Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 102, Nº. 1, pp 229-250, 2008
IX Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

LA IMPORTANCIA DE LA FILOSOFÍA PARA MATEMÁTICOS, FÍSICOS E INGENIEROS

DARÍO MARAVALL CASESNOVES *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Estoy convencido de la importancia que tiene para el Matemático, el Físico y el Ingeniero la formación filosófica y humanista, aunque creo que es muy posible hacer una ciencia, incluso ciencia muy importante, sin saber filosofía ni historia. Pero si se prescinde de ellas, por grande que sea el valor intrínseco de los descubrimientos científicos, estos quedan incompletos. Me parece que los métodos filosóficos son útiles instrumentos de investigación en manos de un científico. A su vez una filosofía Natural hecha a espaldas de la Ciencia, sin conocer de cerca y por dentro las complicaciones de los mecanismos de los problemas científicos, queda vacía y con poco valor.

No sólo la filosofía sino también las Humanidades son fundamentales para el científico y en especial la Historia. Cicerón definía la Historia como "maestra de la vida" y creo que se puede extender esta idea a la Historia de la Ciencia, y definirla como maestra de los científicos. El conocimiento histórico es una gran ayuda en la labor científica.

Expondremos y analizaremos los temas de la existencia de la matemática, de los fenómenos hereditarios y con memoria, en cuya evolución influye no sólo su presente, sino también su pasado más remoto. Los fenómenos que hemos llamado teleológicos, en los que influye el futuro sobre el presente. Nos hemos ocupado de la incertidumbre y del indeterminismo, que puede ser de primera y de segunda especie; del error y de la probabilidad. En todas estas cuestiones se mezclan la Filosofía y la Ciencia.

Hemos encontrado fenómenos, que aunque estrictamente deterministas en su evolución, al estudiarlos para llegar a su conocimiento, nosotros mismos los convertimos en probabilistas, como consecuencia de nuestros errores en las medidas que realizamos. Tal es el caso de las ecuaciones en diferencia finitas y de las ecuaciones diferenciales con valores iniciales aleatorios, materias sobre las que hemos investigado y publicado en alguno de nuestros libros y en memorias en Revistas. El error lleva a la probabilidad.

Haremos referencia a los últimos objetos matemáticos descubiertos, como son los fractales, en los que hemos distinguido los numéricos y los geométricos y en los que hemos introducido los fractales físicos. En un libro inédito todavía que llamamos "Teoría Físico-Matemática y Aplicaciones de los Fractales" de unas trescientas cincuenta páginas hemos extendido el cálculo diferencial e integral, las probabilidades, la geometría de masas y la dinámica a los fractales.

También haremos referencia a las ecuaciones diferenciales fraccionarias, y al cálculo fraccionario. En los años cincuenta en la Revista de la Real Academia de Ciencias, nos ocupamos por primera vez de la obtención de una nueva ecuación característica que desempeña para las ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales de coeficientes constantes el mismo papel que la muy conocida de las ecuaciones diferenciales enteras. En las fraccionarias que son semienteras las funciones de error integral desempeñan el mismo papel que la función exponencial en las enteras. Resolvimos ya entonces los problemas de integración, de resonancia y de estabilidad para las semienteras. Actualmente en un libro todavía inédito titulado "Ecuaciones Diferenciales e Integrales Fraccionarias. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias" de algo más de doscientas cincuenta páginas exponemos nuestras investigaciones sobre esta materia. En la Revista de la Real Academia de Ciencias en el 2003 y el 2005 pueden verse el índice y algunos resultados del antecitado libro.

En el libro “Los estudios de un joven de hoy” de varios Autores, publicado por la Fundación Universidad-Empresa en 1982 dedicado al Príncipe de Asturias en el capítulo “La Ingeniería y la Técnica” escrito por mí y en el libro conmemorativo del cincuentenario del Instituto José Ribera de Jativa en 1983 que contiene mi conferencia sobre “La formación matemática de los ingenieros”; en ambas publicaciones expongo una línea de pensamiento parecida a la de esta conferencia.

En el transcurso del tiempo, las matemáticas han ido invadiendo cada vez con mayor intensidad el campo de las ciencias aplicadas, ya no sólo la mecánica y las distintas ramas de la física, la astronomía y el cálculo de probabilidades, sino también la geología, la química, la cosmología e incluso ciertas partes de la economía y de la biología. En la ultima colaboración de las matemáticas y de las ciencias aplicadas se observa uno de los ejemplos mas notables y claros de simbiosis científica; de las ultimas toman las primeras un problema concreto y particular, el cual mediante un proceso de abstracción y generalización con el concurso de hipótesis simplificadoras, gracias a las cuales resulta accesible el estudio de los complejos fenómenos naturales (que si no fuera por esta simplificación a causa de su misma espantosa complejidad harían estériles los esfuerzos del talento humano), se convierte así en el origen de un nuevo capitulo de las matemáticas; son a modo de inyecciones que vigorizan y mantienen siempre joven el viejo y exuberante organismo de las matemáticas puras, gracias a la existencia de estos múltiples y variados problemas que han planteado y siguen planteando los fenómenos naturales, la técnica humana, o la misma vida social, los juegos de azar, la demografía etc., es como se ha podido conseguir en el transcurso de los siglos un cuerpo de doctrina establecido de una manera rigurosa y sistemática sobre bases sólidas con arreglo a las leyes de la lógica. Mas a cambio de estos beneficios recibidos de las ciencias aplicadas, las matemáticas devuelven a estas sus problemas resueltos y discutidos, prevén nuevos fenómenos, y sobre todo guían y conducen a estas ciencias por el buen camino, indicándoles cuáles son los senderos estériles que no conducen a resultados fructíferos, como la imposibilidad de máquinas que realicen el movimiento continuo, y en que direcciones es posible obtener resultados satisfactorios. Si Einstein no hubiera demostrado en los primeros años del siglo XX la equivalencia entre masa y energía, es muy posible que los físicos no hubieran pensado nunca en la posibilidad de utilizar la gran fuente de energía que hoy llamamos nuclear.

Creo que muchas ramas de las matemáticas quizás no se han desarrollado todavía, y que otras se han desarrollado tardíamente, porque no se han presentado en la etapa inicial de las ciencias aplicadas problemas que requieran para su solución el conocimiento de tales materias; así por ejemplo, el gran retraso con que se han iniciado las geometrías no euclídeas.

Otras veces, las abstractas teorías matemáticas permanecen como algo que existe en la mente de los matemáticos, sin ninguna razón práctica de existencia, pero después de un plazo de tiempo más o menos largo, parece como si estas ideas y métodos despertasen de su letargo, y bajasen al mundo real, fecundas y llenas de vida a ser la varita mágica que resuelve un intrincado problema de la naturaleza que si no hubiese sido por esta teoría matemática hubiera seguido siendo un misterio para la mente humana; así el cálculo tensorial y el cálculo diferencial absoluto de Ricci y Levi-Civitta, elaborado en plena abstracción y pureza científica, hizo posible que el genio de Einstein desarrollara la Teoría de la Relatividad.

Si hojeamos algunas de las grandes revistas de ciencias aplicadas: estadística, física, ingeniería etc., observamos que algunos artículos están llenos de fórmulas, otros casi por completo carecen de ellas, y en unos y otros se tratan cuestiones similares; responde ello al gran adelanto conseguido en los tiempos actuales por el método matemático y por el experimental; desde el momento en que existen dos métodos y los dos son fuentes de resultados correctos, surge inevitablemente las competencia entre ellos y la polémica sobre la excelencias de unos y otros, sobre a cuál hay que conceder prioridad, polémicas que a mi juicio, más confunden que aclaran, y que generalmente plantean una interrogante absurda y pueril. Se debe única y exclusivamente a la coexistencia de ambos métodos el extraordinario desarrollo de la ciencia moderna. Si el hombre de ciencia únicamente hubiera dispuesto de uno de ellos, seguramente hubiera naufragado en el proceloso mar de la investigación, quizás Newton parafraseando sus humildes y grandiosas palabras, ni siquiera hubiera podido descubrir una bella concha escondida entre las arenas de la playa del océano de la verdad. Imaginad cómo su refinamiento técnico puede ocasionar y ocasiona un gran adelanto del pensamiento científico, porque el descubrir un nuevo hecho permite abandonar unas teorías científicas por erróneas e incompletas o confirmar otras por poder explicar o prever un nuevo fenómeno, incluso resucitar antiguas teorías. Las experiencias de Lenard sobre el efecto fotoeléctrico condujeron a Einstein a resucitar, rejuvenecida y reformada, la antigua concepción corpuscular de la luz de Newton. El experimento Michelson-Morley, para determinar la velocidad absoluta de la Tierra en el éter, obligó a cambiar la antigua mecánica clásica por la relatividad restringida.

Por el contrario, el conocimiento de una teoría matemática adecuada permite al Técnico la solución de un problema concreto y determinado, de otra forma irresoluble o soluble con un esfuerzo mucho mayor de trabajo e ingenio, al modo como la geometría analítica elemental permite la obtención de un lugar geométrico de manera más sencilla, más mecánica que la geometría elemental. La aplicación de matemáticas puras permite desarrollarse en proporciones muchas veces imprevisibles ciertas ciencias aplicadas, así si no hubiera sido por esta razón el cálculo de probabilidades seguiría únicamente ocupándose de variantes de la pregunta del caballero de Meré a Pascal, es decir, aplicaciones del análisis combinatorio elemental a la solución de las ocurrencias de cualquier jugador de azar. Por la acción de las Matemáticas puras el cálculo de probabilidades ha sido elevado de los garitos de los tahúres a las más altas esfera del pensamiento puro.

Por consiguiente el conocimiento de las matemáticas puras es muy conveniente al hombre, porque le permite poder abarcar con una gran economía de pensamiento cuestiones muy diversas y complejas, que de otra forma sería casi imposible retener en la mente. Ver las correspondientes analogías que existen entre un problema de física nuclear o de propagación dirigida de ondas, de geología matemática o de estadística. Las matemáticas son un lenguaje que hay que conocer para poder entender las nuevas técnicas superiores, porque sin ellas es igual que si un ciego pretendiese admirar la belleza de un paisaje. La matematización de la ciencia ha sido lenta pero continua, hasta llegar a constituir una de las actividades fundamentales de nuestra época; ya no solamente la Física sino que también la Química, la Geología, la Economía, la Sociología, hasta la Gramática usan cada vez con mayor intensidad los métodos matemáticos y en algunas partes se hallan tan impregnadas, tan empapadas de fórmulas y razonamientos matemáticos, como puedan estarlo la Mecánica o la Electricidad. Las Matemáticas se han vuelto con respecto a las demás Ciencias más agresivas que cualquiera de los grandes imperios de la Historia. El tabú de la incomprensión de las Matemáticas se ha roto, más que roto ha saltado en mil pedazos, y en la formación de los futuros científicos la enseñanza matemática juega un papel cada vez más importante en todos los países civilizados. Gibbs dijo que las Matemáticas eran un lenguaje, y desde entonces se ha repetido con monótona insistencia; aunque se me diga que no es el lenguaje ordinario en que suele hablar el pueblo con su vecino, como decía Gonzalo de Berceo, no me parece que sea solamente un lenguaje; es más bien un modo de pensamiento, una manera de razonar muy especial; una forma de plantear los problemas, de preguntar por el ser de las cosas, que ofrece al hombre la máxima seguridad en la certeza de los conocimientos adquiridos, y la máxima precisión en los límites de lo verdadero, y en la confianza racional que podemos depositar en nuestro saber. Pero además, lo que es también muy importante, es el método matemático, uno de los más potentes en el acceso al mundo de lo desconocido, una de las guías más eficaces de ese eterno caminar por un laberinto, que es el aprender de los humanos.

Cuando Russell define con humor, pero con convicción a las Matemáticas como la ciencia que no sabe de lo que trata, ni si lo que dice es verdad o mentira, se refiere con ello a que se parte de ciertos postulados que se admiten como verdaderos y mediante ciertas operaciones conocidas y bien definidas, que actúan sobre elementos de naturaleza desconocida, se va obteniendo una cadena de teoremas que constituyen una teoría matemática dada. Al ser los elementos de naturaleza desconocida, es por lo que Russell dice que las Matemáticas no saben de qué tratan, y por ser los teoremas verdaderos, únicamente si los postulados lo son, es por lo que dice que ni siquiera saben si lo que dice es verdad. Eddington ha radicalizado esta actitud de Russell, es aún más extremista cuando define la teoría de grupos como la supermatemática, porque además de cumplir las mismas condiciones que las restantes teorías matemáticas para la definición de Russell, tiene además una característica esencial que la distingue, y es que ni siquiera conoce la naturaleza de las operaciones que se efectúan sobre los elementos a los que se aplican, que también son desconocidos. Cuando Eddington escribía sobre esta materia, los físicos, o mejor dicho la mayoría de ellos, creían en la posibilidad de encerrar todos los conocimientos de la Física, a pesar de su aterradora amplitud, en los estrecho moldes de la teoría de grupos, empresa más sobrehumana que la de encerrar todo el agua del mar en una botella. Es una constante histórico cultural, que periódicamente, aún antes de empezar los fenómenos propios de la barbarie de la civilización, los más grandes científicos y filósofos pretenden encerrar el todo en una de sus partes, un conjunto en uno de sus subconjuntos; parece como si el fanatismo y la superstición estuvieran anclados en lo más profundo de la mente humana, con tal fuerza y vitalidad, que ni el más grande talento es capaz de desarraigarlo, como si fuesen la huella indeleble, la reminiscencia imborrable que ha dejado en la mente del hombre su paso previo por formas más primitivas en tiempos remotos.

Creo que las Matemáticas saben de lo que tratan, y si lo que dicen es verdad o mentira; incluso llegan a delimitar con toda precisión los contornos de su verdad, dentro de los límites y en que determinadas condiciones son verdaderos sus teoremas y proposiciones, y cuándo dejan de serlo, al modificarse los factores que condicionan su verdad. No tratan los matemáticos con verdades absolutas, sino con verdades relativas, con verdades condicionales; otra tarea, en extremo difícil, es hallar la correspondencia, los isomorfismos entre el universo puro de los matemáticos y los múltiples universos de sus aplicaciones, porque esa tarea llega a confundirse con la pregunta por el ser, la pregunta por la cosa, lo cual ya es hacer Metafísica. Por mucho que los científicos y los filósofos del positivismo lógico hayan pretendido y sigan pretendiendo despojar de Metafísica a la Ciencia, a la Filosofía o a la Lógica, el llegar a dejarlas desnudas de Matemática es tarea prácticamente imposible, son posiciones asintóticas a las que se tiende, pero que no se alcanzan nunca, por muy sutiles que sean las redes del Positivismo, siempre dejan algún resquicio para que se filtre algo de Metafísica, es algo tan difícil como lo es en el mundo de la materia, el conseguir el vacío o la temperatura del cero absoluto.

En la íntima colaboración entre las Matemáticas y las restantes Ciencias, se da uno de los ejemplos más claros y notables de simbiosis intelectual.

Simplificación, abstracción, generalización y posteriormente concretización; he ahí las etapas que sigue el pensamiento científico en su viaje de ida y vuelta, desde el campo de cualquier ciencia al de las Matemáticas. Muchos científicos acusan a los modelos matemáticos de demasiado simplistas, para poder dar cuenta de la tremenda complicación de los fenómenos naturales o de la vida humana, pero es el hecho de que aún con modelos muy simplistas, casi ingenuos en su sencillez, se puede encontrar la explicación de importantes leyes de las ciencias de la materia y del comportamiento, e incluso predecir nuevas leyes; al igual que en la Política, no hay que olvidar el viejo lema de “divide y vencerás”, en el empleo del método matemático en la investigación científica hay que decir simplifica si quieres vencer, pero tampoco hay que olvidar que la simplificación no es un proceso estático, sino dinámico; que está en constante devenir, ese devenir, ese fluir de la simplificación es la quintaesencia del método de las aproximaciones sucesivas; mediante una cadena de simplificaciones, se va subiendo por la escalera de la complejidad, y así se va perfeccionando, refinando y progresando en el saber. La simplificación es la modestia del investigador, es un fijarse límites, un restringirse en sus ambiciones, pero tiene su recompensa en su alta productividad científica.

Las fronteras entre las distintas Ciencias no están trazadas de manera clara y distinta, sino que se solapan entre sí, interfieren unas con otras, se funden entre sí ofreciendo un aspecto de continuidad, de modo que si bien es cierto que cada Ciencia tiene un núcleo claramente diferenciado, tiene también una corteza que resulta difícil de precisar si pertenece a ella o pertenece a otra, muchas veces es difícil reconocer si un fenómeno es económico o social, físico o químico. Toda Ciencia tiene sus Ciencias auxiliares y es a su vez auxiliar de otra Ciencia, y esta relación de ayuda es tan fuerte que con relativa frecuencia un progreso en la Ciencia auxiliar perfecciona a la Ciencia de la que es auxiliar, infinitamente más que un progreso en ella misma; así por ejemplo un progreso de la Química o de la Genética puede arrastrar consigo un progreso de la Fitotecnia, mucho más grande que un progreso de la propia Fitotecnia; así mismo un avance en las técnicas estadísticas puede arrastrar consigo un avance de la Sociología mucho mayor que un avance de la propia Sociología. Este hacer progresar una Ciencia desde fuera de ella, a veces con más fuerza que desde dentro de ella; es un factor cultural que no debe de ser olvidado por los rectores de la política científica y de la organización de la enseñanza y de la investigación.

Hasta fecha relativamente reciente los Científicos no han albergado dudas sobre el significado que hay que atribuir a la palabra existencia, y si bien es cierto que entre los Filósofos ha habido bastante desacuerdo y polémica en torno al problema existencial, estas diferencias han tenido pocas repercusiones en el campo de la Ciencia, al igual que las especulaciones filosóficas sobre el espacio y el tiempo no han trascendido a la Ciencia hasta la aparición de las nuevas teorías físicas de la Relatividad y de los Cuantos.

Conviene distinguir en el problema existencial dos facetas, la planteada por el sujeto pensante, el yo, y la planteada por las cosas, que constituyen la materia prima a partir de la cual la acción del sujeto pensante elabora los conocimientos científicos. Respecto a la primera, la Ciencia, tanto la moderna como la clásica, adopta una actitud que concuerda en todo con la concepción cartesiana; al Científico le basta el mero hecho de pensar, de lo que se percata a través de su conciencia, para admitir sin duda alguna su existencia. Por el contrario la segunda faceta provoca una situación más compleja y que varía en el tiempo.

Los griegos, que tuvieron que crear de la nada los rudimentos de la ciencia para poder realizar su obra, tuvieron que admitir como ciertos una serie de supuestos, entre los que figuran el principio de causalidad, mediante el cual los fenómenos naturales dejan de ser capricho de los dioses o de la naturaleza, para convertirse en efectos necesarios de causas extrahumanas; la creencia en un mundo objetivo que existe fuera de nosotros e independientemente de que el observador exista o no. El conocimiento científico en los griegos utiliza unos datos que son extraídos del mundo objetivo mediante la percepción sensible y que elaborados en la mente del científico de acuerdo con unas leyes lógicas supuestas verdaderas, se transforman en leyes científicas de validez universal, en el sentido en que son independientes de cualquier volición o capricho del hombre o de la naturaleza. Como resultado de la acción de dos facultades distintas, la percepción sensible y la mente, resulta que el mundo objeto del conocimiento científico, que es imagen del mundo objetivo, presenta un cierto parecido con él, pero solamente un parecido porque es un mundo de ideas, mientras que el otro lo es de fenómenos; se establece así una correspondencia entre cosas materiales e ideas puras, de tal forma que operando únicamente sobre estas últimas se obtienen nuevas ideas que son imágenes de cosas materiales a su vez. En este hecho reside la vitalidad de la Ciencia, porque por sí sola, mediante una extrapolación de ideas adquiridas de las cosas mediante la percepción sensible permite llegar a conocer el comportamiento de nuevas cosas.

En realidad a los griegos no les preocupa el problema existencial planteado por el mundo de las ideas puras, porque ellos lo consideran como una imagen, como algo que no tiene un significado intrínseco, sino simplemente el que les es inducido por el mundo objetivo. Tan es así, que incluso en la Geometría, en aquel tiempo la más abstracta de las Ciencias y la única establecida sobre bases enteramente hipotético-deductivas, todas las proposiciones son demostradas teniendo siempre a la vista que hay la posibilidad de materializarlas, de hacerlas tomar cuerpo en el mundo objetivo mediante ciertas construcciones mecánicas más o menos complicadas; por eso el quinto postulado de Euclides (el de las paralelas) que ellos, o algunos de ellos sospechan que pudiera ser un teorema de difícil demostración, lo toman como postulado, bajo la sospecha de que pudiera ser un teorema de demostración todavía ignorada, porque responde a un comportamiento de las cosas del mundo objetivo de percepción inmediata. En resumen los griegos subordinan el mundo de las ideas puras al mundo objetivo, hasta el punto de que cualquier contradicción en el primero (o también duda) tratan de dilucidarla recurriendo a la observación del segundo.

Las interesantes paradojas suscitadas por Zenon de Elea, así como toda otra especulación similar de los filósofos griegos, no atañen al problema existencial propiamente dicho, sino al de la posesión de la verdad. Es importante señalar que ya en los primeros tiempos de la ciencia surgen cuestiones que sugieren claramente la imposibilidad del concepto unitario de la existencia, de la necesidad de recurrir a un concepto multivalente, nos referimos al descubrimiento de los números irracionales por Pitágoras; esto números no admitían una representación concreta en la aritmética de los griegos; a ello alude sin duda alguna el nombre con que los bautizaron de "alogos"; les causaron una extrañeza que fue aminorada por el hecho de que como contrapartida admitían una representación geométrica concreta y sencilla, tales son por ejemplo $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, cuya representación geométrica es el lado del cuadrado y el del triángulo equilátero inscritos en una circunferencia de radio 1. También los griegos conocieron un número de naturaleza más complicada que es π (el cociente de dividir la longitud de la circunferencia por la de su diámetro). Hoy a $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ les llamamos números algebraicos y a π número trascendente.

Combinando el teorema de Pitágoras con el principio de inducción completa se pueden construir geométricamente las raíces cuadradas de cualquier número entero n. Por construir geométricamente entendemos la operación (figura 1) que consiste en dado un segmento AB_1 cuya longitud se toma como unidad, construir un segmento AB_n tal que $AB_n = \sqrt{n}AB_1$. Para ello en la figura 1 se traza por B_1 una perpendicular a AB_1 y se toma sobre esta perpendicular un punto B_2 tal que $B_2B_1=AB_1$, entonces $AB_2 = \sqrt{2}AB_1$. Por B_2 se traza una perpendicular a AB_2 y sobre esta perpendicular se toma un punto B_3 tal que $B_3B_2=B_1B_2$, entonces $AB_3 = \sqrt{3}AB_1$, y así se continua hasta realizar esta operación n veces y así se obtiene B_n tal que $AB_n = \sqrt{n}AB_1$. Si los griegos hubieran realizado esta operación geométrica de paso habrían encontrado el principio de inducción completa.

En la Edad Media, en la que la Ciencia Natural sufre un largo periodo de letargo, se llega a la expresión más perfecta de concepto de existencia en el sentido científico, con la definición escolástica de que las cosas existen "fundamentaliter in re, formaliter in mente". En mi opinión la Ciencia clásica está estructurada de acuerdo con el concepto de espacio de los griegos (Euclides), de existencia de los escolásticos y de tiempo de Newton, el cual da la siguiente descripción de tiempo: "el tiempo absoluto verdadero y matemático transcurre en sí uniformemente y sin ninguna relación con los objetos externos".

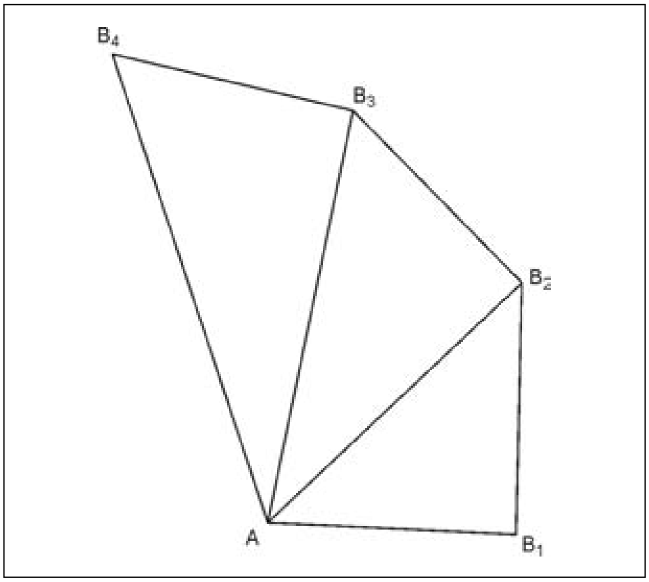

Figura 1

De los filósofos del renacimiento a Kant, no hay nuevas aportaciones al problema existencial desde el punto de vista de la Ciencia Natural; la atención está más bien desviada hacia las fuentes y métodos del conocimiento científico, y así cuando Kant se refiere al espacio y al tiempo, y a las nuevas proposiciones matemáticas como juicios sintéticos a priori no arroja ninguna luz sobre el problema existencial, sino simplemente sobre el origen del conocimiento científico y sobre las interacciones entre el mundo objetivo y el de las ideas puras.

Del sigo IX al XIII los árabes hicieron importantes aportaciones a las Matemáticas entre las que figuran la resolución de la ecuación de segundo grado que conlleva el nacimiento del Álgebra y el empleo del sistema de numeración decimal que aprendieron de la India y transmitieron al mundo cristiano.

La obtención de las soluciones de la ecuación de segundo grado implica la aparición de nuevas clases de números que no supieron interpretar como son los números negativos y los imaginarios. La explicación de los negativos se debe a Fibonacci que vivió en los siglos XII y XIII, que los interpretó como el debe y el haber de un comerciante, los negativos serían el debe y los positivos el haber. La explicación de qué significan los números imaginarios llegó mucho más tarde como veremos más adelante.

Es curioso que los romanos, un pueblo tan inteligente y práctico, no llegaran a conocer el sistema de numeración decimal, que tantísimo ha contribuido al progreso científico. Con este sistema son posibles las cuatro reglas elementales de la enseñanza primaria: la suma, resta, multiplicación y división, así como las más difíciles de la extracción de la raíz cuadrada y de la raíz cúbica; la descomposición en factores primos, la obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo etc., etc. La actual Teoría de Números, uno de los más importantes capítulos de las Matemáticas, no sería posible sin el empleo del sistema de numeración decimal. Además este sistema abre la puerta a otros sistemas de numeración de base distinta entre los que son muy importantes el binario de base 2, muy útil para la Lógica, el Cálculo de Boole y la informática; el ternario de base 3 en el que solamente se utilizan tres cifras que son 0, 1, 2, de modo que 3 se escribiría 10. Este sistema ternario ha servido para que Cantor construya el conjunto que lleva su nombre, construido por los números reales comprendidos entre 0 y 1, que se escriben en el sistema de base 3, con sólo las cifras 0 y 2 (nunca figura en ellos la cifra 1) que es el primer ejemplo de fractal, uno de los objetos matemáticos más modernos, como veremos más adelante.

Lo conseguido con la ecuación de segundo grado se refuerza en el Renacimiento en que se realiza un importante descubrimiento matemático por su alcance filosófico, se trata de la resolución de la ecuaciones de tercer grado y cuarto grado, en que vuelven a aparecer los números imaginarios que no admiten representación aritmética ni geométrica concreta (por ejemplo $\sqrt{-1}$), y cuyo nombre como en el caso de los números irracionales, es consecuencia de la extrañeza que causan. Manifiestan la extraña propiedad de que operando sobre ellos, sobre algo que parece no tener existencia material se llega a resultados reales, a números que sí tienen representación concreta. Indica este descubrimiento la crisis del principio de "ex nihilo nihil" a menos que se sustituya el concepto unitario demasiado rígido, por un concepto multivalente, que al ser más flexible, permita la conservación del principio.

La prueba de que el problema existencial, como tal problema no preocupaba a los científicos, es que han de pasar algunos años después de la muerte de Kant, para que hagan su aparición en la matemática los denominados teoremas de existencia con Cauchy y Lifschitz, y no es por falta de potencia intelectual, porque antes han existido Gauss "el príncipe de las matemáticas" y el siglo de oro de la matemática francesa. Tanto la célebre frase de Newton "hipótesis non fingo" como su propia manera de razonar admitida por los científicos que se mantuvieron dentro de la línea de pensamiento de la Física clásica condensada en la frase "las cosas se comportan como si", no es en definitiva más que el reconocimiento absoluto y total del concepto de existencia de los escolásticos; es admitir la separación de un mundo objetivo que existe "fundamentaliter in re", pero que a pesar de esta separación se corresponden biunívocamente, son imagen fiel el uno del otro.

En las generalizaciones matemáticas, por ejemplo, en la del concepto de número, o sea en los pasos sucesivos del número natural al racional, del racional al real, del real al complejo, etc., se da existencia a algo que antes no existía, no era observable, era algo absurdo.

En el siglo XIX se realizan dos importantes descubrimientos matemáticos que han revolucionado por completo las leyes del pensamiento científico y acentúan la crisis del concepto de existencia. Son estos descubrimientos el de las álgebras no conmutativas de Hamilton en la que no es válida la vieja regla de que el orden de factores no altera el producto y el de las Geometrías no euclídeas de Bolyai y Lobatschewski la hiperbólica y de Riemann la elíptica. En ellas no se cumple el quinto postulado de Euclides, de ahí su nombre. Una vez conocidas éstas se nos plantea el problema de la naturaleza de su existencia, al perder la vieja geometría euclídea su calidad de verdad a priori independiente de la mente humana.

Durante todo el siglo XIX se acumulan nuevos descubrimientos matemáticos y físicos que plantean otras tantas paradojas sobre el concepto de existencia, tales como que un mismo problema puede tener soluciones diferentes, como son las paradojas de Bertrand del Cálculo de Probabilidades, que hemos analizado en anteriores conferencias. La inexactitud de la antigua creencia de que todo problema matemático que resulta del planteamiento analítico de un fenómeno físico tenía solución etc.

Hacia el final del siglo XIX se produce una grave crisis en los fundamentos de las Matemáticas tanto del Análisis como de la Geometría. Para superarla se introducen los técnicas postulacionales, se establece cada rama de la Matemáticas sobre un conjunto de axiomas arbitrarios, en el sentido de que no nos son impuestos desde fuera, que únicamente están sujetos a ciertas restricciones de carácter lógico, se definen unos entes abstractos sin representación concreta, únicamente definidos por las relaciones entre ellos, pero sin existencia trascendente; estos entes son meros símbolos, son como las letras de un alfabeto, que por sí solas no significan nada, pero que combinadas adquieren significado. De este modo el concepto de existencia pierde su primitiva unidad para convertirse en un concepto multivalente; ya no tiene sentido decir en el mundo de las ideas esto existe o no existe, es necesario agregar algo más, decir existe con relación a qué axiomas; la existencia en vez de un concepto absoluto es relativo a una cierta estructura lógica, es un concepto unido a un cierto sistema de axiomas; así por ejemplo la línea recta tiene existencia en la geometría euclídea; mas no existe como tal en las geometrías no euclídeas; se puede encontrar en estas un nuevo ente, con ciertas propiedades que nos recuerdan a la recta que nos es familiar, pero esta como tal recta euclídea ha dejado de existir.

Por ejemplo el triángulo isósceles birrectángulo no existe en la Geometría finita (es absurdo); pero en cambio sí existe en la Geometría infinitesimal (es no contradictorio). En su existencia se basa la permutabilidad de los desplazamientos infinitesimales en varias direcciones. En las aplicaciones geométricas del Cálculo Diferencial e Integral (problemas de tangencia, curvatura, cálculo de áreas y volúmenes etc.) constantemente se hace uso del desprecio de infinitésimos de orden superior, infinitésimos que existen antes del paso al límite, y que pierden su existencia en esta operación matemática, es decir que se convierten en inobservables, dejan de existir porque no producen efectos medibles, y pierden su capacidad de ser conocidos por el hombre. <u>Existir es poder ser conocido</u>.

Aparte de este cambio en el concepto de existencia, existe en la Ciencia nueva, otro no menos importante; consiste en que ante las Matemáticas modernas caben dos actitudes, una que pudiéramos denominar creacionista, según la cual las proposiciones matemáticas existen en el mundo de las ideas puras en el momento en que son establecidas, es decir que existe aquello que es constructible; desde este punto de vista el concepto de existencia es actual, el matemático labora creando; la otra actitud que pudiéramos llamar explorativa, admite que las proposiciones matemáticas existen si ellas no encierran contradicción, se las supone ciertas; en muchos casos se comprende fácilmente que esta demostración de no contradicción es tarea difícil; desde este punto de vista el concepto de existencia es potencial, el matemático labora descubriendo. Así pues, las creencias científicas en el mundo de las ideas puras tienden a subjetivizarse, en el sentido de liberarse de toda concomitancia con el mundo objetivo, y no en el sentido de cada yo individual, que conduciría a un solipsismo, del que quizás más que nunca está lejana la Ciencia.

La Geometría ha sido la primera parte de las Matemáticas que ha sido axiomatizada, lo fue en el siglo III a.d.C por Euclides, completado muy pronto con el axioma de Arquímedes y muy tarde en el siglo XIX con el axioma de Pasch, y con todo rigor y perfección Hilbert en el siglo XX en su libro “Los Fundamentos de la Geometría” estableció una nueva axiomática que es la actualmente aceptada. La primera edición de este libro tuvo lugar en 1899 y la séptima y última edición en 1935, a lo largo de estas ediciones Hilbert fue perfeccionando esta axiomática hasta alcanzar su forma definitiva.

Un primer intento de axiomatizar el Cálculo de Probabilidades lo realizó Von Mises en el siglo XX sin conseguirlo de un modo satisfactorio. En 1932 Kolmogorov consiguió la axiomática más perfecta, que es la que actualmente se sigue. Más adelante hablaremos de la extensión de las Probabilidades a los fractales, que requiere una axiomática distinta a la de Kolmogorov, en mi opinión.

La fiebre por las axiomáticas se desata en el siglo XX y en los años treinta y cuarenta se habla del fenómeno científico de la “nostalgia por la geometría” del que me he ocupado en otras conferencias. Consiste en la aspiración y el deseo que se siente de lograr axiomatizar las nuevas partes de las Matemáticas y también en otras ciencias al estilo de la geometría euclídea.

Desde 1933 con Roosevelt se inicia en gran escala el ascenso científico de los Estados Unidos hasta alcanzar indiscutiblemente el primer puesto en el ranking mundial.

Aunque no podemos entrar en el análisis del fenómeno, hemos de citar como una de las obras más importantes en las Matemáticas la de Bourbaki en Francia el primer gran intento de una obra colectiva para rehacer la Matemática. De lo dicho en este párrafo y en los tres anteriores me he ocupado en otras publicaciones.

Vamos a tratar unificadamente un fenómeno temporal (la herencia) y otro espacial (la acción a distancia) porque aunque distintos, su matematización es la misma. En sus investigaciones sobre Física y Biología, Volterra introdujo el importante concepto de herencia que no hay que confundir con el sentido vulgar de la palabra que es también el que tiene en la Genética. La herencia en el sentido de Volterra es una influencia directa del pasado sobre el futuro; el futuro viene condicionado directamente por todo o parte del pasado, y el conocimiento del presente no es suficiente para el conocimiento o previsión del futuro, es preciso conocer total o parcialmente la historia del sistema, Su planteamiento matemático se hace mediante ecuaciones integrales. A este enfoque de la Ciencia lo he denominado global, porque la propagación en el tiempo no es por contacto, es decir de instante a instante, sino por una especie de acción a distancia en el tiempo; existe una influencia de lo que sucede en un instante sobre lo que va a suceder en un instante posterior separado del primero por un intervalo de tiempo finito.

He demostrado que el aspecto global engloba como un caso particular el aspecto local de la Ciencia. En este último caso la influencia del pasado sobre el futuro se hace siempre a través del presente, porque éste, a su vez fue en cierto tiempo, futuro de lo que hay es pasado; y entonces condicionó el presente actual, pero una vez condicionado éste, entonces se pierde para siempre su influencia. Por tanto la evolución de los sistemas naturales es una evolución paso a paso, de instante en instante. En el aspecto local decimos que el presente condiciona el futuro, el conocimiento del presente es suficiente para la previsión del futuro, haciendo inútil el conocimiento del pasado. En rigor deberíamos decir el conocimiento del presente y de un entorno infinitesimal del mismo, porque a ello equivale las ecuaciones diferenciales que usamos; en términos vulgares diríamos el presente estático y la tendencia dinámica del presente. La demostración a que se hace referencia al principio de este párrafo es consecuencia de la demostración que he dado de que las ecuaciones diferenciales del enfoque local se pueden obtener como límites generalizados de las ecuaciones integrales del enfoque global. Es indudable que las técnicas matemáticas del enfoque local son mucho más sencillas que las necesarias para el enfoque global.

He investigado (véase bibliografía) un tipo de ecuaciones integrales e integrodiferenciales, en las que la función incógnita aparece bajo el signo integral con función de núcleo cerrado y los límites de la integral son fijos en vez de variables (fórmula1) y he demostrado que bajo condiciones muy generales pueden existir soluciones oscilantes que las he denominado hereditarias unas y teleológicas otras, por las razones que se verán más adelante. Se diferencian de las oscilaciones lineales clásicas, que como es sabido son las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, en propiedades muy notables y curiosas tales como las siguientes: las soluciones de (1) son exponenciales cuyos exponentes son las raíces de una ecuación trascendente, en vez de algebraicas como es el caso de las oscilaciones clásicas. En el caso de la (1) pueden existir soluciones en número infinito numerable, pueden presentarse discontinuidades en las soluciones, puede no existir oscilaciones libres, pero sí forzadas.

Me refiero a ecuaciones integrodiferenciales de la forma:

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \frac{d^r y}{dt^r} + \int_{-\infty}^{t} \sum_{s=0}^{m} k_s (t-\tau) \frac{d^s y}{d\tau^s} d\tau = f(t) \qquad (1)$$

en la que el segundo miembro puede ser cero. Las a son coeficientes constantes, la r y s indican orden de la derivada. En ellas hay efectos retardados debido a las funciones de memoria, las k. Entre estas es el pasado el que influye sobre el presente describen fenómenos hereditarios.

Es también interesante el caso en que en (1) se efectúan las sustituciones de *t* y –∞ por ∞ y *t*, y entonces es el futuro el que influye sobre el presente. En vez de (1) es

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \frac{d^r y}{dt^r} + \int_t^{\infty} \sum_{s=0}^{m} k_s(\tau - t) \frac{d^s y}{d\tau^s} d\tau = f(t) \quad (2)$$

A estos fenómenos les he denominado teleológicos.

La (1) y (2) las he resuelto empleando la transformada de Laplace y el Cálculo Simbólico.

Los fenómenos hereditarios se presentan en biología, por ejemplo en biocinética, que estudia matemáticamente las teorías del equilibrio biológico basada en la lucha por la existencia entre especies que se alimentan unas de otras o que disputan sobre el terreno la misma alimentación. También tienen estos fenómenos hereditarios especial importancia en algunas ramas de la física, por ejemplo en Elasticidad, donde todo especialista sabe que la resistencia que opone cualquier estructura a la deformación, no solamente depende de los esfuerzos que tiene que soportar, sino también de los esfuerzos que ha soportado en el pasado. Los fenómenos físicos de histéresis son hereditarios.

Algunos filósofos han analizado con bastante profundidad el concepto de tiempo, poniendo de relieve el papel extraordinario que en biología juega la finalidad en la actividad de los seres vivos. Distinguen entre tiempo físico y tiempo biológico, para ellos en este último es el futuro quien determina el presente. Mis anteriores ecuaciones integrodiferenciales son la traducción al lenguaje matemático de estas ideas filosóficas, que hasta la fecha creo no habían sido representadas analíticamente. Son las que he bautizado con el nombre de teleológicas, pero he de insistir que también es posible un comportamiento monotónico (no oscilante) teleológico. La diferencia entre comportamiento monotónico (unidireccional) y oscilante depende de la naturaleza de las raíces de la ecuación característicamente trascendente de la (2), es decir, de los exponentes de las exponenciales que describen matemáticamente el comportamiento de los sistemas naturales.

Contrariamente a lo que sucede en Biología, que con mayor frecuencia puede suceder en Economía, lo teleológico es inconcebible en Física. Si a veces se deslizan furtivamente soluciones teleológicas en las ecuaciones de la física matemática, basta la posesión de este carácter para que sean descartadas, diciendo que carecen de significado físico.

Ya que hemos hablado del tiempo físico y biológico, vamos a hacer un inciso sobre un problema tan importante como es el del tiempo, sin adentrarnos en la profunda modificación que ha sufrido este concepto con la aparición de la Teoría de la Relatividad, con su correspondiente fusión entre espacio y tiempo en la Teoría de la Relatividad Restringida, y entre espacio, tiempo y materia (gravitación) en la Relatividad General y entre espacio, tiempo, materia y electricidad en las teorías relativas al campo unificado. El tiempo es un concepto primario de la física, y ha suscitado desde los principios de la filosofía hasta el momento actual sinfín de polémicas y discusiones. Hasta el hombre de la calle cree tener una noción exacta de lo que es el tiempo, noción que prácticamente coincide con la que utilizan los sabios en sus investigaciones, salvo en algunos pocos problemas muy específicos y de extraordinaria dificultad e importancia. Una cosa es creer que sabemos algo y otra muy distinta ser capaces de poder explicar inteligiblemente ese conocimiento íntimo nuestro a otras personas.

El aforismo latino post hoc, ergo propter hoc, está íntimamente ligado al conocimiento de la flecha del tiempo, es decir, de la dirección de antes a después en que fluye el tiempo, que si se prescinde de la conciencia, es uno de los problemas más difíciles que hay planteados hoy. La dificultad es mucho mayor en la Microfísica que en la Macrofísica, si se tienen en cuenta intervalos de tiempo infinitesimales, a mí me parece que el tiempo no es una variable cierta sino aleatoria, que a medida que aumenta la duración del intervalo de tiempo converge en probabilidad a una variable cierta; tal como resulta de mis investigaciones sobre la inversión en el tiempo de procesos estocásticos, por ejemplo del movimiento Browniano y de la desintegración radiactiva.

Hay que tener siempre en cuenta que para el científico las cosas existen si pueden ser conocidas, que en la Ciencia Natural la existencia es una propiedad pasiva y potencial, que existir es poder ser conocido, como ya he dicho anteriormente. Por eso surgen esas grandes dificultades ligadas al principio de causalidad y a la flecha del tiempo. Recordando las coplas de Jorge Manrique, el tiempo es como un río, no como un mar.

Lo hereditario y lo teleológico pueden introducirse también cuando el tiempo es una variable discreta en vez de continua, y para resolver este problema he planteado y resuelto las que he llamado ecuaciones sumatorias, las cuales están con las ecuaciones en diferencias finitas en la misma relación que las ecuaciones integrales con las diferenciales.

Paralelamente a la introducción de la herencia como una acción a distancia en el tiempo, se puede introducir una acción a distancia en el espacio, mediante un formalismo matemático algo más difícil y generalizado, debido a que el tiempo sólo tiene una dimensión y el espacio puede tener tres. Para este nuevo planteamiento he considerado ecuaciones integrodiferenciales en derivadas parciales, agregando un término correctivo expresivo de la acción de la herencia sobre la evolución temporal de sistemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales clásicas, o agregando un término correctivo de la acción perturbadora que en un instante dado se ejerce sobre un punto del sistema por las deformaciones sufridas por los restantes puntos del sistema. De forma que en este último caso no puede hablarse de herencia en el tiempo, en el sentido de una influencia de los estados ancestrales por los que ha pasado el sistema sobre su configuración en el presente, sino más bien en una llamémosla así herencia en el espacio, es decir, de una especie de acción a distancia mediante la cual la configuración que en una cierta región del espacio adopta el sistema influye sobre la que adoptará en cualquier otra parte, se trata de una interacción entre elementos distintos de un mismo sistema expresable por una función de las diferencias absolutas de sus coordenadas.

Como digo, no se puede hablar de una herencia en el tiempo, sino de una pérdida de validez del principio de la fragmentación en el espacio que se utiliza en Mecánica y en otras ramas de la Físicas; al no admitir como válido este principio de fragmentación o solidificación en el espacio, estimamos que ningún fragmento del sistema puede considerarse como aislado, y que para prever el comportamiento de un fragmento del sistema es preciso conocer el estado en que se encuentra todo él. Por analogía con los fenómenos hereditarios temporales en que es preciso el conocimiento de la historia del sistema, estimo que es preciso conocer en el caso de fenómenos hereditarios espaciales la geografía (o topografía, si se quiere) del sistema para llegar a poder prever su evolución futura.

Con relación al párrafo anterior he investigado con profundidad y detalle las generalizaciones hechas por mí en este sentido de las ecuaciones clásicas de la propagación de las ondas y del calor, obteniendo desarrollos matemáticos largos y curiosos, que afectan entre otros campos matemáticos al de la teoría de las funciones trascendentes superiores y al de las transformaciones funcionales. Se puede esperar en forma parecida sobre cualquier otro tipo de ecuaciones clásicas en derivadas parciales, y es seguro que se han de obtener resultados interesantes. Como curiosidad diré que estas ecuaciones que he investigado las he aplicado en Economía a mercados con intermediarios, en donde la oferta y la demanda de un intermediario se corresponde con la demanda del intermediario posterior, y la oferta del anterior respectivamente.

Las anteriores investigaciones me han llevado a formular un principio de correspondencia matemática, en virtud del cual se puede enunciar el principio de que todo estado discontinuo de la naturaleza es límite generalizado (G-límite) de estados continuos.

Las ecuaciones integrales que se presentan en Rheología y Viscoelasticidad son un caso particular de la (1) y entre las consecuencias físicas que se desprenden de su estructura matemática, figuran la posibilidad de movimientos internos espontáneos (sin fatiga) en líquidos viscoelásticos o de Maxwell, y en sólidos de Kelvin y recíprocamente la existencia de fatigas sin deformaciones. Se puede obtener de esta manera la solución exacta de las ecuaciones integrales de los cuerpos boltzmanianos (véase mi memoria “Las soluciones exactas de las ecuaciones integrales” citada en la bibliografía).

La ecuación (1) admite diversas generalizaciones y distinguir en ellas soluciones fuertes y débiles (véase bibliografía).

La (1) se puede generalizar a integrales dobles y múltiples. Un ejemplo es la

$$ay(x,t)+\int_0^\infty\int_0^\infty k(\sigma,\tau)y(x-\sigma,y-\tau)d\sigma d\tau=0 \quad (3)$$

que he resuelto en algunos casos. La ecuación del calor y de la propagación de las ondas se pueden obtener como límites generalizados (o sea G-límites) de la ecuación (1).

En la electrodinámica de los medios continuos, concretamente en la teoría de la difusión de la permeabilidad eléctrica en medios dispersivos, están ligados entre sí por una ecuación de tipo (1).

También en Economía tiene aplicación estas teorías matemáticas, tal es el caso de la llamada correlación lagunar que se presenta en las series cronológicas de la Estadística, y de los efectos de retardo propios de muchos fenómenos económicos. Me he encontrado y he investigado ecuaciones integrodiferenciales con integrales múltiples que en vez de la forma (3) son de la forma (4)

$$\sum_{r=0}^{n}a_r\frac{d^r y}{dt^r}+\int_0^\infty\!\!...\!\int_0^\infty f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m)y(t-\sigma_2-......-\sigma_m)d\sigma_1...d\sigma_m \quad (4)$$

cuya solución viene dada por exponenciales como sucede con la (1), pero cuyos exponentes son raíces de una ecuación característica, distinta de aquella. Esta ecuación es:

$$\sum_{r=0}^{n}a_r p^r+F(p,p,...,p)=0 \quad (5)$$

siendo $F(p_1,p_2,...,p_m)$ la transformada de Laplace de la función $f(\sigma_1,...,\sigma_m)$. También en este caso, como en la (1), a la (4) le corresponde una solución teleológica en vez de hereditaria.

Otra dirección de generalización que me he planteado y resuelto, es cuando los retardos múltiples conducen a sistemas de ecuaciones integrales del tipo:

$$\int_0^\infty g_i(\sigma)y_i(t-\sigma)d\sigma=\int_0^\infty f_i(\sigma)y_{i+1}(t-\sigma)d\sigma\,;i=1,2,....,n-1 \quad (6)$$

cuya solución viene dada multiplicando miembro a miembro ordenadamente en la cadena

$$G_i(-v)x_i(v)=F_i(-v)x_{i+1} \quad (7)$$

que conduce a la solución:

$$x_n(v)=x_1(v)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{G_i(-v)}{F_i(-v)} \quad (8)$$

siendo G y F la transformada de Laplace (TL) de las g y f minúsculas, pero en cambio las x son las inversas de las transformadas de Laplace (TL^{-1}) de las y. Estos problemas plantean a su vez algunos otros de convergencia de integrales bastante complicados.

Existe una diferencia esencial entre esta nueva problemática y la problemática clásica mucho más habitual de las funciones de transferencia, tal como se usa en la Ingeniería de Control y en la Automática. Mientras que en la clásica obtenemos la solución de un problema hallando la transformada de Laplace (TL) de la solución, en la teoría que hemos expuesto resolvemos el problema hallando la inversa de la transformada de Laplace (TL^{-1}) de la solución.

Sistemas de ecuaciones integrales como (6) se encuentran en el análisis de mercados con varios intermediarios que pueden ordenarse como números naturales 1, 2,…, *n*, …… de modo que el intermediario que tiene el número de orden n, hace demanda del producto en el mercado $n-1$, y oferta el mismo en el mercado $n+1$. A este problema ya hicimos alusión en párrafos anteriores.

También nos hemos ocupado del caso en que en lugar de existir una sola ecuación integral como la (1) existe un sistema de ecuaciones de dicho tipo.

Vamos a tratar aunque sea brevemente de dos entes matemáticos que aparecen en la segunda mitad del siglo XIX que permanecieron bastante tiempo durmientes y que en la segunda mitad del siglo XX adquirieron un enorme desarrollo e importancia. Se trata del Cálculo Fraccionario y de los Fractales. Hoy se puede decir que están de moda.

Liouville definió en el siglo XIX la derivación e integración fraccionaria que comprende en su seno y generaliza la derivación e integración. Para ello, utilizó una fórmula que reduce a una sola integral el resultado de reiterar *n* veces una integral ordinaria. Adquieren estas nuevas operaciones una mayor claridad y precisión con la creación del Cálculo Simbólico (CS_L) de Heaviside, un gran matemático incomprendido en su tiempo. Cálculo que durante mucho tiempo permaneció misterioso, porque resolvía los problemas prácticos a los que se aplicaba, especialmente a la Electrotecnia, más tarde a la Hidráulica (golpe de ariete) y a la Mecánica (choque y percusiones), y carecía de fundamento técnico riguroso, hasta que Carson demostró la identidad del Cálculo Simbólico con la transformación de Laplace, con lo que adquirió carta de ciudadanía dentro de la Ciencia Matemática.

Cuando se inventó el Cálculo Diferencial quedó abierto el camino para inventar las ecuaciones diferenciales, las cuales se inventaron muy poco tiempo después. Cuando se inventó el Cálculo Integral quedó abierto el camino para inventar las ecuaciones integrales, las cuales tardaron mucho tiempo en inventarse; su gran desarrollo fue en el siglo XX. Asimismo cuando Liouville definió la derivación fraccionaria y la integración fraccionaria, quedó abierto el camino para las ecuaciones diferenciales e integrales fraccionarias, pero se tardó un siglo en lograr resolver las ecuaciones diferenciales e integrales fraccionarias, que son aquellas en las que la función incógnita aparece como derivada o integral fraccionaria.

En los años cincuenta he planteado las ecuaciones diferenciales fraccionarias semienteras que son aquellas en las que el orden de derivación es $1/2$ ó un múltiplo de $1/2$. Para ellas he obtenido una ecuación característica, en el caso de las ecuaciones diferenciales semienteras, lineales y de coeficientes constantes. Se trata de una ecuación algebraica en $\sqrt{p}$, que recuerda la ecuación característica de las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en p. Utilicé la transformada de Laplace y obtuve para la TL de la solución una combinación lineal de coeficientes constantes de la función (9):

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}-a} \tag{9}$$

en la que las a son las raíces de la ecuación característica. La TL^{-1} solución de la ecuación es la de la (9), son funciones de error integral, de variable real o compleja, que desempeñan para estas ecuaciones el mismo papel que las funciones exponencial de exponente real o complejo para las ecuaciones diferenciales clásicas. Resolví entonces los problemas de estabilidad cuando son oscilantes, el problema de las oscilaciones forzadas y de la resonancia.

Pude resolver este problema porque en los años cincuenta venían en las tablas la TL^{-1} de (9); pero como no venían las TL^{-1} de las funciones (10):

$$\frac{p^{1/3}}{p^{1/3}-a};\frac{p^{1/n}}{p^{1/n}-a} \tag{10}$$

siendo n un número entero, no pude entonces resolver las ecuaciones diferenciales fraccionarias en las que el orden de derivación es múltiplo de 1/3, o en general múltiplo de 1/n.

En el 2003 fui capaz de hallar las TL^{-1} de las (10) que aún siguen sin venir en las tablas y entonces pude ampliar lo que había hecho con las ecuaciones fraccionarias lineales de coeficientes constantes semienteras, al caso más general en que el orden de derivación es múltiplo de 1/n cualquiera que sea el valor de n entero.

Me di cuenta de una propiedad muy curiosa y es que las soluciones de las ecuaciones semienteras son la combinación lineal de la suma de una función exponencial y de su integral fraccionaria de orden $1/2$, por ser la TL^{-1} de (9) la suma de una función exponencial y de su integral fraccionaria de orden $1/2$.

Asimismo, la primera (10) tiene por TL^{-1} la suma de una función exponencial y de sus integrales fraccionarias de orden 1/3 y 2/3. La segunda (10) es la suma de una función exponencial y de sus integrales fraccionarias de orden 1/n, 2/n, …., (n-1)/n

En mi libro antecitado se da una exposición muy amplia sobre esta materia y sus repercusiones sobre la Teoría de las funciones trascendentes asociadas. Asimismo, pueden consultarse mis dos memorias antecitados publicadas en la Revista de la Real Academia de Ciencias en los años 2004 y 2006.

En los cuadros y dibujos de Goya se pueden admirar los monstruos que engendra la razón en sus sueños. Asimismo, los matemáticos hacia fines del siglo XIX, en su fiebre investigadora, crearon nuevos entes matemáticos que semejaban ser también monstruos de la razón. Son los llamados Fractales y hasta la segunda mitad del siglo XX no se inició la investigación en gran escala de la aplicación de los Fractales que hoy han adquirido una importancia extraordinaria.

A pesar de parecerse en el nombre, el Cálculo Fraccionario y la Teoría de Fractales son muy distintos. En el primero lo fraccionario son el orden de las derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales, de las series de potencias, y la extensión de teoremas a los que denominamos funciones holomorfas y mesomorfas fraccionarias. En la segunda, lo fraccionario es el número de dimensiones de los objetos fractales, mientras que en el Análisis y la Geometría ordinaria las dimensiones son siempre enteras, en los objetos fractales el número de dimensiones siempre es fraccionario.

Vamos a exponer una nueva teoría del número real que nos va a permitir obtener las funciones características (fc) de las distribuciones de probabilidad uniformes sobre los números reales menores que uno, obteniendo como fc productos infinitos que representan una misma fc, aunque aparentemente no lo parezcan. Se puede observar que esta nueva teoría es equivalente a las teorías clásicas del número real, como son la de las cortaduras en el campo de los números racionales (Dedekind) o a la que resulta de hacer completo el espacio métrico de los números racionales (Cantor), pero que en ello es posible obtener los resultados sobre Cálculo de Probabilidades que vamos a exponer.

Los números reales se representan ordinariamente en el sistema de numeración de base 10 (el decimal). Los números menores que 1 se representan por un número finito o infinito de cifras decimales, es decir, por un cero seguido de una coma y después de esta se escriben las cifras decimales. Si el número de estas cifras es finito o infinito, pero existe una cifra o varias cifras que se repiten periódicamente hasta el infinito, el número que representan es racional, lo que significa que es igual al cociente de dos números enteros. Si por el contrario no sucede lo anterior, el número se llama irracional, porque no puede expresarse como el cociente de dos números enteros. Los dos conjuntos de números racionales e irracionales anteriores forman el conjunto de los números reales menores que 1.

Además del sistema decimal (de base 10) se pueden utilizar otros sistemas de numeración de base p, siendo p un número entero mayor que uno. Si p es menor que 10 se utilizan el cero y todas las cifras del sistema decimal inferiores a p. Si p es mayor que 10 se utilizan las cifras del decimal y los símbolos necesarios para representar como cifras los números desde 10 hasta $p-1$; por ejemplo, en el sistema de base 12 son necesarios dos símbolos nuevos para representar los números 10 y 11, que ahora serían cifras. Hemos de observar que cuando hablamos de conjuntos finitos de cifras se les puede considerar de infinitas cifras, siendo iguales a cero todas las que vienen a continuación de la última cifra del antedicho conjunto finito que no es cero; nos referimos a cifras decimales.

Las cifras escritas a la derecha de la coma, que en el sistema de base 10 llamamos decimales, no tienen nombre en los sistemas de numeración de base distinta a 10, por lo que venimos llamándolas <u>binales</u>, <u>ternales</u>, a las de los sistemas de base 2 y 3 y en general llamamos <u>pales</u> a las del sistema de numeración de base p. Los números que se escriben sin coma son en cualquier sistema de numeración los números enteros, por tanto todo número real mayor que uno es la suma de un entero y de un número real menor que 1.

Todo número real tiene una representación única en cualquier sistema de numeración, lo que establece una correspondencia biunívoca (biyección) entre los números escritos en dos sistemas de numeración.

En el sistema decimal podemos observar que el cero y el 1 tienen dos representaciones porque

$$1 = 0'99....9..; 0 = 0'00....0.. \tag{11}$$

en donde existen infinitos 9 e infinitos ceros.

Lo mismo sucede en cualquier sistema de numeración de base a porque

$$1 = 0'a-1, a-1, ..., a-1, \tag{12}$$

y por la fórmula de la suma de una progresión geométrica de razón geométrica de razón $1/a$ como la de (12), su valor es

$$\frac{a-1}{a}\frac{1}{1-\frac{1}{a}} = 1 \tag{13}$$

Esta propiedad la tienen todos los números que después de la coma se escriben como (11) y (12).

En la nota 1ª describimos el aparato matemático mediante el que obtenemos la distribución uniforme de probabilidad sobre el conjunto de los números reales menores que 1. Vamos a explicar los resultados. La distribución uniforme de probabilidad significa que cualquier número tiene la misma probabilidad de ser escogido al azar, por ejemplo si se escriben en el sistema de numeración de base 2 se escribirían las cifras de un número escogido al azar, arrojando una moneda que tuviera un cero y un uno en cada cara, para escoger las infinitas cifras del número según saliese una u otra cara de la moneda. Si se escribiese el número en el sistema de base 6, se escogerían las cifras del número según el resultado de arrojar un dado en cuyas caras estuviesen escritos los números del 0 al 5. En el caso del sistema de numeración de base 2 hemos obtenido para la función característica (fc) la expresión:

$$\varphi(t) = e^{it/2} \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{t}{2^{n+1}} \tag{14}$$

Hemos demostrado que (14) es igual a la expresión

$$(14) = e^{it/2} \frac{2sen(t/2)}{t} \tag{15}$$

que es la fc de un punto repartido uniformemente al azar sobre un segmento de longitud la unidad. Es consecuencia de que el conjunto de los números reales menores que uno se puede representar por el conjunto de los puntos de un segmento de longitud la unidad. El valor medio m y la varianza σ^2 de (14) y (15) que son iguales, valen;

$$m = \frac{1}{2}; \sigma^2 = \frac{1}{12} \tag{16}$$

En la nota 1 pueden verse las fc de los números reales menores que 1 escritos en los sistemas de numeración de base p todas ellas son productos infinitos de forma distinta pero que tienen el mismo valor, son iguales entre sí, e iguales a (15) porque siempre representan la distribución uniforme de probabilidad de un número menor que uno, escogido al azar, cualquiera que sea el sistema de numeración usado o de un punto escogido al azar con la misma probabilidad, situado sobre un segmento de longitud la unidad. Se puede demostrar directamente la igualdad (15).

He obtenido (véase nota 2) las fc de un número escogido al azar con la misma probabilidad para todos, pertenecientes a un fractal numérico. Llamamos fractal numérico al conjunto de números reales menores que uno, que se escriben en el sistema de numeración de base p, con solo dos, tres,…o p-1 cifras.

En el sistema de base 2 no hay ningún fractal. En el de base 3 hay tres fractales que están formados por los números que se escriben con las cifras 0 y 1; 0 y 2; 1 y 2. En el sistemas de base 4 hay 10 fractales 6 de los cuales se escriben utilizando solo 2 cifras de las cuatro que existen y los 4 restantes son los fractales que se escriben utilizando solo 3 cifras de las 4.

En el sistema de base p hay

$$\binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \ldots + \binom{p}{p-1} = 2^p - \left[\binom{p}{0} + \binom{p}{1} + \binom{p}{p}\right] = 2^p - 2 - p \tag{17}$$

fractales, que son las combinaciones que se pueden formar con 2, 3, …, p-1 cifras escogidas entre las p cifras existentes. La (17) para p=2,3,4, da los valores 0, 3 y 10.

El primer fractal numérico conocido es el conjunto triádico de Cantor que es el conjunto de números reales que en el sistema de base 2 se pueden escribir con solo el 0 y el 2. Para este conjunto triádico de Cantor he calculado la fc de la distribución de probabilidad de un número menor que uno escogido al azar con la misma probabilidad. Esta fc es

$$e^{it/2} \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{t}{3^n} \tag{18}$$

véase la nota 2. El valor medio m y la varianza σ^2 de (18) son:

$$m = \frac{1}{2}; \sigma^2 = \frac{1}{8} \tag{19}$$

Obsérvese que

$$\sigma^2(19) > \sigma^2(16) \tag{20}$$

A todo fractal numérico se le puede asociar un fractal geométrico que es la representación gráfica del primero sobre el segundo, que vamos a explicar a continuación: a todo fractal numérico G hay asociado otro fractal geométrico F. Sea G el fractal numérico que en el sistema de numeración de base p se escribe solamente con a cifras ($1 < a < p$) y S_0 un segmento AB de longitud L; a partir *de* S_0 vamos a construir el fractal geométrico F asociado a G. Para ello dividimos S_0 en p

segmentos iguales, de los cuales solo conservamos a, los p segmentos están numerados de 0 a p-1, y los que conservamos son los que llevan las mismas cifras que se utilizan en G y están dispuestos en el mismo orden; se obtiene así S_1 formado por a segmentos de longitud L/p y el resto de S_0, queda vacío; la longitud de S_1 es L_1 igual a La/p. A continuación efectuamos la misma operación con cada uno de los segmentos que forma S_1 y se obtiene S_2 formado por a^2 segmentos de longitud L/p^2 y la longitud L_2 de S_2 es La^2/p^2. Se continúa indefinidamente esta operación, al efectuarla n veces se obtiene S_n formado por a^n segmentos iguales de longitud L/p^n ; la longitud total de S_n es $L(a/p)^n$. El fractal F es el límite

$$F = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{21}$$

Está formado por un número infinito de segmentos y su longitud total es cero debido a que:

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \frac{L}{p^n} = 0; \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{La^n}{p^n} = 0 \tag{22}$$

La integral ordinaria no se puede extender a F por ser su longitud cero, sin embargo se puede definir y aplicar una nueva integral ramificada, en vez de la ordinaria que es lineal, de modo que su valor viene dado por el límite de una suma de 2^n sumandos, cuando se tiende a infinito, mientras que la integral ordinaria es el límite de una suma de n sumandos cuando n tiende a infinito.

La Teoría de Probabilidades ordinaria no se puede aplicar en F porque las variables aleatorias que se definen no cumplen la axiomática de Kolmogorov; pero sí se les puede aplicar unan nueva axiomática que hemos formulado, basándonos en la nueva integral ramificada que hemos establecido. Por tanto se pueden obtener las funciones características (fc) de distribuciones de probabilidad, que resultan ser iguales para fractales numéricos y geométricos asociados; esta identidad la demuestro basándome en que el límite de la (15) cuando se divide t por n y se hace tender n a infinito es igual a 1.

Una vez construidos estos fractales geométricos se pueden construir fractales físicos (o mecánicos) de la siguiente manera: se sustituye el segmento S_0 por una barra homogénea B_0 de masa M y longitud también L y se van obteniendo conjuntos de barras homogéneas B_1, B_2,......, B_n cuyos soportes son los conjuntos de segmentos S_0, S_1,.....,S_n; se conserva la masa M que se reparte uniformemente sobre todas las barras que se han ido formando. El fractal físico asociado a las F y G es

$$B = \lim_{n\to\infty} B_n \tag{23}$$

Las longitudes de las barras que forman B_n para todo n son las mismas que las longitudes de los segmentos soportes que son los que forman S_n, y las masas m_n y densidades ρ_n son las mismas para todas las barras de B_n, valen:

$$m_n = \frac{M}{a^n}; \rho_n = \frac{m_n}{l_n} = \frac{M}{a^n}; \frac{L}{p^n} = \frac{M}{L}\left(\frac{p}{a}\right)^n \tag{24}$$

por tanto cuando n tiende a infinito m_n tiende a cero y ρ_n a infinito

$$\lim_{n\to\infty} m_n = 0; \lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty \tag{25}$$

Directamente por el teorema de Steiner de la Geometría de Masas o por la proporcionalidad del momento de inercia I y de la varianza σ^2, se puede calcular I. En el caso particular en que G es el conjunto triádico de Cantor, F es el llamado polvo de Cantor y B lo que he propuesto llamar barra de Cantor, el momento de inercia I vale:

$$I = \frac{Ml^2}{8} \tag{26}$$

que resulta de sustituir 1 por Ml^2 en la (19) como he demostrado en un apéndice de mi Diccionario de Matemática Moderna. Véase la nota 4ª. Lo anterior se puede extender a 2, 3 y a cualquier número de dimensiones; he obtenido fractales geométricos de área, volumen o hipervolumen nulos a los que he aplicado las integrales y probabilidades anteriores y fractales físicos (o mecánicos) a los que se extiende la Geometría de Masas y la Dinámica. Aunque estos fractales físicos no tienen representación en la Mecánica y son de volumen (área o longitud) nulo, como tienen masa, centro de gravedad y momento de inercia, obedecen las leyes de la Mecánica al igual que las barras, placas y sólidos ordinarios. Para asegurar la rigidez de los fractales es necesario que las partes huecas de los mismos no la rompan y así en una barra fractal habría que sustituir los huecos por barras sin masa. Hay que tener en cuenta que también los sólidos de la Mecánica Clásica tienen enormes vacíos en su interior ya que átomos y moléculas no están pegados unos a otros.

En mi libro y en mi Diccionario existen multitud en el primero y algunos en el segundo ejemplos de fractales. Allí puede verse cómo se puede extender a ellos también la derivación y las ecuaciones diferenciales. En estos casos los fractales son el resultado final de un proceso infinito de fractalización, del que son el límite. También existen pseudofractales.

¿Es posible que los fractales existan en la naturaleza? Contestamos a la pregunta después.

Los mundos del cálculo Fraccionario abierto por Liouville en el siglo XIX y de los Fractales así definidos por Mandelbrot en 1975 han abierto horizontes de grandeza a las Matemáticas puras y aplicadas.

Fuera del texto de la conferencia vamos a incluir más breves notas extraídas de mis propias investigaciones, ampliamente desarrolladas en mis publicaciones aquí citadas. Requiere un aparato matemático complicado y van dirigidas a lectores especialistas en la materia.

Nota 1ª. Distribuciones de probabilidad uniforme sobre todos los números reales menores que 1

Los números reales menores que 1 en el sistema de numeración de base p se escriben con un cero, seguido de una coma y de un número finito o infinito de cifras que van desde 0,1,…hasta p-1. Adoptamos el convenio de que si un número se escribe con un número finito de cifras, se escriben después de la última cifra distinta de cero, infinitos ceros. A las cifras escritas detrás de la coma las llamaremos pales; si el sistema es de base 2 o 3 las llamaremos binales, ternales y así sucesivamente; en el sistema de base 10 son los decimales.

Llamamos $C(1,p),C(2,p),\ldots,C(n,p)$ a los conjuntos de números reales menores que 1, que en el sistema de base p, escribimos con una cifra, dos cifras, … y en general n cifras. Se tiene que en $C(1,p)$ hay p números, en $C(2,p)$ hay p^2 y en $C(n,p)$ hay p^n números.

El conjunto de los infinitos números reales menores que 1, $C(\infty,p)$, en el sistema de base p tiene infinitas cifras. Es:

$$C(\infty,p)=\lim_{n\to\infty}C(n,p) \tag{1}$$

El número cardinal del conjunto de los números reales es el aleph χ_1 y el de los números enteros es el aleph χ_0. Los números reales son los pertenecientes a $C(\infty,p)$ y a la suma de uno de estos y de un número entero. Se tiene que

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} p^n = \chi_1 = p^{\chi_0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p^n = \\ p^{\lim_{n\to\infty}} = p^{\chi_0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n = \chi_0\end{gathered} \tag{2}$$

Un número cualquiera de $C(n,p)$ se escribe como la primera (3) y su valor es la segunda (3):

$$0, x_1, x_2, .., x_n; \quad \frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p^2}+\ldots+\frac{x_n}{p^n} \tag{3}$$

donde las x toman cualquier valor entre 0 y p-1.

Para escoger un número al azar de $C(n,p)$ con la misma probabilidad para todos hay que escoger al azar con la misma probabilidad para todas las cifras, las n x(3) que lo componen.

Las cifras x(3) son variables aleatorias (v.a.) que pueden tomar los valores de 0,1,…., hasta p-1 con la misma probabilidad $1/p$. La probabilidad de escoger cualquier número de $C(n,p)$ es $1/p^n$. La fc de la v.a. que es la primera cifra es igual a:

$$\varphi_1(t)=\frac{1+e^{it/p}+\ldots+e^{(p-1)it/p}}{p} \tag{4}$$

porque el valor de la primera cifra es x_1/p. La fc de la v.a. que es la cifra número j es

$$\varphi_j(t)=\frac{1+e^{it/p^j}+\ldots+e^{(p-1)it/p^j}}{p} \tag{5}$$

por ser el valor de la cifra número j igual a x_j/p^j.

Un número cualquiera de $C(n,p)$ escogido al azar es la suma de n v.a. $\xi_1\ldots\ldots\xi_n$ independientes cuyas fc son la (4) y la (5). Por tanto la fc de los números de $C(n,p)$ cuando tienen todos la misma probabilidad de ser escogidos es

$$\psi_n(t)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_1\left(\frac{t}{p^{j-1}}\right) \tag{6}$$

porque:

$$\varphi_j(t)=\varphi_1\left(\frac{t}{p^{j-1}}\right) \tag{7}$$

es una suma de v.a. en progresión geométrica, por lo que los valores medios $m_1,m_2,...,m_n$ de las φ_j son una progresión geométrica de razón *1/p* y las varianzas son una progresión geométrica $\sigma_1^2,....,\sigma_n^2$ de razón $1/p^2$.

El valor medio *m* de (6) vale

$$m=m_1+m_2+....+m_n=m_1\frac{1-\frac{1}{p^n}}{1-\frac{1}{p}} \tag{8}$$

y la varianza de (6) σ^2 vale:

$$\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+...+\sigma_n^2=\sigma_1^2\frac{1-\frac{1}{p^{2n}}}{1-\frac{1}{p^2}} \tag{9}$$

El límite cuando *n* tiende a infinito en (6) es la fc de la distribución de todos los números reales menores que 1 escritos en el sistema de numeración de base *p*. Es su fc, su valor medio *m* y su varianza σ^2

$$\psi(t)=\prod_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t);m=\frac{m_1}{1-\frac{1}{p}};\sigma^2=\frac{\sigma_1^2}{1-\frac{1}{p^2}} \tag{10}$$

El valor de m_1 es

$$m_1=\frac{0+1+...+(p-1)}{p^2}=\frac{p-1}{2p} \tag{11}$$

porque el valor que puede tomar ξ_1 son los que van de 0 hasta *(p-1)* divididos por *p* y estos son en número de *p*.

El valor de *m(10)* es

$$m(10)=\frac{p-1}{2p\left(1-\frac{1}{p}\right)}=\frac{1}{2} \tag{12}$$

cualquiera que sea *p*

El valor de σ_1^2 es:

$$\sigma_1^2=\frac{0+1+2^2+...+(p-1)^2}{p^3}-\left(\frac{p-1}{2p}\right)^2 \tag{13}$$

el primer término es el momento de segundo orden y el segundo es el cuadrado de la varianza. Se tiene que:

$$1+2^2+...+(p-1)^2=\frac{(p-1)p(2p-1)}{6} \tag{14}$$

y llevando este valor a (13) se obtiene

$$\sigma_1^2=\frac{p-1}{2p^2}\left(\frac{2p-1}{3}-\frac{p-1}{2}\right)=\frac{p^2-1}{12p^2} \tag{15}$$

lo que da para $\sigma^2(10)$ el valor

$$\sigma^2=\frac{p^2-1}{12p^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}=\frac{1}{12} \tag{16}$$

cualquiera que sea el valor de *p*.

Las (12) y (16) que hemos obtenido por el cálculo efectuado forzosamente tienen que tener este valor, porque ha de ser independiente de *p* ya que la distribución de probabilidad uniforme sobre el conjunto de todos los números reales menores que 1 ha de tener la misma fc cualquiera que sea el sistema de numeración en que estén escritos los números reales. Por tanto (12) y (16) han de ser independientes de *p*. Precisamente han de tenerlos valores (12) y (16) porque estos son los valores del valor medio y de la varianza de un punto repartido uniformemente al azar sobre un segmento de longitud unitaria, cuya fc si se toma como origen de abscisas es

$$\frac{2sen(t/2)}{t} \tag{17}$$

Cualesquiera que sea la base *p* del sistema de numeración de base *p*, el valor del producto infinito (10) ha de valer lo mismo.

El desarrollo anterior se refiere a la teoría general cualquiera que sea el sistema de numeración. Vamos a dar el caso particular del sistema binario de base 2, es decir *p=2*. Se tiene que

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2}\left(1+e^{it/2}\right)=e^{it/4}\cos\frac{t}{4} \tag{18}$$

y de aquí

$$m_1=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right);m=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{16}; \sigma^2 = \frac{1}{16}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{12} \qquad (19)$$

El producto infinito (10) con este valor (18) de φ_1 vale:

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{it/2^{n+1}} \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = e^{it/2} \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \qquad (20)$$

En este caso particular en que la base del sistema de numeración es 2, se puede demostrar por cálculo directo que:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = \frac{2sen\,(t/2)}{t} \qquad (21)$$

a partir de la conocida fórmula:

$$sen\frac{t}{2} = 2sen\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4} \qquad (22)$$

y de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n sen\,(t/2^n)}{t} = 1 \qquad (23)$$

Para cualquier base p del sistema de numeración se obtienen fc dadas por productos infinitos siempre iguales aunque no lo parezcan, por el razonamiento hecho anteriormente, los cuales por la (21) ofrecen distintos productos infinitos del seno.

Nota 2ª. Distribución de probabilidad uniforme sobre el conjunto triádico de Cantor y el polvo de Cantor

Este conjunto es el fractal numérico formado por todos los números menores que 1 que en el sistema de numeración de base 3 se escriben con las cifras 0 y 2; nunca figura el 1.

Todo número de este conjunto es igual a la suma infinita de v.a. binomiales en progresión geométrica de razón *1/3* que toman con la misma probabilidad *1/2* los valores:

$$0, 2/3; 0, (2/3)^2; \ldots\ldots\ldots; 0, (2/3)^n \ldots\ldots \qquad (1)$$

hasta el infinito. Las fc de estas v.a. son las

$$\frac{1}{2}\left(e^{i(2/3)t}+1\right); \ldots\ldots\ldots; \frac{1}{2}\left(e^{i(2/3)^n t} \ldots\ldots + 1\right) \qquad (2)$$

que se escriben también

$$e^{it/3}\cos\frac{t}{3}; \ldots\ldots; e^{it/3^n}\cos\frac{t}{3^n}; \ldots. \qquad (3)$$

La suma de estas infinitas v.a. tiene por fc el producto infinito:

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{it/3^n}\cos\left(\frac{t}{3^n}\right) = e^{it/2}\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{t}{3^n}\right) \qquad (4)$$

el valor medio m y la varianza σ^2 de esta suma es la suma de los valores medios y de las varianzas de los sumandos. El valor medio m vale:

$$m = \frac{1}{3} + \ldots. + \frac{1}{3^n} + \ldots. = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \qquad (5)$$

Las varianzas de los distintos factores de (4), teniendo en cuenta el desarrollo en serie de potencias de los cosenos son:

$$1 - \frac{t^2}{2.3^2}\ldots.; 1 - \frac{t^2}{2.3^n}; \ldots. \qquad (6)$$

y por tanto

$$\sigma^2 = \frac{1}{3^2}\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{8} \qquad (7)$$

Obsérvese que esta varianza es mayor que la de los números reales menores que 1 de la nota 1ª.

Se llama polvo de Cantor al fractal geométrico asociado al fractal numérico que es el conjunto triádico de Cantor.

En mi libro sobre Fractales he calculado multitud de distribuciones de probabilidad.

Nota 3ª. Indeterminismo débil y fuerte o de 1ª y 2ª especie.

En mis investigaciones sobre problemas estocásticos he encontrado que a veces las probabilidades son variables ciertas y otras son variables aleatorias, lo que me ha conducido a distinguir dos especies de indeterminismo, uno más débil o de 1ª especie cuando a un fenómeno hay asociada una distribución de probabilidad que varía de modo determinista, tal es el caso de la función de onda de la Mecánica cuántica solución de la ecuación de Schrödinger.

Si la distribución de probabilidad asociada al fenómeno varía de manera indeterminada, el indeterminismo es más fuerte, tal es el caso de la distribución de probabilidad asociada a un punto que se mueve sobre una esfera de radio la unidad con movimiento browniano; en este caso los cuadrados de las coordenadas del punto respecto al centro de la esfera definían una variable aleatoria trinomial, cuyas probabilidades son aleatorias; en este caso el indeterminismo lo llamamos fuerte o de 2ª especie.

Nota 4ª. Un ejemplo de fractal físico: la barra de Cantor. Péndulos fractales.

En un apéndice de mi Diccionario de Matemática Moderna he investigado los fractales físicos, entre ellos el que he llamado barra de Cantor. A partir del fractal geométrico de la nota 2ª (polvo de Cantor) formado por un conjunto discontinuo de puntos con la potencia del continuo, de longitud nula pero espaciado sobre una longitud l, se puede formar un objeto físico que he propuesto llamar barra de Cantor, de la siguiente manera: sea B_0 una barra homogénea de longitud l, masa m, que incluye sus extremos; se extrae de ella un tercio central (excluidos sus extremos) y se reparte la masa total m de B_0 entre las dos partes del nuevo objeto B_1 que queda, el cual está formado por dos barras de longitud $l_1=l/3$, masa $m_1=m/2$, densidad $3m/2l=\rho_1$. Si se repite indefinidamente esta operación, se obtiene una sucesión de barras B_n, tales que el número N_n de barras que la forman, sus masas m_n, sus longitudes l_n, y densidades ρ_n valen:

$$N_n = 2^n; m_n = m/2^n; l_n = l/3^n; \rho_n = 3^n m/2^n l \qquad (1)$$

Si llamamos L_n a las longitudes totales de las barras B_n es

$$L_0 = l; L_n = \left(2^n/3^n\right)L_0 \qquad (2)$$

La masa total de la sucesión de barras es siempre la misma. Se tiene que:

$$n \to \infty \Rightarrow N \to \infty; m_n \to 0, l_n \to 0, \rho_n \to \infty; L_n \to 0 \qquad (3)$$

Llamamos barra de Cantor a

$$B_\infty = \lim_{n\to\infty} B_n \qquad (4)$$

El momento de inercia I de B_n por ser proporcional a la varianza del polvo de Cantor (nota 2ª) o por cálculo directo utilizando el teorema de Steiner de la Geometría de Masas vale

$$I = \frac{ml^2}{8} \qquad (5)$$

La barra de Cantor sería el ejemplo más sencillo de un péndulo fractal.

Vamos a calcular el número de huecos Nh_n de huecos y la longitud total hueca Nh_n de B_n, así como la distribución de los números nh de huecos según sus longitudes lh. Como entre dos segmentos no huecos existe siempre un segmento hueco, y los dos extremos no están huecos, entonces es:

$$Nh_n = N_n - 1 = 2^{n-1} \qquad (6)$$

y como la suma de las longitudes hueca y no huecas es igual a la longitud total L_n es:

$$Lh_n = L - L_n = L\left(1-(2/3)^n\right) \qquad (7)$$

que tiende a L cuando n tiende a infinito.

En B_n el número de huecos es el que habrá en B_{n-1} más el número de nuevos huecos que se forman al pasar de B_{n-1} a B_n; por cada segmento no hueco de B_{n-1} se forma un segmento no hueco nuevo al pasar a B_n. Por tanto

$$Nh_n = Nh_{n-1} + N_{n-1} = Nh_{n-1} + 2^{n-1} \qquad (8)$$

y de aquí se sigue que

$$Nh_0 = 0; Nh_1 = 1; Nh_2 = 1+2; ....; Nh_n = 1+2+....+2^{n-1} = 2^n - 1 \qquad (9)$$

que reproduce el resultado (6). Las longitudes huecas que corresponden a los sumandos de (9) forman una progresión geométrica de razón *2/3* que es:

$$\frac{L}{3}; \frac{2L}{3^2}; .....; \frac{2^{n-1}L}{3^n} \qquad (10)$$

existen un hueco de longitud $L/3$, 2 de longitud $L/3^2$ y así hasta 2^{n-1} de longitud $L/3^n$. La suma de (10) es

$$Lh_n = \frac{L}{3}\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3} = L\left(1-(2/3)^n\right) \qquad (11)$$

que reproduce el resultado (7)

Nota 5ª. ¿Existen los sólidos fractales y una quinta interacción fractal? El polvo fractal y la materia obscura del universo.

Los fractales numéricos y geométricos son objetos matemáticos que existen en la mente humana, y por los que no hay ninguna duda sobre su existencia real; sin embargo los fractales físicos no basta con que existan en la mente humana, tienen que existir en la naturaleza o poder ser producidos en el laboratorio. Todos los fractales físicos tienen como soporte un fractal geométrico que sí existe, proceden de un objeto físico ordinario, mediante un proceso de fractalización infinito, del que son el límite. Por tanto hace falta que existan en la naturaleza tales procesos. Si nos fijamos en la barra de Cantor, la barra inicial B_0 se rompe en tres pedazos iguales, de los que desaparece el pedazo central, cuya masa se reparte por igual entre los dos pedazos restantes uniformemente, con lo que B_0 se transforma en B_1. Sobre cada uno de los pedazos de B_1 se procede de igual manera y así se obtiene B_2. Se procede indefinidamente de esta manera y se obtiene como límite el fractal B, que es un conjunto infinito que tiene la potencia del continuo de partículas (barras puntuales) de volumen y de masa nulos, pero que todas juntas tienen la masa inicial de B_0, ocupan un volumen nulo y están distribuidas sobre toda la longitud inicial de B_0. La dificultad de la existencia de B está en que se mantengan todas las partículas sobre el segmento inicial de B_0 y en la disposición ordenada que se ha descrito; lo natural parecería ser que las partículas que forman B se esparzan por el espacio, quedando confinadas en un espacio de volumen finito, formado por un conjunto infinito de partículas de volumen y masa nula, que todas juntas tienen la masa inicial de B_0, pero ocupan un volumen nulo. En ambos casos las partículas tienen una densidad infinita; en el primer caso se obtiene un sólido fractal en el que la distancia entre dos partículas cualesquiera es constante, es un sistema indeformable y en el segundo forman un polvo fractal con masa, pero que no ocupa volumen y que está esparcido sobre un volumen finito; se trata de un sistema deformable.

No existe dificultad para concebir la existencia de un polvo fractal, desordenado y deformable, con masa y que no ocupa volumen, pero esparcido sobre un volumen finito. Sí existe dificultad en concebir un sólido fractal ordenado, indeformable, en el que la distancia entre dos partículas cualesquiera sea constante, porque al ser el volumen ocupado nulo, quedaría el volumen del sólido ordinario inicial hueco y en él se podrían mover libremente las partículas. Para que esto pudiera suceder es necesario la existencia de una quinta fuerza o interacción en la naturaleza que mantenga el sólido fractal, al igual que existe por ejemplo la interacción fuerte que permite la existencia del protón.

En mi opinión los fractales físicos serían de dos clases: o un sólido fractal o el polvo fractal.

Un sólido fractal es un fractal geométrico formado por infinitas partículas puntuales con potencia del continuo, sin masa ni volumen, que se mantiene siempre el mismo e indeformable, tal que todas las partículas que lo forman suman una masa (aunque por separado su masa es nula), no ocupan volumen, están contenidos en el sólido ordinario inicial, del que proceden por un proceso de fractalización indefinido, del que el sólido fractal es el límite. La densidad de las partículas es infinita. Los sólidos fractales tienen centro de gravedad y momento de inercia, por lo que obedecen las leyes de la Mecánica. Para que existan es necesario que exista una nueva interacción (la fractal) que permita la existencia de los sólidos fractales.

El polvo fractal (que es la otra posibilidad de fractal físico) es el resultado de pulverizar un sólido fractal, es un conjunto infinito de partículas sin masa ni volumen, pero que todas juntas tienen masa y no ocupan volumen (de aquí su densidad infinita), están dispersas sobre una parte del espacio que puede ser variable. No existe interacción entre ellas y forman un conjunto deformable. Al no ocupar volumen, pueden ser atravesadas por la materia.

La materia obscura del universo, quizás sea un polvo fractal, que tendría masa, no ocuparía volumen, y estaría espaciada sobre el espacio y podría ser atravesada por la materia ordinaria.

BIBLIOGRAFÍA

1. Courant y Robbins: ¿Qué es la Matemática?. Edit. Aguilar, 1979.

2. Devlin: El lenguaje de las Matemáticas. Ediciones Robinbook, 2002.

3. Varios autores: Pensar la Matemática. Tusquets editores, 1984.

4. Gleick: Caos. Edit. Seix Barral, 1988

5. Mandelbrot: Los objetos fractales. Tusquets editores, 1987.

6. Mandelbrot: La Geometría Fractal de la Naturaleza. Tusquets editores, 1997.

7. André Weil: Memorias de un aprendiz. Edit Nivola, 2002.

8. Ulam: Aventuras de un Matemático. Edit Nivola, 2002.

9. Le Lionnais: Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Edit. Eudeba, 1962.

10. Bertrand Russell: Los principios de la Matemática. Edit. Eudeba, 1948.

11. Gribbin: Así de simple. Edit. Crítica, 2006.

12. Gray: El reto de Hilbert. Edit. Crítica, 2003.

13. Stewart y Golubitsky: ¿Es Dios un geómetra? Edit Crítica, 1995.

14. Darío Maravall: Filosofía de las Matemáticas. Edit Dossat, 1961.

15. Darío Maravall: Teoría de la Investigación Matemática. Edit. Dossat, 1966.

16. Darío Maravall: Didáctica y Dialéctica Matemáticas. Edit. Dossat, 1969.

17. Darío Maravall: Grandes Problemas de la Filosofía Científica. Edit. Nacional, 1973.

18. Darío Maravall: Las soluciones exactas de las ecuaciones integrales de Rheología y de la Viscoelasticidad y sus consecuencias físicas. Revista de la Real Academia de Ciencias, 1978.

19. Darío Maravall: Introducción a la Investigación en Física y Matemáticas. Edit. Empeño 14, 1981.