) para obtener el área del círculo y de la superficie esférica, en 1854 lo usó Riemann para introducir su integral mediante aproximaciones con rectángulos, y después aparece en la obra de Giuseppe Peano (1887) y de Camille Jordan (1893) para la formalización la hoy llamada medida de Peano-Jordan, de la que un caso particular es la integral de Riemann.

A finales del siglo XIX se tenían muchos ejemplos de funciones no integrables Riemann y, por tanto, conjuntos no medibles con la medida de Peano-Jordan, que fue extendida en 1902 con la *medida de Henri Lebesgue*, quien reemplazó la aditividad finita por la numerable. La célebre integral de Lebesgue es un caso particular de su medida y extiende la integral de Riemann.

Unos años después, Giuseppe Vitali determinó conjuntos que no eran medibles Lebesgue y que tienen comportamiento diferente, incluso contrapuesto, al de los conjuntos medibles. Por ejemplo, Felix Hausdorff probó en 1914 que una superficie esférica se puede dividir en un número finito de partes no medibles que se pueden reordenar proporcionando dos superficies esféricas del mismo radio que la original. En 1924, Stefan Banach y Alfred Tarski probaron un resultado similar para una esfera al demostrar que se puede dividir la esfera en un número finito de partes que se pueden recolocar completando dos esferas de radio idéntico al de la esfera inicial. Este resultado se conoce impropiamente como paradoja de Banach-Tarski y no se da en un círculo, debido a un profundo teorema de John von Neumann de 1929.

Figura 3. Ernst Steinitz 1871-1928.

El plano también tiene otros resultados sorprendentes relacionados con la medida, pues Mirlos Laczkovich probó en 1988 que es posible dividir un círculo en un número grande de subconjuntos no medibles (del orden de 10^{50}) que se pueden recomponer para formar un cuadrado de la misma área.

De 1910 son la clasificación de los cuerpos de Ernst Steinitz, introduciendo el concepto de *característica de un cuerpo*, los grupos de simetría de Ludwig Bieberbach y teorema del punto fijo de Luitzen Brouwer.

La extensión de los números naturales, hecha en el siglo VI a.C. con la introducción de los números racionales positivos, utilizados por los pitagóricos como fundamento de su filosofía, y la introducción del cero en la India durante el siglo VII d.C., prepararon el primer ejemplo de cuerpo en el sentido definido por Heinrich Weber en 1893, que se llama cuerpo de los números racionales. La adición de los irracionales al cuerpo de los números racionales origina el cuerpo de los números reales. Los números irracionales fueron descubiertos por los pitagóricos, manipulados por los indios y los árabes y no fueron considerados como números hasta el siglo XVII, gracias a Descartes y Wallis. En 1858, Richard Dedekind obtuvo la definición de números reales por cortaduras y en 1872, Georges Cantor dio su definición mediante sucesiones

Figura 4. Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach 1886-1982.

de Cauchy. El cuerpo de los números reales está contenido en el cuerpo de los números complejos, introducidos por Gerolamo Cardano en 1545 para resolver la ecuación de tercer grado. La extensión de las operaciones usuales con números reales a los números complejos la hizo Raffaele Bombelli en 1572. En 1799, Carl Friedrich Gauss probó que todo polinomio con coeficientes complejos tiene una raíz, propiedad que nos dice que el cuerpo de los números complejos es un *cuerpo algebraicamente cerrado*.

Por otros motivos, Evariste Galois en 1830 y Richard Dedekind en 1871 obtuvieron otros cuerpos añadiendo al cuerpo de los números racionales un número irracional y todos los números obtenidos como resultado de las operaciones algebraicas con números racionales y el número añadido. Si el número irracional añadido es raíz de un polinomio con coeficientes enteros se dice que el cuerpo obtenido es una extensión *algebraica* y en caso contrario una extensión *trascendente*. Por inducción transfinita se prueba que todo cuerpo está contenido en otro algebraicamente cerrado.

Además de los anteriores cuerpos infinitos también hay cuerpos finitos, como el cuerpo Z/(n) de los enteros módulo un número primo *n*, que es el cociente del anillo de los enteros respecto al subanillo de múltiplos de *n*.

La abundancia de ejemplos de cuerpos hizo pensar a Ernst Steinitz en 1910 en la necesidad de su clasificación, hecha con el concepto de *característica de un cuerpo* y de *subcuerpo primo*. Si es necesario sumar *p* veces el 1, neutro multiplicativo del cuerpo para obtener su neutro aditivo 0 se dice que el cuerpo es de *característica p*. Si la suma repetida del 1 nunca da 0 se dice que el cuerpo es de característica 0. Para cada número primo *p* hay infinitos cuerpos de característica p, llamados cuerpos de Galois, cuyo número de elementos se corresponde con las potencias positivas de *p*.

El subcuerpo generado por los elementos 0 y 1 se llama subcuerpo primo, que es una copia de Z/(*p*) cuando el cuerpo tiene característica p distinta de cero, en tanto que el subcuerpo primo es una copia del cuerpo Q de los números racionales cuando dicha característica es cero. A partir del subcuerpo primo se reproduce el cuerpo inicial por extensiones sucesivas, siguiendo un proceso de inducción transfinito.

El año 1910 también vio la clasificación de los grupos de simetría hecha por Bieberbach. Muchas decoraciones murales árabes se basan en simetrías geométricas, siendo la de la Alambra de Granada su obra excelsa. El número de tipos diferentes de estas decoraciones es limitado, pues combinan traslaciones, simetrías respecto a una recta y rotaciones respecto a un punto. En 1891, E.S. Fedorov probó que hay sólo hay siete tipos diferentes en los frisos lineales y 17 tipos en las decoraciones planas de la decoración de la Alambra y en distintos monumentos en Egipto y Japón.

Los elementos de la Naturaleza cuya disposición atómica presenta simetrías son los cristales. En Cristalografía se aplicó la teoría de grupos en 1849 en los trabajos de Auguste Bravais. En 1890 Fedorov probó que existían 230 tipos diferentes de grupos de simetrías.

La primera parte del problema 18 de Hilbert de 1900 preguntaba si, para cada n, hay un número finito de grupos de simetría n-dimensionales. En 1910 Ludwig Bieberbach respondió afirmativamente, pero incluso hoy no se conoce una fórmula explícita general que dé el número de grupos. Se saben casos particulares, siendo, por ejemplo 4783 el número de grupos de simetría en cuatro dimensiones.

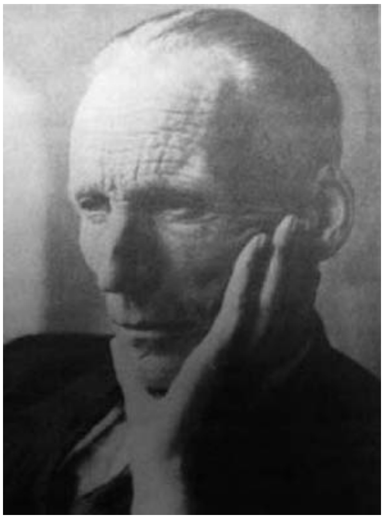

Figura 5. Luitzen Egbertus Jan Brouwer 1881-1966.

En la segunda parte de ese problema, Hilbert preguntaba si existe un tipo de baldosa con la que se pueda cubrir el plano en forma no simétrica. Maurits Escher encontró la solución afirmativa en 1935. En 1966, Robert Berger probó que con 20246 tipos de baldosas se puede recubrir el plano en forma no periódica, ejemplo mejorado por Roger Penrose en 1974 con sólo dos tipos de baldosas. No se sabe si hay algún ejemplo de cubrimiento no periódico del plano con una sola baldosa, resultado que es cierto en el espacio tridimensional, pues Conay determinó en 1993 un recubrimiento no periódico con un solo tipo de poliedro.

El ejemplo de Penrose adquirió relevancia en Física cuando Daniel Schechtman descubrió en 1984 una aleación de aluminio y magnesio cuya estructura molecular tiene la distribución del ejemplo de Penrose. Este tipo de estructuras se las ha llamado quasicristales y su descubrimiento motivó la investigación de sus propiedades y la clasificación de sus estructuras. El estudio de los grupos quasi-cristalográficos ha atraído la atención de muchos matemáticos, como Sergei Novikov y Enrico Bombieri, medallas Fields en 1970 y 1974, respectivamente.

Finalmente, el fecundo 1910 vio el nacimiento del el teorema del punto fijo de Luitzen Brouwer, quien probó que una aplicación continua f con dominio un intervalo cerrado $[a,b]$ y valores en ese mismo intervalo cerrado tiene un punto fijo $x \in [a,b]$, es decir que $f(x) = x$. Hay muchas versiones del teorema del punto fijo, que se ha convertido en una herramienta esencial en Matemáticas y Economía. Dos versiones muy conocidas son la de Stefan Banach de 1922 para aplicaciones contractivas definidas en un espacio métrico completo, o la de Shizuo Kakutani de 1941 para funciones semicontinuas con condiciones de convexidad. Los distintos teoremas del punto fijo, bien topológicos o métricos, junto a sus múltiples aplicaciones han originado el nacimiento de una rama muy viva del análisis matemático, conocida como teoría del punto fijo.

En el primer tercio del siglo las Matemáticas prestaron una gran ayuda a la Física y a la Economía. En 1915 nació la teoría general de relatividad de Einstein y en 1928 el teorema del mínimax de Von Neumann, que supuso unión entre Economía y Matemáticas.

La curvatura de una superficie en un punto P fue definida por Gauss en 1827. Su teorema egregio permite conocer la curvatura de una superficie intrínsecamente, es decir con medidas hechas desde la superficie. Gauss descubrió superficies con curvatura negativa, como la pseudoesfera, y estudió las geodésicas de una superficie, que son líneas sobre la superficie definidas por la condición de mínima distancia. En 1854 Riemann extendió la noción de curvatura a variedades, que pronto se consideraron modelos para explicar el mundo físico. Gregori Ricci en 1892 comenzó a elaborar el cálculo tensorial para demostrar que las leyes de la Física obtenidas con geometría riemanniana son independientes del sistema de coordenadas. En 1901 Gregorio Ricci-Curbastro y

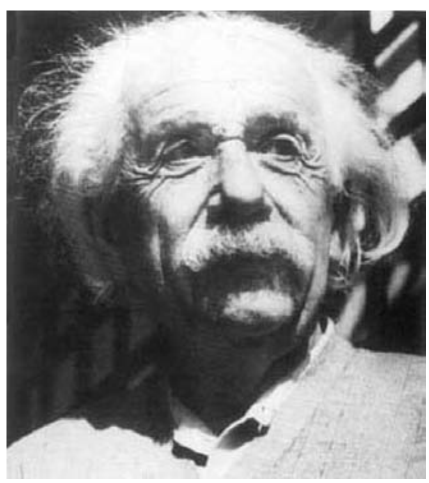

Figura 6. Albert Einstein 1879-1955.

Figura 7. John von Neumann 1903-1957.

Tullio Levi-Civita expresaron varias leyes de física en forma tensorial, asegurando su invariancia respecto a los cambios de coordenadas. Pero la aplicación más interesante se debió a Albert Einstein, quien en 1915 encontró en el cálculo tensorial la herramienta ideal para describir su teoría general de relatividad, utilizando variedades riemannianas de dimensión cuatro, cuya curvatura está determinada por la distribución de materia en el universo y donde los cuerpos libres se mueven sobre geodésicas. Las tres primeras coordenadas de las variedades utilizadas por Einstein son espaciales, siendo el tiempo la cuarta coordenada.

La reducción de la gravitación a geometría motivó buscar la reducción a geometría de otros campos físicos. En 1915, Hilbert de un único principio variacional dedujo las ecuaciones de Einstein y de Maxwell. De esta forma resolvió en parte su sexto problema de la conferencia de 1900 que preguntaba por la axiomatización de la Física. En 1918, Hermann Weyl describió los campos electromagnético y gravitatorio con una variedad afín no riemanniana de dimensión 4, que exigió una nueva definición de geodésica y supuso un avance en el cuarto problema de Hilbert sobre el estudio general de las geodésicas. Aunque ambas teorías son físicamente no totalmente satisfactorias, abrieron el estudio del tratamiento unificado de los campos gravitacional y electromagnético, como parte de un problema más general de unificación de todas las fuerzas en una teoría unitaria.

El teorema del mínimax de Von Neumann de 1928 está relacionado con la toma de decisiones entre varias posibilidades de elección con un conocimiento imperfecto de la situación. De este problema nació la Teoría de Juegos, con la finalidad de desarrollar un modelo matemático del proceso de decisión, tratando formalmente elementos abstraídos de situaciones reales. Antecedentes de la Teoría de Juegos se encuentran en obras de filósofos, como Thomas Hobbes y Jean-Jacques Rousseau, y de matemáticos, como Ernst Zermelo y Emile Borel, entre otros. En 1921, Borel, analizando el juego del póquer, considerando el problema del análisis de los "faroles" y proponiendo el problema de determinar en qué casos existe una estrategia óptima y cómo encontrarla, estableció los fundamentos de la teoría de juegos. En 1928 Von Neumann probó que en los juegos de suma cero con información perfecta[1] existe una estrategia que permite a ambos jugadores minimizar sus pérdidas máximas, que se conoce con el nombre de Teorema del mínimax y está basado en el teorema del punto fijo de Brouwer. Este teorema del mínimax, conocido también como teorema de la estrategia óptima, fue mejorado varias veces por el propio Von Neumann y fue una de las semillas de su libro *La Teoría de juegos y el comportamiento económico*, escrito en 1944 en colaboración con el economista Oscar Morgenstern. En 1950 John Nash generalizó la noción de estrategia óptima y formuló el *Teorema de equilibrio de Nash*[2], recibiendo el Premio Nobel de Economía en 1994. La teoría de juegos se utiliza en la toma de decisiones económicas, políticas y militares.

Finalmente, vamos a terminar este primer tercio del siglo XX comentando tres importantes aportaciones matemáticas: La primera es sobre números trascendentes (1929) y las otras dos sobre dos axiomáticas, la de la Mecánica Cuántica y la de la Teoría de la Probabilidad.

Los griegos conocieron la existencia de números no racionales que son solución de una ecuación polinó-

[1] Que la suma sea cero significa que un jugador gana lo que los otros pierden y que la información sea perfecta significa que cada jugador conoce exactamente las posibles decisiones de los otros jugadores y sus consecuencias.

[2] En los juegos de suma cero, el Teorema de equilibrio de Nash se reduce al teorema del minimax de von Neumann.

Figura 8. Aleksandr Osipovich Gelfond 1906-1968.

mica con coeficientes constantes, como $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{2}$. Se les llama irracionales algebraicos. Es muy fácil construir $\sqrt{2}$ con regla y compás. Los griegos ya sospecharon que $\sqrt[3]{2}$ no se podía construir con regla y compás, lo que fue probado en 1837 por Pierre Wantzel, unos veinte siglos después.

Los números irracionales que no son algebraicos se les llama irracionales trascendentes y su existencia fue probada en 1844 por Joseph Liouville, observando que al aproximar un número irracional solución de una ecuación polinómica de grado n por un número racional *p/q* el error es q^{-n} o mayor[3]. Esta propiedad no la verifica el irracional $\delta =$ 0,10100001000000…..01……, donde el número ceros consecutivos viene dado por los cuadrados de los sucesivos números factoriales, pues al aproximar δ por los números racionales $\frac{p_n}{q_n}$ dados por las sucesivas secciones determinada por los unos, los errores son menores que q_n^{-n}, para cada natural *n*, por lo que δ es un número irracional trascendente.

En 1873 Cantor probó que el conjunto de los números racionales y el de los números irracionales algebraicos es numerable, lo que significa que "casi" todos los números irracionales son trascendentes. Este resultado no dice nada de la trascendencia de números concretos, como el número *e,* para el que Euler había conjeturado en 1748 que era trascendente, resultado probado en 1873 por Charles Hermite al demostrar que para cada exponente racional no nulo *x* se tiene que e^x es un número trascendente. En 1882, Ferdinand Lindemann extendió el resultado de Hermite y obtuvo que para cada número algebraico *x*, diferente de 0, e^x es trascendente, de lo que se dedujeron muchos resultados, por ejemplo:

1. La identidad $e^{\ln x}=x$ implica que $\ln x$ es trascendente si *x* es un número algebraico diferente de 1.
2. De $e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$ y de la relación pitagórica se deduce que cos*x* y sen*x* son números trascendentes cuando *x* es un número algebraico.
3. De $e^{i\pi} = -1$ se deduce que $i\pi$ es trascendente, luego por ser *i* algebraico debe ser π trascendente, de lo que se deduce que con regla y compás no se puede construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado.

Hilbert preguntó en el séptimo problema de la conferencia de 1900 si $2^{\sqrt{2}}$ sería o no trascendente. Conjeturó que a^b sería trascendente si *a* es un número algebraico diferente de 0 o 1 y si *b* es un número algebraico irracional y durante casi 30 años pensó que este problema era más difícil que la hipótesis de Riemann o que el teorema de Fermat. En 1929 Alexander Gelfond probó con un nuevo método que e^{π} es trascendente, lo que llevó a Carl Siegel a demostrar que $2^{\sqrt{2}}$ es trascendente. Poco después, en 1934, Gelfond y Thornald Schneider probaron la conjetura de Hilbert para a^b. En 1970 se dio la Medalla Fields a Alan Baker, quien en 1966 obtuvo que el producto de números trascendentes del tipo Lindemann o Gelfand es también trascendente. En 1978 Carl Siegel recibió el premio Wolf por sus contribuciones en teoría de números. Para el siglo XXI quedan muchos problemas de teoría de números abiertos, como el averiguar si $e+\pi$, $e\pi$, π^e o la constante de Euler son o no números trascendentes.

Muchas leyes físicas se escriben con ecuaciones diferenciales o integrales. Desde final del siglo XVII se desarrollaron métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales, que recibieron un gran impulso en el siglo XVIII. Los métodos para la resolución de ecuaciones integrales llegaron con el siglo XIX y fueron casi completamente elaborados por David Hilbert

[3] En 1955, Klaus Roth mejoró la observación anterior probando que todas las fracciones con denominador q que aproximan un número irracional algebraico tienen un error mayor o igual a $q^{-(2+)}$. Roth recibió la Medalla Fields en 1958.

Figura 9. John von Neumann 1903-1957.

entre la última década del siglo XIX y la primera del siglo XX. Hilbert trabajó no sólo con funciones que actúan sobre números, sino con funcionales que se aplican a funciones, pues los funcionales aparecen en el Cálculo de Variaciones. Las dificultades en el tratamiento ecuaciones integrales y de funcionales llevaron al desarrollo de una teoría abstracta, llamada Análisis Funcional en referencia a su naturaleza y a su origen, que permitió resolver diversos problemas así como crear el marco matemático idóneo para el desarrollo de las Ecuaciones Integrales y del Cálculo de Variaciones. Por ejemplo, en el estudio de ecuaciones integrales, Hilbert tuvo encontró funciones que se expresan como series de Furrier con coeficientes $(x_i)_i$ que verifican que la serie

$$\sum_i x_i^2$$

es convergente. La sucesión $(x_i)_i$ la consideró como un punto en un espacio de infinitas dimensiones al que se dotó de producto escalar mediante la expresión

$$\sum_i x_i y_i .$$

En 1907 Erhad Schmidt y Maurice Fréchet llamaron l^2 a este espacio de Hilbert de sucesiones de cuadrado sumable provisto con un producto escalar definido por

$$\sum_i x_i y_i ,$$

e introdujeron el espacio L^2 formado por las funciones de cuadrado integrable en cierto intervalo $[a,b]$ con el producto escalar $\int_a^b f(x)g(x)dx$. La isometría entre l^2 y L^2 es la esencia del teorema de representación de Frederic Riesz y Ernst Fischer[4].

El Análisis Funcional, además de contribuir al desarrollo de las ecuaciones integrales intervino en la formalización de la Mecánica Cuántica. Distintas motivaciones heurísticas llevaron a la exposición de la Mecánica Cuántica de Werner Heisenberg, utilizando matrices infinitas de observables, y a la de Edwin Schrödinger, basada en las funciones de onda. Ambos recibieron el premio Nobel en 1932 y 1933, respectivamente. En 1926, Hilbert trató de obtener una axiomática de la Mecánica Cuántica de la que se pudiesen deducir los desarrollos de Heisenberg y de Schröndinger. No tuvo éxito, pero provocó que en 1927 John von Neumann, que era entonces su ayudante, reformulase las ideas de Hilbert en términos de los espacios l^2 y L^2. Con el espacio l^2 obtuvo la versión de Heisenberg de la Mecánica Cuántica y con el espacio L^2 dedujo la versión de Schrödinger. La equivalencia entre ambas formulaciones era consecuencia natural del antes citado teorema de representación de Riesz-Fischer, que dos dice que los espacios l^2 y L^2 son isométricos. Esta aportación de von Neumann la podemos encontrar en su obra *Los fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*, donde la Física de la Mecánica Cuántica se describe por operadores en un espacio de Hilbert, siendo, por ejemplo, el principio de incertidumbre de Heisenberg descrito por la no conmutatividad de ciertos operadores[5].

El último descubrimiento que vamos a comentar en este primer tercio del siglo XX es la axiomatización de

[4] Estos dos espacios l^2 y L^2 son casos particulares de una amplia clase de espacios introducidos en 1922 por Stefan Banach, que se llaman los espacios de Banach y dan la estructura perfecta para desarrollar la teoría de las ecuaciones integrales, con la ayuda de un teorema general del punto fijo, también desarrollado por Banach, utilizando una técnica de Joseph Liouville de 1832. La teoría de espacios de Banach tomó nuevo impulso a partir de 1950, gracias a nuevos métodos introducidos por la escuela francesa, destacando las aportaciones de Laurent Schawartz y Alexander Grothendieck, medallas Fields en 1950 y 1966, respectivamente. Esta teoría está experimentando un tercer rejuvenecimiento, visible en la concesión de las medallas Fields en 1994 y 1998 a Jean Bourgain y a William Govers, por la determinación de secciones máximas en un espacio de Banach isomorfas a un espacio de Hilbert y por la prueba de que sólo los espacios de Banach con “mucha simetría” son isomorfos a espacios de Hilbert, respectivamente.

[5] El éxito en la aplicación de los operadores a la Física provocó el desarrollo de las Álgebras de operadores de von Neumann. La clasificación de una clase de estos operadores, los de tipo III, le valió la Medalla Fields a Alain Connes en 1983 y el descubrimiento de ciertos invariantes para nudos, consecuencia del estudio de operadores de tipo II, le proporcionó a Vaugham Jones la Medalla Fields en 1990.

Figura 10. Andrey Nikolaevich Kolmogorov 1903-1987.

la Teoría de la Probabilidad hecha por Kolmogorov en 1933. Los primeros problemas de probabilidades estuvieron relacionados con los juegos de azar y uno ellos, publicado en 1494 en el libro *Summa* de Luca Pacioli fue estudiado por Cardano en 1526 en su *Liber de ludo aleae*, donde aparece la regla de multiplicar probabilidades. No obstante, el nacimiento de la teoría de la probabilidad se puede hacer coincidir con la correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat alrededor de 1645. En 1656 Christian Huygens introdujo el concepto de *valor esperado* como producto de la probabilidad de ganar por el premio obtenido, definición modificada después del descubrimiento de la paradoja de Daniel Bernoulli. En el libro *Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, considerado el primer libro de teoría de probabilidad, ya aparece la *ley de los grandes números* y el cálculo de probabilidades a posteriori, cuando no es posible contar a priori el número de casos favorables posibles. En 1761 Thomas Bayes trabajó sobre el problema de inferir estadísticamente la probabilidad de un suceso por el hecho de que se presente m veces en n ensayos. Su solución llevó al teorema de Bayes de la probabilidad condicional.

En 1777, Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, determinó que $1/\pi$ es la probabilidad de que una aguja caiga sobre alguna línea al lanzarla sobre un papel cuadriculado en el que la distancia entre dos líneas paralelas consecutivas sea el doble de la longitud de la aguja. Por tanto, la frecuencia relativa de este suceso estará cerca de $1/\pi$ cuando el número de lanzamientos es grande, resultado que permite obtener experimentalmente un valor aproximado de π y que se puede considerar una primera aplicación del *Método de Monte Carlo*. En 1809, Gauss, estudiando la distribución de errores al repetir una medición encontró su famosa campana[6] y, en 1812, Pierre Simon de Laplace sistematizó estos resultados en su tratado *Teoría analítica de probabilidades*, describiendo muchas aplicaciones a las ciencias naturales y sociales.

El desarrolló de la Teoría de la Probabilidades exigió su axiomatización, lo que fue pedido por Hilbert como parte de su sexto problema y resuelto por Andrei Kolmogorov en 1931, asignando una probabilidad a cada un suceso de manera que la probabilidad de cada suceso es un número entre 0 y 1, la probabilidad de que no aparezca ningún suceso elemental es 0, la probabilidad del conjunto de todos los sucesos es 1 y la probabilidad de una unión numerable de sucesos disjuntos dos a dos es la suma de la serie de las probabilidades de esos sucesos. También utilizó la medida de Lebesgue en su axiomatización. Kolmogorov recibió el Premio Wolf en 1980.

3. SEGUNDO TERCIO DEL SIGLO XX: DE LA TEORÍA DE DISTRIBUCIONES DE SCHWARTZ (1945) AL TEOREMA DE INDEPENDENCIA DE COHEN (1963)

La Matemática acusó la Segunda Guerra Mundial, que también provocó la interrupción de los Congresos Mundiales de Matemáticos, y, por tanto, la concesión de las medallas Fields. Este nefasto período sólo estimulo el desarrollo de algunas aplicaciones matemáticas útiles en la resolución de problemas relacionados con el conflicto armado.

Al terminar la guerra, Schwartz publicó su Teoría de Distribuciones en 1945, que son funcionales que generalizan de forma genial a las funciones clásicas. Descartes sólo consideró funciones polinómicas. En el siglo XVIII, Euler utilizó funciones definidas por

[6] La distribución normal de probabilidad ya había sido utilizada por Moivre para aproximar la distribución binomial y poder simplificar cálculos de probabilidades de vencer en juegos.

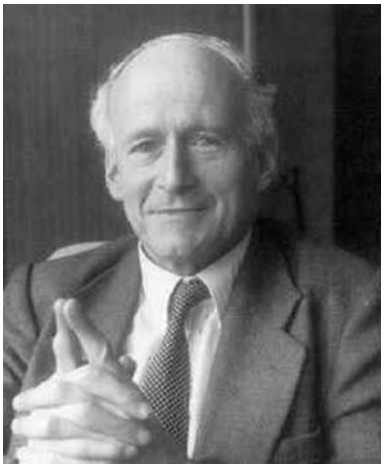

Figura 11. Laurent Schwartz 1915-2002.

expresiones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas en el estudio de distintos problemas físicos. En el sigo XIX, Joseph Fourier definió funciones por series trigonométricas en su estudio de la transmisión del calor y pensó que toda función se puede representar en un intervalo por una serie trigonométrica, lo que Peter Lejeune Dirichlet probó en 1829 que era falso, mediante la función $f(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^n$, que vale 1 si x es racional y 0 si x es irracional.

En 1893, Oliver Heaviside introdujo en sus trabajos sobre electromagnetismo la función δ que vale 0 en todos los puntos salvo en el cero donde vale $+\infty$ y verifica, además, que el área limitada entre la curva $y = \delta(x)$ y el eje OX es 1. Heaviside consideró que la función δ es la derivada de la función H tal que $H(x) = 0$ si $x<0$ y $H(x)=1$ si $x\geq 0$. Trató de justificar su afirmación definiendo una sucesión de funciones derivables $(H_n)_n$ que puntualmente convergen a la función H de Heaviside e indicando que δ es el límite de las derivadas de las funciones H_n, cuando n tiene a infinito. Heaviside fue expulsado de la Royal Society, pues sus compañeros matemáticos no le perdonaron los *errores* de sus afirmaciones. Por ello sólo la función H está asociada al nombre de Heaviside. La función δ está asociada a Paul Dirac, quien la utilizó en 1930 en su tratado *Los Principios de la Mecánica Cuántica*. Tampoco Dirac se salvó de muy severas críticas, particularmente de John von Neumann, autor de una axiomatización de la Mecánica Cuántica comentada en el apartado anterior. Pero la reputación de Dirac provocó el interés por el uso de la función δ primero de los físicos y después de los matemáticos.

Laurent Schwartz, además de introducir el concepto de distribución que extendía el concepto de función, desarrolló técnicas de diferenciación de distribuciones de manera que cuando una función es derivable en sentido clásico también es derivable como distribución. Una de sus principales aportaciones es que ciertas funciones no derivables en sentido clásico y que pueden ser consideradas como distribuciones, como la función H de Heaviside, sí tienen derivada al ser consideradas como distribuciones. La derivada de la distribución H es la distribución δ. Su trabajo, recompensado con la medalla Fields, supuso la posibilidad de extender a distribuciones resultados conocidos para funciones. Por ejemplo, Serge Bernstein había probado en 1904 que los operadores diferenciales que sólo tienen soluciones analíticas son operadores elípticos, resolviendo así el problema diecinueve de la conferencia de Hilbert de 1900. Schwart volvió a proponer ese problema diecinueve con distribuciones; fue resuelto por Lars Hörmander al demostrar que en distribuciones los operadores diferenciales que sólo tienen soluciones analíticas son los *operadores hipoelípticos*. Hörmander recibió la Medalla Fields en 1962 y el Premio Wolf en 1988.

Vamos a considerar tres descubrimientos de mediados del siglo XX que han tenido aplicaciones en otras ciencias: El método simplex de Dantzing de 1947, que podemos situarlo en el origen de la teoría de la optimización, el análisis de Shannon del juego del ajedrez de 1950, que abre un capítulo en la inteligencia

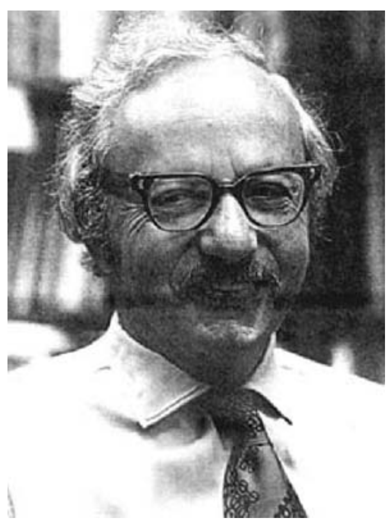

Figura 12. George Dantzig 1914-2005.

Figura 13. Claude Elwood Shannon 1916-2001.

artificial, y, finalmente, el teorema de existencia de equilibrio de Arrow-Debreu de 1954, que originó otro capítulo matemático en Economía.

La teoría de optimización se desarrolló en la primera mitad del siglo XX debido al desarrollo del capitalismo hacia las grandes empresas en Estados Unidos y a la ejecución de grandes planes estatales en la Unión Soviética. Durante la Segunda Guerra Mundial se tuvo que resolver diversos problemas con criterio de optimización, lo que exigió la construcción de ordenadores y el desarrollo de la técnica de *programación lineal*, donde las restricciones vienen dadas por desigualdades lineales y el criterio de optimización se expresa por una función lineal. Si sólo hay dos variables las posibles soluciones están limitadas por una poligonal y el óptimo está en uno de los vértices. Pero si el problema tiene más de dos variables, la línea polígonal se transforma en un poliedro con muchos vértices, lo que puede hacer inaccesible evaluar el criterio de optimización en cada vértice para decidir donde se alcanza el óptimo.

Esta inaccesibilidad provocó la aparición de *método del simplex* en 1940, desarrollado por George Dantzig, Leonid Kantorowich y Tjalling Koopmans[7]. En el método del simplex se evalúa un vértice cualquiera del poliedro, desde el que se pasa a otro vértice adyacente, siguiendo el criterio de optimización, lo que permite llegar a un óptimo local que, por convexidad, es un óptimo global.

Dos extensiones del método del simplex han sido necesarias. La primera fue originada por la exigencia en muchos problemas de que la solución esté dada por números enteros y dio lugar al nacimiento de la programación entera. La segunda extensión surgió por la necesidad de disponer de métodos para la resolución de problemas no lineales, en los que no es aplicable el método del simplex, pues sin linealidad no hay convexidad y entonces un óptimo local puede no ser óptimo global. El artículo que sentó las bases y dio nombre a la programación no lineal fue escrito en 1950 por Harold Kuhn y Albert Tucker, estableciendo condiciones necesarias para la existencia de óptimo, que se utilizan en muchos algoritmos de programación no lineal.

Turing, en su artículo de 1950 *Máquinas de cálculo e Inteligencia*, sugirió la posibilidad de que las máquinas pudiesen pensar y propuso que podemos decir que una máquina piensa si una persona que intercambie mensajes con ella no puede distinguir que las respuestas no están dadas por otro ser humano. El término "*inteligencia artificial*" se adoptó en el congreso de Hanover de 1956, donde estuvieron Marvin Minsky, John McCarthy, Allen Newell y Herbert Simon, que recibieron el Premio Turing en 1969, en 1971 y en 1975 los dos últimos.

El sueño de la inteligencia artificial fue explícitamente formulado por Herbert Simon en los cincuenta, pensando que en diez años se tendrían programas capaces de derrotar a campeones mundiales de ajedrez, de demostrar nuevos teoremas y de sugerir nuevas teorías en Sicología. Sólo en el juego del ajedrez se ha cumplido la predicción de Simon, quien debe compartir el mérito de esta profecía con Charles Babbage, el inventor visionario del primer ordenador que en 1864 consideró la posibilidad de construir una máquina que jugase al ajedrez y elaboró un conjunto de instrucciones, y con Leonardo Torres y Quevedo, quien en 1890 formalizó completamente la estrategia para hacer jaque mate cuando sólo quedan dos reyes y

[7] Kantorowich y Koopmans recibieron el Premio Nobel de Economía en 1975.

Figura 14. John von Neumann 1903-1957.

una torre. El primer juego de ajedrez elaborado en términos computacionales aparece en un famoso artículo de Claude Shannon de 1950.

La primera partida entre un hombre y un programa fue entre el científico Alick Glennie y el programa Turochamp, escrito por Alan Turing, quien tuvo que simular la ejecución del programa manualmente, dada la baja capacidad de los computadores de esa época. Glennie venció en 29 movimientos. La situación en 1980 varió sustancialmente. El Gran Maestro Helmut Pfleger jugó 26 partidas simultáneas, de las que cinco eran contra un programa de ordenador. Cinco de esas partidas, incluyendo una ganada por el ordenador, fueron presentadas a análisis de expertos, entre los que estaban Kornoi, Pfleger y Kasparov. Salvo Kasparov, todos fallaron en identificar cual era la partida en la que Pfleger había jugado contra el ordenador. En 1996, Gary Kasparov perdió contra el programa global *Deep Blue*. En 1997, Deep Blue derrotó a Kasparov en un torneo por 3,5 contra 2,5 puntos.

Los grandes éxitos de la Mecánica en diversas explicaciones de fenómenos naturales llevaron a León Walras en 1874 a establecer un paralelismo entre Economía y Mecánica, presentando las leyes de mercado y el equilibrio económico como los equivalentes económicos de la ley de gravitación y del equilibrio en Mecánica. Walras conjeturó que el desarrollo del mercado tiende hacia un equilibrio. En 1933, el economista Kart Schlesinger y el matemático Abraham Wald fueron los primeros en demostrar formalmente la existencia de equilibrio para el modelo de Walras descrito por un sistema de ecuaciones. En 1938, John von Neumann trató este problema no en términos de ecuaciones, como se había hecho hasta entonces, sino con inecuaciones, probando en un caso particular que la existencia de equilibrio se reduce al estudio de un problema de mínimax, para lo que utilizó una versión del teorema de Brouwer del punto fijo. El final de la evolución de estas ideas de von Neumann se encuentra en su libro "*La teoría de juegos y el comportamiento económico*", publicado con Morgesten en 1948.

Con una extensión del teorema del punto fijo de Brouwer de 1941 debida a Kakutani, consiguieron probar Kenneth Arrow y Gerald Debreu en 1954 la existencia de equilibrio para las ecuaciones de Walras, suponiendo que la razón del cambio de precio para cada uno de los productos es proporcional al exceso de demanda, lo que les llevó a obtener los Premios Nobel de Economía en 1972 y en 1983, respectivamente.

Las nuevas posibilidades facilitadas por la simulación con ordenadores permitieron que Stephen Smale probara en 1982 el teorema de equilibrio de Arrow y Debreu sin utilizar teoremas del punto fijo. No obstante, este teorema de equilibrio de Arrow y Debreu depende de suponer que la variación relativa del precio de cada producto es proporcional al exceso de su demanda, lo que sólo constituye una primera aproximación. Si se toma la hipótesis más realista de que el precio de cada producto depende del exceso de demanda de los demás productos, entonces el mercado puede no tender hacia un punto de equilibrio.

Figura 15. Andrey Nikolaevich Kolmogorov 1903-1987.

En la parte final del segundo tercio del siglo XX se obtuvieron dos resultados muy destacados, el teorema KAM en 1962 y el teorema de independencia de Cohen en 1963.

El estudio matemático del movimiento de los cuerpos es posible desde el descubrimiento por Newton entre 1664 y 1666 del cálculo infinitesimal y de las tres leyes de la dinámica, lo que le permitió probar en el primer libro de sus *Principia* que el movimiento de un planeta alrededor del Sol obedece las tres leyes establecidas por Kepler en 1618. Pero los planetas no están sometidos solamente a la fuerza gravitatoria del Sol sino que además unos se atraen a otros, lo que origina que las órbitas no son necesariamente ni cerradas ni perfectas elipses, por lo que el problema del movimiento planetario no es trivial. El propio Newton intentó estudiar la perturbación que ocasionaba la Luna a la Tierra en su movimiento alrededor del Sol. Obtuvo una solución aproximada considerando sólo las fuerzas de atracción entre el Sol, la Tierra y la Luna. El mismo método fue utilizado por Euler en 1748 para calcular la perturbación que Júpiter y Saturno se causan en su movimiento alrededor del Sol.

Soluciones exactas del problema de los tres cuerpos fueron encontradas por Joseph Louis Lagrange en 1772, quien probó, por ejemplo, que es posible tener tres cuerpos moviéndose en tres órbitas elípticas con el baricentro del sistema en un foco común, o que si los cuerpos están localizados en los vértices de un triángulo equilátero entonces el triángulo gira alrededor del baricentro del sistema. En 1906 se probó que esta segunda situación corresponde al sistema formado por el Sol, Júpiter y el asteroide Achiles.

Entre 1799 y 1825 aparecieron los cinco volúmenes de Laplace titulados *Mecánica Celestial*, resumen de siglo y medio de descubrimientos. Laplace escribió que la evolución del universo pasada y futura, se podría haber calculado exactamente si se hubiese conocido la posición y la velocidad de cada partícula en un instante. El optimismo de Laplace no evitó que dos problemas fundamentales permaneciesen abiertos: Encontrar la solución exacta del movimiento de un sistema formado por tres o más cuerpos, y determinar la estabilidad de la solución obtenida. Respecto a este segundo problema se deseaba saber si pequeñas perturbaciones sobre un planeta sólo ocasionan pequeñas variaciones en su órbita o si, por el contrario, pueden enviar al planeta a vagar por la inmensidad del espacio. También se deseaba saber el efecto acumulativo de sucesivas perturbaciones sobre un planeta.

El problema de la estabilidad del Sistema Solar llamó la atención al Rey Óscar II de Suecia, quien añadió este problema a una lista de cuestiones cuyas soluciones serían recompensadas con un premio que estableció en 1885 con motivo de su 60 cumpleaños.

Fue premiado Poincaré[8] por su memoria *Sobre el Problema de los Tres Cuerpos y las Ecuaciones de la Dinámica*, donde, aunque no consiguió demostrar si el Sistema Solar es estable o no, dio un salto cualitativo en el estudio de la Dinámica de Sistemas con la introducción de nuevos métodos de mecánica celeste basados en estudios topológicos de ecuaciones diferenciales no lineales, que por su dificultad no habían sido considerados hasta entonces. Estos métodos están en su obra *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, trilogía que publicó entre 1892 y 1899.

El problema de la estabilidad fue retomado por Kolmogorov en 1954, quien esbozó un método desarrollado por Vladimir Arnol'd y Jürgen Moser en 1962, en un trabajo conocido como *el teorema KAM*, título que aglutina las iniciales de sus autores. Probaron que para pequeñas perturbaciones la mayoría de las órbitas son estables y que una si una órbita perturbada no es periódica difiere poco de la órbita periódica del sistema no perturbado, por lo que se la llama órbita *casi-periódica*. Antes indicamos que Kolmogorov recibió el Premio Wolf en 1980. En 1994 lo recibió Moser. Una reciente generalización de este resultado le valió a su autor, Jean Christophe Yoccoz, la Medalla Fields en 1994.

Estos trabajos han tenido una aplicación muy reciente en el estudio de la estabilidad de las órbitas de las partículas elementales en los aceleradores de partículas, donde el problema de la estabilidad de sus

[8] Quien tuvo que devolver el premio para compensar los gastos de impresión de su trabajo, que no se pudo distribuir por contener un error, cuya subsanación dio lugar a contribuciones muy importantes.

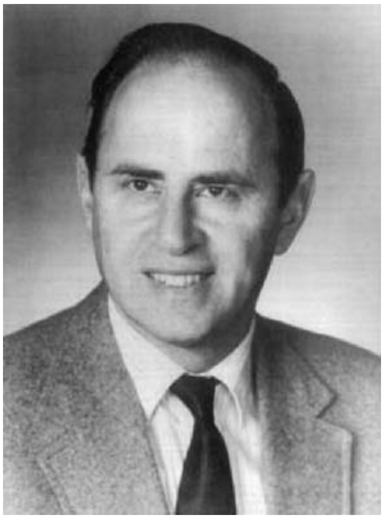

Figura 16. Paul Joseph Cohen 1934-2007.

órbitas es fundamental para que no pierdan energía en choques con las paredes del acelerador.

Finalmente, vamos a terminar esta breve exposición de descubrimientos del segundo tercio del siglo XX con el teorema de independencia de Cohen de 1963.

A finales del siglo XIX, Cantor definió que dos conjuntos tienen el mismo cardinal si entre ellos puede establecerse una biyección[9]. Era conocida una biyección entre el conjunto N de números naturales y el conjunto $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ de los números enteros. Cantor estableció otra biyección entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números racionales positivos, utilizando el método diagonal que descubrió John Farey en 1816. Poco más tarde, en 1874, Cantor descubrió que los números reales no pueden ponerse en correspondencia con los números naturales, pues dada una sucesión de números reales siempre existe un número real diferente de los números de la sucesión[10], lo que originó el deseo de saber si existe un subconjunto de números reales que tengan "*más elementos*" que el conjunto de los números naturales, pero "*menos*" que el conjunto de los números reales, lo que con más precisión significa que no exista una biyección de ese subconjunto ni con el conjunto de los números reales ni con el conjunto de los números enteros. En 1883 Cantor conjeturó que no, afirmación que se la conoce como "*hipótesis del continuo*", lo que no debió convencer a Hilbert, quien en su conferencia de 1900 preguntó en el primero de los problemas que planteó por la existencia de cardinales entre el cardinal del conjunto de los números naturales y el cardinal del conjunto de los números reales.

En 1938 Kurt Gödel probó que el universo de los conjuntos constructibles satisface los axiomas de Zermelo Fraenkel de la teoría de conjuntos y la hipótesis del continuo. Pero en 1963, Paul Cohen añadió otros conjuntos al universo de Gödel de los conjuntos constructibles, y obtuvo así universos que satisfacen los axiomas de Zermelo-Fraenkel y también la negación de la hipótesis del continuo, con lo que probó que la hipótesis del continuo es independiente del resto de axiomas de la teoría de conjuntos y fue distinguido con la Medalla Fields en 1966. Este resultado de Cohen motiva que en muchos teoremas se indique si se han obtenido utilizando la hipótesis del continuo o bien su negación. También hay muchos resultados que son independientes de admitir o de negar la hipótesis del continuo.

4. ÚLTIMO TERCIO DEL SIGLO XX: DE LA CLASIFICACIÓN DE LOS GRUPOS FINITOS (1972) A LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE KEPLER (1998)

Veremos que en el tercio final del siglo XX se producen grandes descubrimientos, de los que muchos son teoremas muy largos, cuyas demostraciones necesitan ayuda de ordenador. Así sucede con la clasificación de los Grupos Finitos comenzada por Gorenstein en 1972 y con el problema de los cuatro colores, resuelto por Appel y Haken en 1976.

Los babilonios conocían la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado. Las fórmulas para hallar las raíces de las ecuaciones de grados 3 o 4 las obtu-

---

9 Esta definición había sido anticipada por Duns Scotus en el siglo XIII, por Galileo en 1638 y por Bolzano en 1851.

10 Ese número real diferente de los números de la sucesión se puede construir de forma que su cifra decimal n-ésima sea diferente de 9 y de la cifra decimal n-ésima del número que ocupa el lugar n en la sucesión.

Figura 17. Daniel Gorenstein 1923-1992.

vieron Nicolo Fontana (conocido como Tartaglia), Gerolamo Cardano y Ludovico Ferrari en el siglo XVI. Paolo Ruffini en 1799 y Niels Abel en 1824 demostraron que no hay fórmulas algebraicas que den la solución general de una ecuación de grado quinto. En 1832, Evaristo Galois introdujo los ***grupos de permutaciones*** para determinar que ecuaciones admiten soluciones que puedan expresarse por fórmulas algebraicas. En 1849 Augusto Bravais introdujo los ***grupos simétricos*** para el estudio de problemas de cristalografía. La aparición de estructuras de grupo en diferentes ramas de la Ciencia motivó que Arthur Cayley introdujese el concepto abstracto de *grupo* en 1849.

Galois factorizó los grupos en ***grupos simples***, caracterizados por tener sólo dos factores: el mismo grupo y el subgrupo trivial. Por tanto, para clasificar los grupos basta hacerlo con los grupos simples. En 1888, Wilhelm Killing elaboró una primera clasificación de los *Grupos de Lie*[11], que fue perfeccionada por Elie Cartan en 1894, utilizando los grupos $SO(n)$ y $SU(n)$ de matrices ortogonales y matrices unitarias $n \times n$.

Pero la clasificación de los grupos simples finitos es complicada. Al final del siglo XIX se conocían seis familias de grupos simples y otros cinco grupos simples descubiertos en 1861 por Émile Mathieu en un estudio sobre geometrías finitas. El mayor de esos cinco grupos tenía unos 250 millones de elementos. De las seis familias de grupos simples finitos, cuatro eran equivalentes a las familias de grupos de Lie, la quinta familia era de grupos cíclicos y la sexta estaba formada por los grupos de permutaciones de Galois.

Nuevas familias de grupos simples finitos fueron encontradas por Claude Chevalley en 1957 y por Zvonimir Janko en 1965. Comenzó un período apasionante de descubrimientos de nuevos grupos simples finitos que llevó a la identificación de 18 familias y 26 grupos finitos esporádicos, de los que el mayor era un *monstruo* de unos 10^{54} elementos. Como en física de partículas, muchos de esos grupos fueron primero predichos teóricamente y luego encontrados. El referido monstruo fue predicho por Bernd Fischer y Robert Griess en 1973 y construido por Griess en 1980.

En 1972, Daniel Gorenstein elaboró un proyecto para demostrar que cualquier grupo simple finito pertenece a una de las 18 familias o es uno de los 26

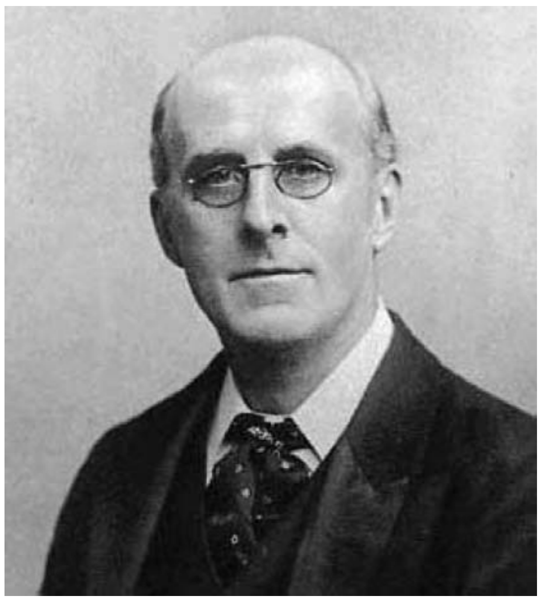

Figura 18. Alfred Bray Kempe 1849-1922.

[11] Los grupos de Lie fueron introducidos por Sophus Lie en 1874. El quinto problema de Hilbert preguntaba si un grupo localmente euclideano era un grupo de Lie, y fue resuelto afirmativamente por Andrew Gleason, Deane Montgomery y Leo Zippin en 1952. La teoría de los grupos de Lie es muy utilizada en la Teoría del Campo Unificado.

grupos esporádicos. Este proyecto redujo los casos posibles a un centenar y obtuvo para cada caso un teorema de clasificación. Se completó el proyecto en 1985 gracias a los esfuerzos de alrededor de un centenar de matemáticos, que redactaron un centenar de artículos, que reúnen unas 15.000 páginas.

El problema de los cuatro colores surgió en 1852 cuando Francis Guthrie pensó ante un mapa de Inglaterra que cuatro colores serían suficientes para colorear cualquier mapa de manera que dos regiones adyacentes tuviesen diferente color, suponiendo que las fronteras entre las regiones no fuesen ni demasiado simples ni demasiado complejas. En 1879, Alfred Kempe publicó una demostración de esta afirmación, pero en 1890, Percy Heawood descubrió un error en la prueba y observó que el argumento de Kempe sólo probaba que con cinco colores se podía colorear un mapa de manera que las regiones adyacentes tuviesen colores dife-rentes. Todos los intentos de arreglo de la prueba de Kempe llevaban a grandes cantidades de posibles configuraciones y sólo consiguieron demostrar la certeza de la conjetura de Guthrie para un número muy limi-tado de posibles configuraciones.

En 1976, Kenneth Appel y Wolfgang Haken resolvieron en positivo el problema de los cuatro colores, utilizando muchas horas de trabajo de ordenador, que no parece se pueda sustituir por una comprobación manual de duración razonable. Creemos que en el teorema de Appel y Haken el ordenador hace un papel intermedio insustituible y que estamos en una nueva época de las Matemáticas dominada por pruebas largas y complejas, que exigen división del esfuerzo entre los miembros de un equipo y ayuda de ordenador. Apoya esta creencia la utilización del superordenador CRAY en la refutación de la conjetura de Mertens, hecha en 1983 por Hermann te Riele y Andrew Odlyzko. El origen de la conjetura de Mertens está en un trabajo de Möbius de 1832, donde consideró la clase C de números que tienen todos los exponentes igual a uno en la descomposición en factores primos. Mertens asignó a cada número de la clase C el valor 1 o -1, según que el número de factores fuese par o impar. Por inducción definió la función $M(n)$ como la suma de los valores de $M(n)$, para los números m de la clase C menores o iguales a n En 1897 Franz Mertens calculó los 10.000 primeros valores de la función M y conjeturó que para cada m de la clase C se verifica:

Figura 19. Benoit Mandelbrot 1924-.

$$-\sqrt{n} \le M(n) \le \sqrt{n}.$$

La conjetura de Mertens está relacionada con la hipótesis de Riemann, que es el problema más importante por resolver en Matemáticas.

Vamos a describir brevemente otros dos descubrimientos de este período: Los Fractales y los invariantes de Jones en teoría de nudos.

El origen de los fractales se sitúa en 1906, cuando Helge von Koch construyó una región plana de área finita cuya frontera puede tener longitud infinita. Von Koch dividió cada lado de un triángulo equilátero en tres partes iguales y sustituyó el tercio central de cada lado por un nuevo triángulo equilátero; la repetición sucesiva de este proceso originó una figura parecida a un copo de nieve, que tiene área finita con frontera de longitud infinita, pues en cada etapa se multiplica su longitud por 4/3. Por el factor 4/3 se dice esta figura tiene dimensión 1,2618595, ya que $3^{1,2618595} = 4$. Esta definición de dimensión está relacionada con la construcción de la figura y la introdujo Felix Hausdorff en 1918.

Las figuras que tienen dimensión (Hausdorff) no entera se llaman *fractales*. Para cada número real r entre 1 y 2 existe una curva fractal de dimensión r. Otro fractal es la esponja de Menger que se obtiene dividiendo un cubo en 27 cubos iguales y quitando los siete centrales, situados en el centro de cada cara y en el centro del cubo. Repitiendo este proceso indefinidamente se obtiene una superficie de dimensión, aproximadamente, 2,72 y que encierra un volumen nulo.

Los ejemplos considerados de fractales son muy sencillos, pero hay otros que el proceso constructivo necesita el apoyo de los ordenadores. Algunos fractales se han introducido en el arte moderno como nuevas formas. Otros han generado muchas aplicaciones como el fractal de Mandelbrot, obtenido aplicando repetidamente la transformación $x^2 = c$ en el plano complejo, partiendo de un valor arbitrario inicial de x Cuando $c = 0$ se tienen tres casos diferentes según la situación del punto inicial x. Si el módulo del valor inicial x es menor que 1, la aplicación sucesiva de la transformación lleva el punto hacia cero. Si el módulo del punto inicial x es mayor que uno, el punto se va alejando al aplicar sucesivamente la transformación. Cuando el punto inicial x es 1, todos los puntos obtenidos al aplicar sucesivas transformaciones están situados sobre al circunferencia unidad. Hay pues dos regiones de atracción, hacia cero y hacia el infinito, separadas por una frontera circular.

Cuando c es distinto de cero hay muchos casos diferentes. El número de regiones de atracción varía con c y la frontera entre diversas regiones puede ser una curva fractal, de una o varias piezas, o muchos puntos dispersos.

El conjunto de Mandelbrot está formado por los puntos c para los que la frontera entre las distintas regiones consta de una sola pieza. Por su extraña apariencia se ha convertido en una forma geométrica famosa. Adrien Douady y John Hubbard probaron en 1985 que es un conjunto conexo y Jean Christophe Yoccoz probó en 1994 que es localmente conexo, lo que fue uno de los resultados por los que recibió la Medalla Fields en 1994. En la actualidad el conjunto de Mandelbrot es un sistema de referencia en el estudio de los sistemas dinámicos complejos y los fractales se están utilizando mucho en problemas de modelización. Por la gran variedad de las aplicaciones de los fractales, Mandelbrot recibió el Premio Wolf de Física en 1993.

Por otra parte, los invariantes de Jones en teoría de nudos aparecieron en 1984. Los *nudos* son curvas cerradas en el espacio de tres dimensiones y aparecieron en un libro Johann Listing[12] de 1848, donde se acuñó el término Topología. Uno de los primeros problemas de Teoría de nudos es su clasificación[13]. Si se considera un nudo como un tubo sólido cuya sección es un círculo, entonces se puede asociar al nudo la superficie bidimensional que limita el tubo. Esta idea no permite clasificar los nudos, pues cualquiera de estas superficies bidimensionales es topológicamente equivalente a un toro. En cambio, Geoffrey Hemion clasificó en 1978 los nudos desde un punto de vista topológico asociando a cada nudo no el tubo sólido antes indicado, sino la superficie tridimensional determinada por el interior del tubo. Además de esta clasificación topológica de los nudos, se han intentado otras clasificaciones asociadas a invariantes relacionados con los nudos. En 1928 James Alexander definió un invariante de tipo polinómico, que a cada nudo asocia un polinomio simétrico con coeficientes enteros de manera que si dos nudos tienen diferentes invariantes polinómicos no se puede pasar por deformación continua de un nudo al otro.

El invariante de Alexander puede ser idéntico para nudos con orientación diferente que imposibilite que se pueda pasar de un nudo a otro por una deformación continua. Para resolver este problema de que nudos topológicamente diferentes tengan el mismo invariante de Alexander, Vaughan Jones propuso en 1984 un nuevo invariante polinómico respecto a las variables x y x^{-1}. Jones llegó a sus invariantes desde el estudio de Álgebras de von Neumann y luego descubrió relaciones inesperadas con la Mecánica Estadística. Recibió la Medalla Fields en 1990. El invariante de Alexander es inadecuado para el estudio de los nudos en las cadenas de DNA, donde se ha aplicado invariante de Jones con resultados interesantes[14].

12 Johann Listing fue discípulo de Gauss.

13 En principio la clasificación de nudos siguió las ideas de Riemann, Möbius y Klein en la clasificación de superficies bidimensionales, o de Thurston en la clasificación de superficies tridimensionales.

14 Nos haremos una idea de la complejidad de esta aplicación recordando que en los hombres la cadena de DNA puede tener casi un metro de longitud, está situada en el núcleo de una célula que puede tener un diámetro de unas 5 millonésimas de metro, y, además, es capaz de duplicarse.

Figura 20. Vaughan Frederick Randal Jones 1952- .

Edward Witten, Medalla field en 1990, obtuvo los polinomios de Jones por integrales de Feynman calculadas sobre una superficie particular, definida con teoría de cuerdas, y encontró relaciones de la teoría de cuerdas con los polinomios de Jones y con los espacios topológicos de Donaldson, que le permitieron reinterpretar el teorema del índice de Michael Atiyah e Isadore Singer desde un punto de vista cuántico. Maxim Kontsevich generalizó los polinomios de Jones y obtuvo nuevos invariantes, no sólo para los nudos, sino también para las superficies tridimensionales. Kontsevich obtuvo la Medalla Fields en 1998, compartida con Richard Borcherds.

Vamos ya a terminar esta exposición de algunos grandes descubrimientos del siglo XX con otros dos teoremas largos: La prueba de Wiles del último teorema de Fermat de 1995 y la solución de Hale de 1998 al problema de Kepler del empaquetamiento de bolas ocupando el mínimo espacio posible.

En 1637, Fermat leyó la *Aritmética* de Diofanto y anotó en el margen la siguiente observación:

> "*La descomposición de un cubo en suma de dos cubos, o en general la descomposición de una potencia n-ésima en suma de dos potencias n-ésimas, es imposible si n es mayor que dos. He encontrado una prueba notable de este hecho, pero este margen tan pequeño no puede contenerla.*"

Esta observación se le conoce como *el último teorema de Fermat*, y durante 350 años ha sido uno de los más famosos problemas en Matemáticas. El matemático y poeta Omar Khayyam esbozó una prueba para los cubos en 1070. Entre los papeles de Fermat se descubrió una prueba para n = 4, que utiliza el ingenioso *método descendente infinito*, que consiste en probar que si hay tres números naturales x, y y z tales que $x^4+y^4=z^4$ entonces existen otros tres números naturales $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ tales que $\bar{x}^4+\bar{y}^4=\bar{z}^4$ de manera que los nuevos números son, respectivamente, menores o iguales que los iniciales y uno de ellos es estrictamente menor. Repitiendo este proceso se llega a una contradicción que demuestra que no existen tres números naturales x, y y z tales que $x^4+y^4=z^4$. Desde entonces los mejores matemáticos trabajaron sobre este problema y aportaron soluciones parciales. Euler dio una prueba para n = 3 en 1753; Dirichlet y Legendre publicaron una prueba para n = 5 en 1825; lo mismo hizó Lamé en 1839 n = 7 y Kummer probó el último teorema de Fermat para cada n menor que 100 entre 1847 y 1857. En 1980 se había comprobado que la afirmación de Fermat era cierta para cada n menor que 125000, pero la demostración general era desconocida.

La equivalencia entre

$$a^n+b^n=c^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n=1$$

transforma el problema de Fermat en encontrar soluciones racionales de la ecuación $x_1^n+x_2^n=1$. Cuando x_1 y x_2 varían en R se tiene que la ecuación $x_1^n+x_2^n=1$ define una curva. En general, cuando $x=x_1+ix_2$ e $y=y_1+iy_2$ son números complejos se tiene que de la ecuación $x^n+y^n=1$ se deduce una ecuación entre x_1, x_2 y y_1 cuya gráfica es una superficie en R^3, que no tiene agujeros para $n=2$ en tanto que el número de agujeros para $n=3$, 4 y 5 es, respectivamente, 1, 3 y 6. En 1922, Leo Mordell propuso la siguiente conjetura:

"*Las únicas ecuaciones $x^n+y^n=1$ que admiten infinitas soluciones racionales son las que definen superficies sin agujeros o con un agujero a lo sumo*". En 1962, Igor Shafarevich propuso otra conjetura, de la que Parshin demostró en 1968 que se deduce la conjetura de Mordel. La conjetura de Shafarevich fue demostrada en 1983 por Gerd Faltings, recibiendo la Medalla Fields en 1986. Lo que Faltings había demostrado es que para n > 3 la ecuación $x^n+y^n=1$ tiene a lo sumo un número finito de soluciones racionales. En principio, este resultado no probaba nada respecto al teorema de Fermat, pues de una solución racional de $x^n + y^n = 1$ se deduce la existencia de tres números enteros a, b y c tales que $a^n + b^n = c^n$. No obstante, en 1985, Andrew Granville y Roger Heath-Brown dedujeron del teorema de Falting la validez del teorema de Fermat para infinitos exponentes primos.

La prueba definitiva del teorema de Fermat para los exponentes mayores que 2 fue obtenida por otro camino indirecto, pasando por la conjetura de Taniyama. Esta vez el camino seguido partió de la observación de que la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

se puede parametrizar por las funciones trigonométricas seno y coseno, pues $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Taniyama conjeturó en 1955 que ciertas funciones modulares, más generales que las trigonométricas, parametrizan de forma similar una curva elíptica arbitraria.

En 1985, Gerhard Frey observó que para $n > 2$ la igualdad $a^n + b^n = c^n$, siendo a, b y c números naturales, implica que la curva elíptica $y^2 = x\left(x + a^n\right)\left(x - b^n\right)$ tendría propiedades *demasiado buenas*, lo que le llevó a dudar de la existencia esos tres números naturales a, b y c tales que $a^n + b^n = c^n$. En 1986, Ken Ribet demostró que de la existencia de tres números naturales a, b y c tales que $a^n + b^n = c^n$ se deduce que la curva elíptica $y^2 = x\left(x + a^n\right)\left(x - b^n\right)$ considerada por Frey no puede ser parametrizada por funciones modulares, lo que significa que el teorema de Fermat es consecuencia de la conjetura de Taniyama. Por tanto, lo que se debía hacer era probar la conjetura de Taniyama. Finalmente, en 1995, Andrew Wiles consiguió probar la conjetura de Taniyama para una clase de curvas elípticas, llamadas semiestables, a la que pertenece la curva de Frey. Por su resultado histórico Wiles recibió el Premio Wolf en 1995-96, pero no pudo recibir la medalla Fields en 1998 por haber superado los 40 años. Su trabajo fue completado en 1999 por Bian Conrad, Richard Taylor, Christophe Breuil y Fred Diamond probando que la conjetura de Tamiyana también es cierta para las curvas elípticas no semiestables.

El último gran descubrimiento que vamos a comentar es la solución del problema de Kepler sobre el empaquetamiento de bolas con la máxima densidad posible, que surgió en 1600, cuando Sir Walter Raleig preguntó al matemático Thomas Harriot una fórmula para calcular el número de bolas de cañón que hay en un montón de bolas. Como la respuesta depende de la colocación, Harriot se interesó por la forma más eficiente de apilarlas. En 1606 este problema atrajo también la atención del astrónomo Kepler, que lo relacionó con la formación de cristales de nieve o con la formación de celdas en una colmena y sospechó que la forma más eficiente de colocación consistía en que al crecer los sucesivos elementos intentasen rellenar al máximo los espacios intermedios siguiendo los centros de las bolas cierta configuración. En 1611, Kepler planteó el problema matemático subyacente de encontrar la configuración de esferas de un radio dado de máxima densidad. En el plano y con círculos del mismo radio, Kepler encontró una densidad máxima de 0,785 para la configuración cuadrada y 0,907 para la configuración hexagonal. En 1831, Gauss probó que la configuración hexagonal es la de máxima densidad cuando los centros de los círculos forman un retículo plano, lo que quiere decir que los centros de los círculos forman una configuración simétrica de paralelogramos. Este resultado fue completado por Axel Tune en 1892 al probar que la confi-guración hexagonal es la mejor posible. Tune publicó su prueba en 1910.

Figura 21. Andrew John Wiles- .

Las configuraciones en el espacio se obtienen colocando los estratos de esferas unos encima de otros, pudiendo estar los centros de las esferas alineados o no. Las esferas en cada estrato pueden seguir distintas distribuciones, como la disposición cuadrada o hexagonal. Kepler calculó que las densidades de las configuraciones cuadrada y hexagonal alineadas son 0.524 y 0.605 alineada, en tanto que las densidades de

Figura 22. Johannes Kepler 1571-1630.

las configuraciones cuadrada o hexagonal no alineadas son 0.740. También Gauss demostró que la configuración hexagonal no alineada es la mejor entre las configuraciones reticulares, lo que significa que los centros de las esferas forman una configuración simétrica de paralelepípedos. El caso general, constituye la parte tercera del dieciochoavo problema de Hilbert de 1900 y fue resuelto en 1998 por Thomas C. Hales, con la ayuda de su discípulo Samuel Ferguson y de un potente ordenador. Su prueba recuerda la del problema de los cuatro colores, pues consiste en ir reduciendo el número de configuraciones con mucha utilización de ordenador, hasta que sólo quede un número reducido de casos. Fue L. Fejes Toth quien sugirió a Hales la utilización del ordenador. La prueba de Hale ocupa 250 páginas.

Este problema tiene interés práctico en compresión de datos y transmisión de mensajes.

Hales es profesor en la Universidad de Pittsburg y terminó en abril de 2008 un año sabático[15] desarrollando el programa Flyspeck, acrónimo del título *The Formal Proof of Kepler*, con el objetivo indicado en su título.

El problema de encontrar la mejor configuración reticular de hiperesferas ha sido resuelto hasta dimensión 8, si bien la configuración reticular no corresponde siempre a la de máxima densidad, según probaron John Leech y N.J.A. Sloane en 1971. El caso de dimensión 24 es particularmente interesante. En 1965 Leech construyó una configuración, conocida como retículo de Leech que, probablemente, es la mejor entre las configuraciones reticulares y en la que cada hyperesfera está en contacto con 196.560 hyperesferas. Del estudio de este retículo dedujo John Conway en 1968 tres de los 26 esporádicos grupos utilizados en el teorema de clasificación de los grupos finitos simples.

5. COMENTARIOS FINALES

Se comparte la impresión de que las matemáticas son una de las elaboraciones humanas intelectualmente más perfectas, atractivo que seguirá motivando a las nuevas generaciones de matemáticos en este siglo XXI y también en los siglos sucesivos, quienes deberán desarrollar la Matemática adecuada a los problemas cada vez más complejos sugeridos por otras ciencias. Muchas soluciones serán largas, difíciles e incluso tediosas, precisando la colaboración de potentes equipos humanos e informáticos para obtener soluciones aproximadas, que podrán preceder en años a las soluciones exactas obtenidas con métodos formales, por los que nunca se deberá perder el interés.

[15] Este año sabático siguió está programación:
Max Planck Institute, Bonn, Germany, May 1-31, 2007
E.N.S. Paris, France, 6/1/2007- 7/15/2007
Reykjavik, Iceland, 7/15/2007 - 8/15/2007
Pittsburgh, PA, 8/15/2007 - 8/22/2007
Mathematical Institute, Hanoi, Vietnam, 8/22/2007-1/4/2008
AMS Meetings, San Diego, CA 1/5/2008 - 1/9/2008
Pittsburgh, PA 1/9/2008 - 1/15/2008
Math and Computer Science, Radboud University, Nijmegen, Netherlands, 1/15/2008 - 4/30/2008
Strasbourg, France, May 2008
Budapest, Hungary, July 2008.

La solución de muchos problemas dará resultados no esperados, sobre todo cuando no haya linealidad, lo que sucede en muchos problemas prácticos del mundo real. La no-linealidad se seguirá tratando en muchas ocasiones con métodos aproximados, que pueden dejarse soluciones importantes y dar sorpresas más o menos agradables. Ejemplos tenemos en la Teoría del Caos.

La Matemática seguirá siendo en el siglo XXI el idioma de la Ciencia y aumentará su participación en la comprensión de nuestro mundo, no siendo previsible a donde puede llegar el conocimiento matemático y sus aplicaciones. Probablemente la razón entre los conocimientos matemáticos dentro de cien años y los actuales superará a la proporción entre la potencia de los actuales ordenadores y los ordenadores de mediados del siglo XX.

Confiamos que el aumento de conocimiento matemático potencie los mejores valores e ideales del hombre. Eso será así si no se olvida que la humildad siempre debe acompañar a las manifestaciones humanas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Atiyah, Michael and Iagolnitzer, Daniel, eds. *Fields medalists. Lectures.*World Scientific, 1997.

2. Casti, John. *Five More Golden Rules: Knots, Codes, Chaos, and Other Great Theories of 20th–Century Mathematics*. Wiley, 2000.

3. Devlin, Keith. *Mathematics: The New Goleen Age.* Columbia University Press, 1999.

4. Dieudonné, Jean. *Mathematics. The Music of Reason.* Springer Verlag, 1992.

5. Halmos, Paul. *Has Progress in Mathematics Slowed Down?* American Mathematical Montly 97 (1990) 561-599.

6. Lang, Serge. *The Beauty of Doing Mathematics.* Springer Verlag, 1985.

7. Millán, Gregorio; Etayo, José Javier; Montesinos, Vicente; Valdivia, Manuel; y otros. *2000 Año Mundial de la Matemática*. Editado por Espasa Calpe y Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales. Serie Horizontes Culturales. Las Fronteras de la Ciencia (2002). ISBN 84-670-0137-2

8. Odifreddi, Piergiorgio. *The Mathematical Century*. Princetown University Press, 2004.

9. Stewart, Ian. *From Here to Infinity: A Guide to Today's Mathematics.* Oxford University Press, 1966.