

DE GATOS, JUEGOS Y ESTADÍSTICAS, A LA TELEPORTACIÓN CUÁNTICA

ALBERTO GALINDO TIXAIRE *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Departamento de Física Teórica. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense. 28040 MADRID. agt@fis.ucm.es.

I. INTRODUCCIÓN

Los cuantos se descubrieron en 1900. Un siglo después, siguen causando debates apasionados. El éxito inigualado de la física cuántica en la descripción de los procesos atómicos, nucleares y subnucleares, así como en el estudio de la materia condensada, nos hace olvidar que el comportamiento cuántico sorprende incluso a los que trabajan habitualmente con tal herramienta.

El objeto de esta conferencia es presentar, de forma elemental, algunos rompecabezas que han causado furor durante décadas, así como ciertas aplicaciones cuánticas a la teoría de juegos y a la transmisión de información. Los ejemplos centrales serán:

1. El felino más importante de la física es el gato de Schrödinger. ¿Se halla el pobre animal en una macabra superposición de “gato vivo” y “gato muerto”? ¿O la simple y rápida descoherencia producida por la interacción del gato con el medio ambiente se encarga de evitarnos este espectáculo?
2. En una caja cerrada hay una moneda de 2 euros, con su cara hacia arriba. El físico Q, sin mirar dentro, puede meter la mano y darle la vuelta a la moneda o dejarla como está. A continuación, juega el físico C, procediendo con igual regla. Finalmente, actúa de nuevo Q, tras lo cual, se abre la caja, y si la moneda está con su cara

hacia arriba, Q se queda con ella, y de lo contrario, es C quien se la lleva. Esperaríamos que las probabilidades de ganar cada uno fueran del 50%. Pero, mientras que C es un jugador clásico, Q es un jugador “cuántico” y gana siempre. ¿Cómo lo consigue?

3. En el famoso experimento de la doble rendija, partícula a partícula, ¿cómo “sabe” la partícula que pasa por una de las rendijas que la otra rendija, por la que no pasa, está abierta? ¿Acaso la partícula se “divide” y pasa por las dos ranuras? Si esa partícula deja algún rastro de por cuál de las dos ranuras ha pasado, las interferencias no se observan. Pero si borramos ese rastro, aunque sea después de haber pasado la partícula por la(s) rendija(s), las franjas de interferencia reaparecen. ¿No es esto paradójico?
4. En el juego de las 20 preguntas, un jugador clásico, C, le pregunta a otro personaje, X, quien sólo puede responder SI o NO, y con esta información C tiene que determinar la solución tras a lo sumo 20 preguntas. A un jugador cuántico Q le bastaría con hacer una sola pregunta. ¿Cuál?
5. En el conocido dilema del “prisionero” con una sola jugada, la estrategia de la traición es la solución óptima de cada uno de los participantes, salvo si estos deciden previamente recurrir a la física cuántica para fundamentar sus elecciones individuales. ¿Qué nuevo protocolo deben seguir?

* Texto base de una conferencia de igual título, para el X Programa de Difusión de la Cultura Científica y Tecnológica. No se ha actualizado.

6. La firma C(ampaña) dedicada a encuestas entrega sus resultados a la empresa M(onolito) que le ha encargado una estadística de pares de gemelos, atendiendo a su sexo, color de la piel (blanco, negro), y edad (joven, viejo). Son estos: 25% de mujeres de raza blanca, 25% de personas jóvenes de raza negra, y 75% de mujeres jóvenes. La empresa M, al ver los datos, se niega a pagar y denuncia a C por estafa. ¿Por qué? Un asesor cuántico de C consigue que la denuncia no prospere. ¿Qué arguye?
7. El teletransporte de materia/energía estilo *Star Trek* sigue siendo ciencia-ficción. Pero la física cuántica permite algo muy sutil: teleportar una cantidad ilimitada de información, incluso desconocida, mediante el solo envío, por canales ordinarios, de dos bits. ¿Cómo?

Trataremos de compartir con el oyente el asombro inagotable que origina el mundo de los quanta.

II. EL GATO DE SCHRÖDINGER

En 1935 aparecía un trabajo de Schrödinger que iba a tener una gran repercusión.¹ En él introduce Schrödinger su famosa descripción del gato encerrado en una cámara acorazada en la que hay un dispositivo diabólico inaccesible al felino, un contador Geiger con una sustancia radiactiva tal que en el transcurso de una hora podrá con igual probabilidad desintegrarse uno de sus átomos o no. De hacerlo, la desintegración descargará el tubo del contador, lo que accionará un martillo que romperá una ampolla liberando el letal ácido cianhídrico que contiene. La función de ondas que describirá la situación del gato, al cabo de una hora, será una superposición equilibrada de estados de gato vivo y de gato muerto.²

Esta ridícula condición para el pobre animal se sigue de haber extrapolado al mundo macroscópico



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|vivo\rangle + |muerto\rangle]$$

Figura 1. Gato en estado de superposición de "vivo" y "muerto".

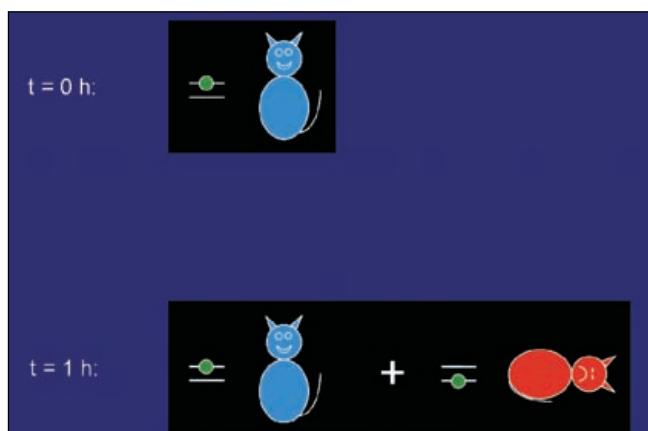


Figura 2. Estado del átomo y del gato en el instante inicial y al cabo de una hora.

($\sim 10^{26}$ átomos del gato) nuestras observaciones del mundo atómico.

La superposición lineal de estados cuánticos exige la coherencia de estos, una propiedad sumamente frágil cuya presencia durante un cierto tiempo requiere ausencia práctica de interacción, durante el mismo, con el exterior. La descoherencia provocada por el

¹ E. Schrödinger, *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwissenschaften **23**: pp. 807-812; 823-828; 844-849 (1935).

² Man kann auch ganz burleske Fälle konstruieren. Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muß): in einem Geigerschen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, so wenig, daß im Laufe einer Stunde vielleicht eines von den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmchen, das ein Körbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde lang sich selbst überlassen, so wird man sich sagen, daß die Katze noch lebt, wenn inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfall würde sie vergiftet haben. Die ψ -Funktion des ganzen Systems würde das so zum Ausdruck bringen, daß in ihr die lebende und die tote Katze (s. v. v.) zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind.

entorno de un sistema macroscópico es casi instantánea; tener en cuenta que puede bastar el intercambio de un fotón para dar al traste con la coherencia inicial. De aquí que el escenario descrito por Schrödinger no admite una descripción cuántica mediante un estado puro ψ , y la experiencia ordinaria, clásica, puede dar cuenta de él. Si se quiere, ese estado ψ se reduce, por la acción inevitable del entorno, a un estado mezcla clásico.

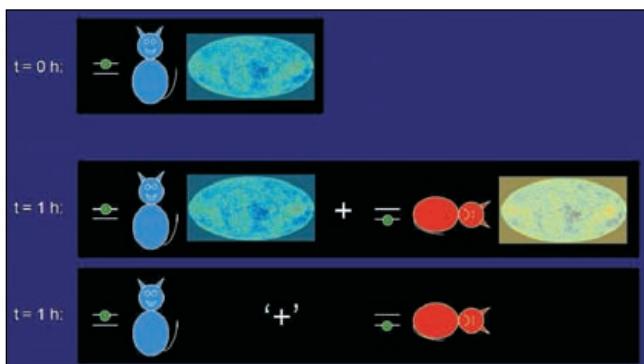


Figura 3. Estados del átomo, del gato y del universo en el instante inicial y al cabo de una hora. Cuando el entorno universal se ignora, la suma ya no es de amplitudes, sino de probabilidades.

Hemos echado mano del gato de Schrödinger por ser el exponente más famoso de la profunda diferencia entre el mundo cuántico y el clásico. Se hubieran podido usar muchos otros casos: ¿Por qué la aguja de una brújula nunca está en superposición de Norte y Sur, por ejemplo? ¿O por qué cuando un naípe, en posición inicialmente vertical, cae sobre el tapete, no queda en superposición de cara arriba y cara abajo a la vez? Estas visiones nos producirían impacto similar al del gato vivo y muerto, y como esta última, no se dan. Sin embargo, como carecemos de vivencias directas con objetos microscópicos, aceptamos sin demasiado esfuerzo que en el mundo microscópico se den situaciones superpuestas, por ejemplo, de bilocalización. Es inevitable la pregunta de si el tránsito cuántico a clásico es gradual, o por el contrario abrupto, y si el comportamiento de una u otra forma es una simple cuestión de tamaño o de qué.

La teoría de la descoherencia ofrece una respuesta a estos interrogantes. El paso de comportamiento cuántico a clásico en un sistema físico es cuestión de la suficiente pequeñez de su tiempo de descoherencia, y no de que su tamaño supere un valor crítico, aunque casi siempre vayan de la mano ambas circunstancias. En sistemas macroscópicos, su interacción con el entorno es por regla general tan fuerte que pierden aquellos de forma prácticamente inmediata la coherencia cuántica que pudieran tener inicialmente. Incluso para moléculas grandes la descoherencia entre dos posibles posiciones separadas en unos 10 Å puede desaparecer en tiempos del orden de 10^{-17} s. Experimentalmente se ha visto cómo la coherencia va perdiéndose por efecto del entorno, y cómo, sorprendentemente, puede “reavivarse” en ciertas situaciones experimentales con ambiente controlado.³

A. Realización de estados “gato”

Si bien podemos olvidarnos del gato original de Schrödinger, los físicos han conseguido superponer estados puros, y mantener la coherencia de tal superposición, con sistemas cada vez más complejos.

Por ejemplo, el año 2000 se consiguió la superposición coherente de dos corrientes eléctricas, de $0.5 \mu\text{A}$ cada una (movimiento en centro de masas de millones de pares de Cooper) en una espira superconductora micrométrica con tres uniones Josephson.⁴

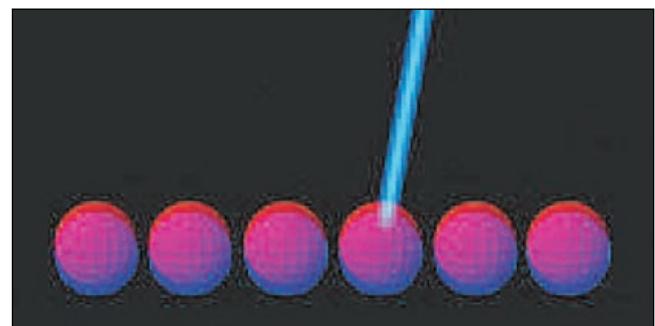


Figura 4. Estado “gato” de seis iones de berilio (NIST).

³ M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, S. Haroche, *Observing the Progressive Decoherence of the “Meter” in a Quantum Measurement*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887-4890 (1996); J. M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, *Reversible Decoherence of a Mesoscopic Superposition of Field States*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1964-1967 (1997).

⁴ C. H. van der Wal, A. C. J. ter Haar, F. K. Wilhelm, R. N. Schouten, C. J. P. M. Harmans, T. P. Orlando, S. Lloyd, J. E. Mooij, *Quantum Superposition of Macroscopic Persistent-Current States*, Science **290**, 773-777 (2000).

Investigadores del NIST (*National Institute of Standards and Technology*) han construido estados “gato” superposición de estados de un colectivo de seis iones de berilio en que, en uno de los estados, estos iones tienen sus spines hacia arriba (giran todos en sentido positivo), y en el otro estado todos giran en sentido negativo (spin hacia abajo). Los estados $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ de cada ión son de un doblete hiperfino. Logran mantenerlos así durante $50\ \mu\text{s}$.⁵

Otros grupos acaban de conseguir por primera vez la superposición coherente de dos pulsos de luz, cada uno con 2 fotones. Esta superposición es un caso de luz cuántica, para la que la función de Wigner $W(x, p)$ asociada tiene zonas de negatividad.⁶

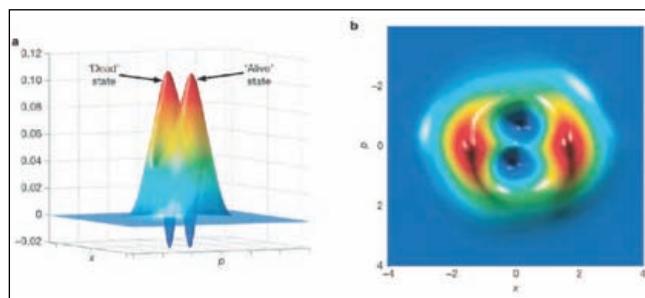


Figura 5. Función de Wigner del estado “gato” de dos pulsos de luz. Imagen de interferencia entre ambos pulsos (Nature).

III. CARA, CRUZ Y “CANTO”

A nadie se le ocurriría apostar por canto en la caída de una moneda lanzada al aire.

Sin embargo, es parte esencial de una estrategia ganadora en un simple juego, eso sí, con monedas cuánticas. Se trata de un juego ideado por Meyer en 1999, y conocido como *PQ Penny Flip*.⁷ Cuéntase que, estando la nave *Starship Enterprise* de la serie *Star Trek* al borde de una catástrofe, aparece a bordo de ella un alienígena con extraños poderes, llamado *Q*, que ofrece su ayuda al Capitán Jean Luc Picard (*P* para



Figura 6. Monedas (Science News, 1999).

acortar), comandante de la nave, siempre que sepa este derrotarle en un sencillo juego. Saca *Q* de su bolsillo una moneda, y se la da a *P* para que este la meta en una caja, con su cara hacia arriba. A continuación, mete la mano *Q* y sin que nadie le vea puede dejar la moneda como está o darle la vuelta. A continuación le toca hacer lo mismo a *P*, y luego, por último, actúa de nuevo *Q*. Tras esto se abre la caja. Si la moneda está cara arriba, *Q* gana; de lo contrario, gana *P*. Parece un juego en que ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar, así que jugando aleatoriamente terminarán en paz. Sin embargo, ¡gana siempre *Q*!

¿Por qué? Porque la moneda es “cuántica”, y solo lo sabe *Q*, que cada vez que en el juego le toca por primera vez, gira la moneda hasta colocarla en una superposición de cara y cruz con iguales amplitudes.⁸ Cualquier acción de *P* (dejar la moneda como está o cambiar cara por cruz) no afectará al estado cuántico de la moneda y le bastará a *Q*, en su actuación final, deshacer el giro que imprimió a la moneda al empezar el juego. Resumiendo:

1/ Estado inicial de la moneda, tras empezar *P*:

$$|0\rangle \quad \text{cara.}$$

2/ Acción de *Q* (equivalente a la puerta Hadamard *H*):

$$|0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{cara o cruz.}$$

2/ Acción de *P* (equivalente a $\mathbf{1}_2$ o a σ_x):

⁵ D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R.B. Blakestad, J. Chiaverini, D. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle, and D. J. Wineland. *Creation of a six atom “Schrödinger cat” state*. Nature **438**, 639-642 (2005).

⁶ A. Ourjoumtsev, H. Jeong, R. Tualle-Brouri and Ph. Grangier, *Generation of optical “Schrödinger cats” from photon number states*, Nature **448**, 784-786 (2007).

⁷ D. A. Meyer, *Quantum strategies*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1052-1055 (1999).

⁸ En términos de estados $|0\rangle$, $|1\rangle$, *Q* se limita a hacer un giro de 90° alrededor de un eje horizontal.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle) \begin{cases} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle), \\ \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle+|0\rangle). \end{cases}$$

3/ Acción de Q (equivalente a H^{-1}):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle) \mapsto |0\rangle.$$

IV. EN TORNO A LA DOBLE RENDIJA

Todos los físicos han oido hablar del experimento de la doble rendija. Realizado por el extraordinario físico inglés Thomas Young en 1801,⁹ mostró claramente la naturaleza ondulatoria de la luz clásica y arrinconó a la teoría corpuscular de la luz, propuesta y defendida por Newton.

Cuando un haz de luz incide sobre una lámina opaca con un pequeño orificio, y la luz que emerge de este ilumina otra lámina paralela y opaca en la que se han abierto dos rendijas estrechas y paralelas, se observan en una pantalla colocada tras la segunda lámina una serie de franjas alternadas de luz y oscuridad, consecuencia de la interferencia (constructiva o destructiva, según el caso) de los subhaces luminosos que cruzan cada una de las rendijas.

También saben los físicos que Einstein en 1905 devolvió a escena la imagen corpuscular de la luz como un chorro de *quanta* de energía, los llamados fotones, que se manifiesta también claramente en los fenómenos de emisión y absorción de la radiación electromagnética. Ambos aspectos de la luz, ondulatorio y corpuscular, conviven en la física desde entonces en perfecta armonía y dualidad. Y no solo con fotones. Lo que ordinariamente concebimos como partículas, también muestran una naturaleza ondulatoria en determinadas circunstancias.

Cuando se realiza el experimento de Young con haces tan débiles que podemos suponer que en cada momento solo hay un fotón en juego, a la pantalla final van llegando cada uno de estos fotones de modo aleatorio, produciendo una señal muy localizada bien en una película fotográfica que recubre la pantalla, bien en un mosaico de pequeños detectores cubriendo esta, y distribuyéndose de forma que, cuando su número es suficientemente alto, la densidad superficial de impactos fotónicos tiende a la intensidad clásica de la demostración clásica de Young. Un experimento de este tipo fue llevado a cabo por Taylor en 1909, utilizando una fuente de luz de intensidad equivalente a la llama de una vela colocada a un par de kilómetros del montaje experimental.¹⁰

El experimento de Young con partículas materiales (precisamente con electrones) fue llevado a cabo en 1961 por Jönsson.¹¹ Hasta 1974 no se realizó con electrones “de uno en uno”, por Merli y col; y unos años después, por Tonomura *et al.* en 1989, con técnica más refinada y elegante.¹²

A. Borradores cuánticos

Según el principio de complementariedad de Bohr, todo, absolutamente todo, tiene aspectos ondulatorios y aspectos corpusculares, complementarios entre sí. Pensar solo mediante una de esas imágenes es incompleto: con corpúsculos (de trayectoria bien definida), no explicaremos las interferencias; con ondas, no entenderemos cómo se producen detecciones puntuales en una pantalla. Ambos aspectos son necesarios a la vez. Lo que ocurre es que a veces, según la disposición experimental, un aspecto destaca más que el otro.

1. *Welche Weg*

1/ De Thomas Young aprendimos hace dos siglos que la luz interfiere. Realizando el experimento fotón a

⁹ Así lo narraba el propio Young en 1803: *I made a small hole in a window shutter, and covered it with a thick piece of paper; which I perforated with a fine needle.... I brought into the sunbeam a slip of card, about one thirtieth of an inch in breadth, and observed its shadow, either on the wall, or on other cards held at different distances.*

¹⁰ G. I. Taylor, *Interference Fringes with Feeble Light*, Proc. Cam. phil. Soc. **15**, 114 (1909).

¹¹ C. Jönsson, *Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten*, Zeitschrift für Physik, **161**, 454-474 (1961); *Electron diffraction at multiple slits*, American Journal of Physics, **42**, 4-11 (1974).

¹² A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki and H. Ezawa, *Demonstration of Single-Electron Buildup of an Interference Pattern*, American Journal of Physics **57**, 117-120 (1989).

fotón, cada impacto en la pantalla es aleatorio, pero todo el conjunto de impactos reproduce el patrón de interferencias. Es como si cada fotón pasara a la vez por ambas rendijas, siguiendo aquella extraña instrucción de “cuando llegues a una bifurcación, síguela”.

2/ Si podemos conocer por cual de las rendijas ha pasado el fotón, esto es, qué camino (*welche Weg*, abreviadamente WW) ha seguido, la interferencia desaparece. Esta información puede conseguirse, sin cambio en el resultado, mucho después de que el fotón haya tenido que “decidir” entre ir por una rendija, por la otra, o por las dos a la vez. Resulta que el fotón siempre elige bien: si el mecanismo borrador de información sobre el camino seguido está “apagado”, el fotón pasa por ambas rendijas a la vez, y si está “encendido”, pasa por una, o (exclusivo) por la otra. ¿No resulta esto extraño? Sí lo es, debido a nuestra percepción clásica de los fenómenos y del tiempo. Creemos ingenuamente que el fotón, al llegar a la pantalla con las rendijas, tiene que realizar siempre una elección concreta: pasar por la 1, o pasar por la 2, o pasar por 1+2. No, no es así. La norma cuántica es que el fotón asume todas las posibilidades a la vez, todas las historias, y se concreta en una realidad sólo al ser observado.

3/ Mas si borramos esa información sobre el “por dónde” se restablece la interferencia, de acuerdo con lo que en lenguaje feynmaniano se expresa diciendo que las alternativas indistinguibles interfieren. Ese borrado es posible cuando la información adquirida lo ha sido a través de un proceso reversible, como es el “etiquetado de historias”. Y como en el caso anterior, puede realizarse mucho después de que nuestro sistema cuántico haya tenido que “optar” por un comportamiento ondulatorio o por un comportamiento corpuscular, atendiendo a nuestro sentido familiar del tiempo y de las alternativas.

2. Cuando no queda rastro del camino

Supongamos un par de átomos iguales en las posiciones 1 y 2 sobre los que incide un haz láser con la frecuencia resonante adecuada para excitarlos desde el nivel fundamental *a* a otro excitado *b*. Estos átomos

con dos niveles relevantes, al desexcitarse, pasando de nuevo al nivel fundamental *a*, emiten un fotón γ , que se recoge en una pantalla. El fotón que llega al detector puede provenir de uno cualquiera de los átomos, y como estos están al final ambos en el nivel básico, cualquiera que sea el que se ha excitado-desexcitado, no queda señal del “camino” (esto es, de qué átomo ha soltado el fotón que llega a la pantalla), y los fotones que se recogen en la pantalla van acumulándose en un patrón de interferencia.

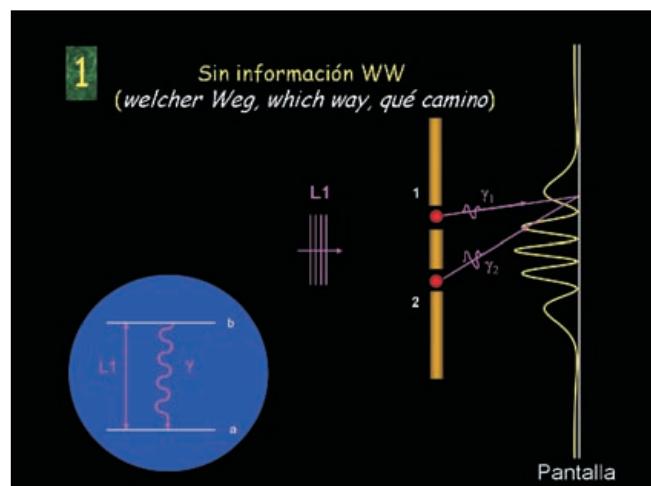


Figura 7. Sin información WW.

3. Cuando hay huellas

Supongamos ahora que los átomos tienen 3 niveles efectivos, y que la desexcitación lleva a un nivel intermedio *c* distinto de *a*. Este nivel nuevo hace de “chivato” o “etiqueta”, y distingue las alternativas 1 y 2. Bastaría mirar en qué estado están los átomos tras registrar el fotón γ , para saber de qué átomo ha procedido este, esto es, para conocer el “camino”. Mas no hace falta mirar; el hecho de que podamos hacerlo si queremos basta para romper la coherencia de las alternativas.

Nótese que, contra lo que se afirma muy a menudo, esta información de “por dónde” no ha exigido perturbar sin control el fotón. Es el principio de complementariedad, y no el principio de indeterminación, el responsable de que desaparezca la interferencia.¹³

¹³ M. O. Scully and K. Drühl, *Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and “delayed choice” in*

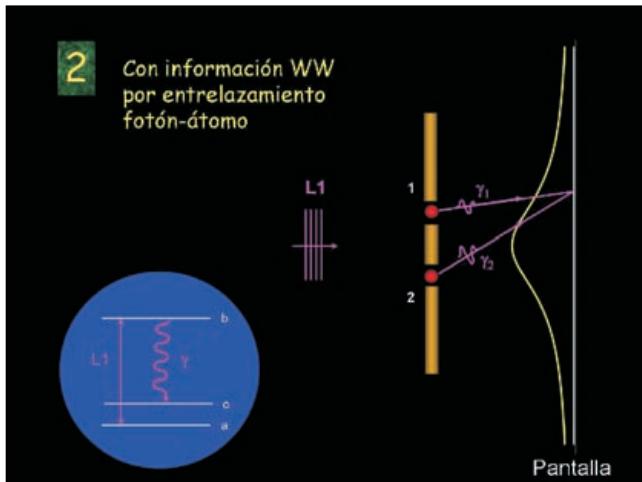


Figura 8. Con información WW por entrelazamiento fotón-átomo.

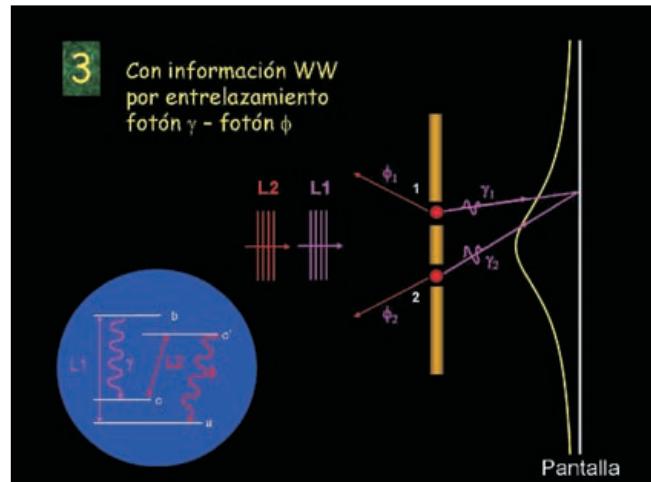


Figura 9. Con información WW por entrelazamiento fotón γ - fotón ϕ .

4. Borrado de huellas

Nos preguntamos si sería posible restablecer las franjas borrando de algún modo la información que tenemos indirectamente sobre el camino. Es claro que si las franjas se produjeran por acción “incontrolada” o de algún “ruido” exterior, sería imposible recuperarlas. Pero vamos a ver que no es así en nuestro caso.

Supongamos que tenemos otro nivel c' más en juego, y que otro rayo láser pasa del nivel c al c' , desde el que decae en cascada al fundamental a emitiendo otro fotón ϕ . De nuevo los dos átomos quedan en el nivel a , y los átomos dejan de ser “etiquetas” del camino. Entonces ¿se recupera la interferencia? No, pues sigue habiendo un chivato, ahora el nuevo fotón ϕ .

¿Podemos borrar esta nueva información que cabalga sobre ϕ ? Sí, como sigue.

Los fotones ϕ inciden sobre un divisor de haz 50/50 (bien DH1, o DH2), donde pueden transmitirse o reflejarse. Los reflejados inciden sobre otro divisor DH. Al final hay cuatro detectores D1, D3, D4 y D2, que registran esos fotones. En promedio, cada uno de ellos recibirá un 25% de los fotones ϕ . La intensidad total registrada por D0 carecerá de estructura de franjas,

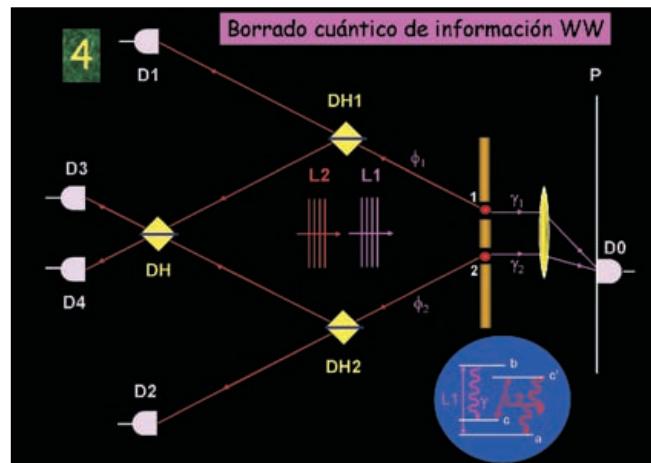


Figura 10. Montaje para borrar información.

pues los fotones ϕ transportan información sobre “por dónde”.

Si se dispara el detector D1 es claro que lo hace porque ha recibido un fotón ϕ_1 , y por tanto que el átomo que ha intervenido es sin duda el 1. Lo mismo el detector D2 nos informa de que es el átomo 2 el causante del fotón registrado en el detector D0 de la pantalla. Así que en estos casos conocemos el camino. Los fotones γ en coincidencia con los ϕ registrados por D1 nos darían una curva de intensidades carente de franjas, y lo mismo aquellos en coincidencia con los ϕ registrados por D2.

5. Resurrección de las interferencias

Si se dispara el detector D3 es claro que puede haber recibido tanto un fotón ϕ_1 , como un fotón ϕ_2 , con igual probabilidad. Por tanto para los γ en coincidencia con ellos es imposible saber el camino, y sus impactos sobre la pantalla dan lugar a una imagen de interferencia. Lo mismo con los coincidentes con el detector D4. Ambas figuras son complementarias, pues provienen de una diferencia en π de las amplitudes: vía D3 se registra la combinación $\gamma_1 + \gamma_2$, y vía D4 la ortogonal $\gamma_1 - \gamma_2$.

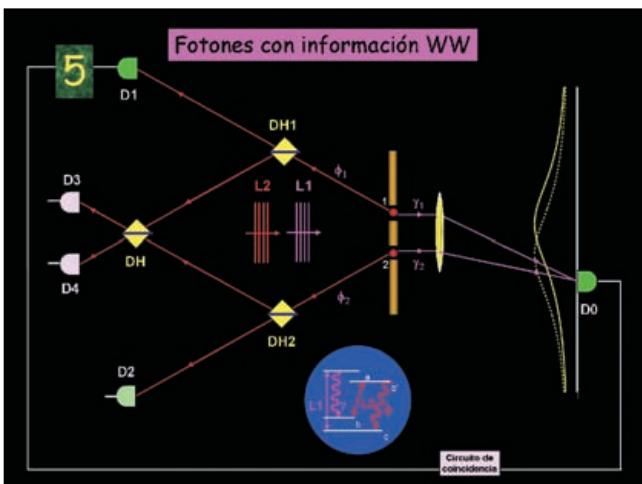


Figura 11. Los fotones ϕ_1 que disparan D1 delatan el camino seguido por sus acompañantes γ_1 .

Esta separación de los impactos de los γ sobre la pantalla en colectivos distintos según el detector disparado por el ϕ asociado a cada γ podría ser hecha mucho tiempo después de que los fotones γ hubieran impactado en la pantalla. No afectarían por tanto al resultado del experimento. Pero sí a su interpretación, a los detalles narrativos que haríamos del mismo, a configurar nuestra historia de lo ocurrido.

En primer lugar, antes de disponer de los resultados sobre los fotones “testigo”, describiríamos la imagen de los γ sobre la pantalla diciendo que como se habían emitido fotones ‘etiqueta’, se trataba de un experimento en que se podía conocer el “por dónde” y en consecuencia no había estructura interferencial. Pero sería

una versión preliminar, precipitada, del pasado. Después de que los ϕ hayan llegado a sus detectores, podríamos fijarnos en aquellos γ asociados a los ϕ que disparan D3, y veríamos que con ellos solamente obteníamos una imagen de interferencia (e igualmente con los asociados a D4). Es decir, para tales γ habíamos borrado la información sobre el “por dónde”, y habían seguido a la vez por los dos caminos. O si un bromista hubiera quitado los divisores DH1 y DH2 antes de que llegaran los ϕ , para todos los γ habría información sobre el camino seguido y no sería posible resucitar ninguna imagen de interferencia.

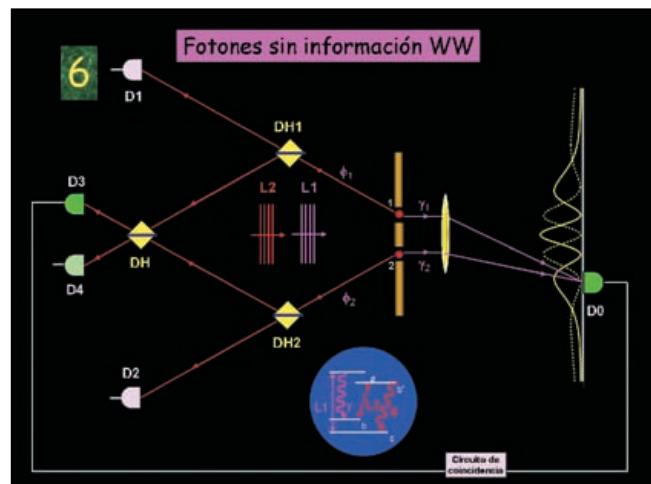


Figura 12. Los fotones ϕ_1, ϕ_2 que disparan D3 no delatan el camino seguido por sus acompañantes γ_1, γ_2 .

Como dice Brian Greene,¹⁴ todo esto es “una afrenta magnífica” a nuestras nociones habituales del espacio y del tiempo. Algo que ocurre muy lejos y mucho tiempo después de algo es sin embargo esencial para nuestra descripción de este algo.

V. ¿JUGAMOS A LAS “20 PREGUNTAS”?

Muchos conocen ya el juego. Una persona A piensa en un objeto X dentro de una cierta categoría \mathcal{C} , y otra B tiene que averiguar este objeto mediante una serie de preguntas a las que A solo ha de responder, sin mentir, “Sí” o “No” (aunque a veces, según el colectivo, sea aceptable “No sé” o “No puedo contestar”). Al cabo de

¹⁴ B. Greene, THE FABRIC OF THE COSMOS: SPACE, TIME, AND THE TEXTURE OF REALITY, Random House (2004).

un máximo de 20 preguntas B debe haber encontrado, a través de sus preguntas y las respuestas de A , qué objeto es X .

La estrategia óptima de B es procurar que la respuesta, sea cual sea, a cada pregunta elimine la mitad aproximadamente de los posibles candidatos en ese momento (método de búsqueda binaria). De ese modo se va restando 1 a la incertidumbre (en el supuesto de que todos los elementos de \mathcal{C} sean equiprobables) hasta llegar a incertidumbre nula. Esto ocurrirá tras $\log_2|\mathcal{C}|$ preguntas, donde $|\mathcal{C}|$ indica el número de elementos del conjunto \mathcal{C} . Luego con 20 preguntas puede hallarse siempre X , provisto que $|\mathcal{C}| \leq 2^{20} \approx 1 \times 10^6$. Si el número de respuestas a cada pregunta fuera 4, el número óptimo de preguntas necesarias pasaría a ser del orden de $\log_4|\mathcal{C}| = \frac{1}{2}\log_2|\mathcal{C}|$.

Una forma de simular esto en un ordenador clásico consiste en codificar las posibilidades como “palabras” o secuencias de n bits de longitud (caso $|\mathcal{C}|=2^n$). El primer jugador A elige una palabra a_0 que debe ser acertada por B . Cada pregunta de B puede consistir en decir a A una palabra b de n bits, a la que B contesta dando la paridad del número de bits 1 que b comparte con a_0 , codificada en binario como 0 si es par, o como 1 si es impar.¹⁵ Nótese que tal paridad coincide con $a_0 \cdot b$, donde el producto escalar de dos palabras binarias $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$ de n bits es $\sum_j x_j y_j \bmod 2$. En el caso de que la propuesta b coincida con a_0 , el ordenador debe contestar algo equivalente al “Sí” y detener el juego.

Veamos un ejemplo. Supongamos $n=4$, y que A piensa la palabra

$$a_0 = 0111.$$

Primera pregunta de B (encaminada a saber la paridad del número de 1s en a_0):

$$b_1 = 1111.$$

Primera respuesta de A :

$$a_1 = 1.$$

Segunda pregunta (pues B ya sabe que a_0 contiene un número impar de 1s):

$$b_2 = 1000.$$

Segunda respuesta:

$$a_2 = 0.$$

Tercera pregunta (B ya sabe que a_0 empieza por 0 y tiene un número impar de 1s):

$$b_3 = 0100.$$

Tercera respuesta:

$$a_3 = 1.$$

Cuarta y última propuesta de B (ya sabe B que a_0 empieza por 01, y como ha de tener un número impar de 1s, y la respuesta anterior no ha sido “Sí”, necesariamente la palabra buscada es 0111):

$$b_4 = 0111.$$

Cuarta respuesta:

“Sí”.

Fin.

A. Nuevo desafío de Q

Imaginemos ahora que disponemos de un ordenador cuántico. El intercambio de preguntas y respuestas anteriores podría hacerse del modo que sigue.

El ordenador consta de dos registros, uno para las preguntas, otro para las respuestas; dichos registros están inicialmente en un estado $|0000\rangle \otimes |0\rangle$. B entra su pregunta primera b_1 ; suponiendo, como antes, que sea 1111, lleva el primer registro a $|1111\rangle$ y le pasa el turno a A . Este ha elegido, recordemos, $a_0 = 0111$, por lo que devuelve su registro en el estado $|1\rangle$, codificando así en este estado el que $a_0 \cdot b_1 = 0 \bmod 2$. A continuación B escribe la siguiente pregunta como $|1000\rangle$; la respuesta de A consiste en poner el segundo registro $|0\rangle$, pues ahora $a_0 \cdot b_1 = 0 \bmod 2$. Y así sucesivamente.

¹⁵ Se llama distancia Hamming entre dos palabras de n bits al número de bits en que esas palabras difieren. La posibilidad de recurrir a la distancia Hamming $d(b, a_0)$ entre b y la palabra a_0 , módulo 2, como indicador dicotómico de su proximidad mutua, no es aconsejable, pues existen pares de palabras indiscernibles con ella, al presentar iguales distancias Hamming, módulo 2, a todas las palabras de igual longitud. Sin embargo, sí podría usarse módulo k , siempre que $k \geq 3$.

De hacer esto, estaríamos infrautilizando el ordenador cuántico, operando con él como si fuera clásico. Esto lo sabía muy bien el personaje Q introducido en una sección anterior, quien, en su segunda visita a la nave, le apuesta a P , el capitán Picard, que es capaz de acertar cualquier entero n que piense en el intervalo $[0, N-1]$. El capitán, que en el ínterin ha estudiado física e información cuánticas, y conoce el algoritmo de Grover, le replica que acepta la apuesta, siempre que Q se comprometa a adivinar el número tras un primer intento. Q accede, bajo la condición de que P le diga cuán cerca al valor correcto queda el valor que Q propone como respuesta. Concedida esta petición, empiezan a jugar. Gana Q una y otra vez, sin perder nunca. ¿Cómo es posible esto?

La respuesta es que hay un protocolo sumamente eficaz, basado en la linealidad de la Mecánica Cuántica. Ilustrémoslo con el ejemplo anterior, antes de dar la generalización a cualquier número de bits.

Primero, se transforma el segundo registro en $2^{-1/2}(|0\rangle - |1\rangle)$, lo que se consigue aplicándole la puerta cuántica $H\sigma_x$, donde H denota la puerta Hadamard

$$H:|0\rangle \mapsto 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |1\rangle \mapsto 2^{-1/2}(|0\rangle - |1\rangle),$$

y la matrix de Pauli σ_x intercambia, como es bien sabido, los kets 0 y 1.

Q entra en el ordenador con una pregunta única, suma de todas las posibles, a saber, $\sum_{i,j,k,l=0,1}|ijkl\rangle$, que se obtiene aplicando al registro inicial $|0000\rangle$ la puerta $H^{\otimes 4}$.

Tras la respuesta de P el estado de los registros es

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(|0000\rangle + |0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + \\ &|1000\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle) \otimes 2^{-1/2}(|0\rangle - |1\rangle) + \\ &\frac{1}{4}(|0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + |0111\rangle + \\ &|1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle) \otimes 2^{-1/2}(|1\rangle - |0\rangle), \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(|0000\rangle + |0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + \\ &+ |1000\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-|0001\rangle - |0100\rangle - |0111\rangle - \\ &-|1001\rangle - |1010\rangle - |1100\rangle - |1111\rangle) \otimes 2^{-1/2}(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned}$$

Sin más, Q aplica a estos registros la puerta $(H^{\otimes 4} \otimes H\sigma_x)^{-1}$, obteniendo

$$|0111\rangle \otimes |0\rangle,$$

donde Q puede ver la palabra elegida por P , y así ganar el juego.

De nuevo la magia de los quanta. Veamos la generalización a cualquier número de bits. Sea $N = 2^L$. Se dispone de un ordenador cuántico, con un doble registro de $L+1$ qubits, inicialmente en $|00\dots 0\rangle \otimes |0\rangle$. A cada propuesta $|x\rangle$, $x \in [0, N-1]$, hecha por Q , un oráculo (P) debe informar del valor $f_{a_0}(x) := a_0 \cdot x \bmod 2$, que es un índice de la proximidad de x al valor a_0 pensado por P . Es decir, hay una puerta lógica $U_{f_{a_0}}$ que mediante

$$|x\rangle \otimes |b\rangle \mapsto |x\rangle \otimes |b \oplus f_{a_0}(x)\rangle$$

calcula la función $f_{a_0}(x): x \in \mathbb{Z}_2^L \rightarrow a_0 \cdot x \in \mathbb{Z}_2$. Es fácil ver que esto implica que preguntándole al oráculo con

$$\begin{aligned} &(H^{\otimes L} \otimes H\sigma_x)|00\dots 0\rangle \otimes |0\rangle = \\ &\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x |x\rangle \otimes \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle), \end{aligned}$$

la respuesta recibida es

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x (-1)^{a_0 \cdot x} |x\rangle \otimes \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle),$$

que, tratada por Q mediante aplicación de $(H^{-1})^{\otimes L} \otimes \sigma_x H^{-1}$ produce finalmente

$$|a_0\rangle \otimes |0\rangle.$$

Le basta a Q con medir el primer registro en la base computacional para obtener a_0 y con ello dar a P la solución correcta.

VI. JUEGOS CLÁSICOS

La teoría clásica de juegos fue inventada por John von Neumann y Oskar Morgenstern en 1944.¹⁶ Hoy es

¹⁶ J. von Neumann y O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behaviour* (Princeton University Press, Princeton, 1947).

una rama de las matemáticas aplicadas, de gran interés en economía, en biología, en sociología, en ecología, en psicología, en política internacional, en estrategia militar, en ciencias de la computación, en inteligencia artificial, en subastas, e incluso en filosofía. Esencialmente un juego de estrategia es una terna (J, E, R) formada por un conjunto (finito) $J = \{J_1, \dots, J_n\}$ de jugadores o agentes, una colección $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ de conjuntos E_k de estrategias posibles de acción para cada jugador J_k , y un conjunto $R = \{R_1, \dots, R_n\}$ de recompensas $R_k(e_1, \dots, e_n)$ para cada jugador J_k según las estrategias individuales $e_j \in E_j$ adoptadas por cada uno. Se supone que las recompensas están ordenadas (pensemos por sencillez que son números reales), que cada jugador, al elegir su estrategia, ignora las adoptadas por los demás, y que todos los jugadores son *racionales*, es decir, intentan maximizar su recompensa (o minimizar su castigo).

A. Ejemplo de juego clásico de estrategia

Uno de los más famosos juegos de estrategia es el *juego del prisionero*. Dos vulgares delincuentes, Fil (personaje A) y Col (personaje B), han asaltado una joyería a mano armada y luego han robado un coche para escapar. Son apresados y llevados a comisaría, donde los mantienen incomunicados, y les interrogan por separado. A cada uno un policía le hace esta oferta, sobre la que deben elegir sin saber qué opción ha escogido su compañero: 1/ Si ambos se delatan uno al otro, les caerán solo 3 años de cárcel. 2/ Si uno delata al otro y este calla, quedará aquél en libertad mientras que el que ha estado callado se llevará una pena de 7 años. 3/ Si ambos permanecen mudos, solo les podrán acusar de apropiación indebida del coche y les caerá 1 año a cada uno.

Malévola oferta, pues les lleva a ambos ineludiblemente (son jugadores racionales) a no elegir la mejor opción colectiva. Veamos cómo razona Fil (e igual lo hará Col): 1/ Si mi colega me culpa, y yo callo, me caen 7 años, pero si le culpo a él, sólo serán 3. 2/ Si mi colega calla, y yo le culpo, me dejan libre, mientras que si yo también callo, me cae 1 año. En cualquiera

de las alternativas, a cada delincuente le trae más cuenta culpar al otro, lo que les aboca a ambos a la pena de 3 años, peor que el año que obtendrían si ambos callaran. Esta es la tabla de condenas en años (recompensas “negativas”), donde se indica por C y D las

	Col: C	Col: D
Fil: C	(1, 1)	(7, 0)
Fil: D	(0, 7)	(3, 3)

Cuadro I. Condenas en el juego clásico del prisionero.

opciones de callar o “delatar”, respectivamente.

Recordemos, antes de proseguir, algunos conceptos importantes en la teoría de juegos. Una estrategia e_A del jugador A se dice *dominante* si

$$R_A(e_A, e_B') \geq R_A(e_A', e_B'), \quad \forall (e_A', e_B') \in E_A \times E_B.$$

Idem para una estrategia e_B del jugador B. Un par de estrategias (e_A', e_B') de los jugadores A,B llámanse un *equilibrio Nash*¹⁷ si

$$R_A(e_A, e_B') \geq R_A(e_A', e_B'), \quad R_B(e_A, e_B') \geq R_B(e_A', e_B'),$$

para cualesquiera $(e_A', e_B') \in E_A \times E_B$. Y se dicen ser *óptimas Pareto*¹⁸ si no es posible aumentar una de las recompensas sin rebajar la otra.

Volvamos al juego del prisionero. La solución *DD* adoptada (ambos culpan al otro) es una solución de equilibrio Nash: el cambio de estrategia de uno cualquiera de los jugadores, manteniéndose el otro firme, empeora la recompensa (aumenta el castigo) de quien cambia.

Pero esa solución *DD* no es óptima Pareto: ambos pueden mejorar a la vez, si, violando la racionalidad, optan por el silencio.

La estrategia *CC* sí es óptima Pareto, pero no es un equilibrio.

¹⁷ John Nash, famoso matemático estadounidense y premio Nóbel de Economía.

¹⁸ Vilfredo Pareto, economista italiano.

B. Estrategias cuánticas

Es posible formular el juego clásico del prisionero de modo que sea generalizable al marco cuántico. Una tercera persona (la llamaremos árbitro) entrega a los jugadores A, B , incomunicados entre sí, sendos bits clásicos (C bits) en estado 0, por ejemplo. Los jugadores devuelven al árbitro esos bits, dejándolos como están si deciden “cooperar” (esto es, permanecer callados), o cambiándolos al Cbit 1 si optan por “desertar” (es decir, por culpar al otro). Tras recibir los Cbits de los jugadores, el árbitro calcula la recompensa (el castigo) de cada uno aplicando lo estipulado en la tabla.

Cambiemos ahora el par inicial de Cbits por un sistema bipartito de dos Qbits en un estado conjunto inicial ρ_{in} ; cada jugador J (A o B) recibe uno de esos Qbits, sobre el que puede actuar localmente mediante una operación o canal cuántico $e_J \in E_J$, de modo que el árbitro obtiene al final el estado

$$\rho_{\text{out}} := (e_A \otimes e_B)(\rho_{\text{in}}).$$

Una vez en posesión del estado respuesta ρ_{out} , el árbitro realiza sobre este estado una medición con cuatro resultados XY posibles, coordinables con CC, CD, DC, DD , y con efectos asociados $F_{X,Y}$, y determina la recompensa (en el problema del prisionero, el castigo) de cada jugador mediante

$$\begin{aligned} R_A &= \sum_{X,Y} R_A(X,Y) \text{tr}(F_{X,Y} \rho_{\text{out}}), \\ R_B &= \sum_{X,Y} R_B(X,Y) \text{tr}(F_{X,Y} \rho_{\text{out}}). \end{aligned}$$

Por ejemplo, el caso expuesto del dilema del prisionero es un caso particular de este esquema. Basta tomar

$$\rho_{\text{in}} := |0\rangle\langle 0|, \quad E_A = E_B := \{C := \mathbf{1}, D := i\sigma_y\},$$

y como medida realizada por el árbitro la de base $\{|CC\rangle := |00\rangle, |CD\rangle := |01\rangle, |DC\rangle := |10\rangle, |DD\rangle := |11\rangle\}$, con recompensas

$$\begin{aligned} R_A(CC) &= R_B(CC) = 1, R_A(CD) = R_B(DC) = 7, \\ R_A(DC) &= R_B(CD) = 0, R_A(DD) = R_B(DD) = 3. \end{aligned}$$

Nos referiremos a estas recompensas como “típicas” a la hora de las ilustraciones numéricas. Nótese que las

operaciones de A y B sobre su Qbit consisten en dejarlo igual ($\mathbf{1}$), o en invertirlo ($i\sigma_y$).

Supongamos ahora que ampliamos el escenario. Primero, permitiendo que los Qbits que el árbitro presenta a los jugadores formen parte de un estado entrelazado $T_\gamma|00\rangle$, con

$$T_\gamma := \exp\left(-i\frac{1}{2}\gamma D \otimes D\right).$$

Segundo, permitiendo que los jugadores puedan con independencia aplicar a su Qbit un operador unitario de la forma

$$U(\theta, \phi) := \begin{pmatrix} e^{i\frac{1}{2}\phi} \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) & \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) & e^{-i\frac{1}{2}\phi} \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \end{pmatrix}$$

con $\theta, \phi \in [0, \pi]$. Tercero, tomando como medición para calcular la recompensa una de base

$$\begin{aligned} |CC\rangle &:= T_\gamma|00\rangle, |CD\rangle := T_\gamma|01\rangle, \\ |DC\rangle &:= T_\gamma|10\rangle, |DD\rangle := T_\gamma|11\rangle. \end{aligned}$$

Explícitamente:

$$\begin{aligned} R_A(U_A(\theta_1, \phi_1), U_B(\theta_2, \phi_2)) &:= \\ \sum_{X,Y} R_A(X,Y) |\langle XY | U_A(\theta_1, \phi_1) \otimes U_B(\theta_2, \phi_2) | CC \rangle|^2, \\ R_B(U_A(\theta_1, \phi_1), U_B(\theta_2, \phi_2)) &:= \\ \sum_{X,Y} R_B(X,Y) |\langle XY | U_A(\theta_1, \phi_1) \otimes U_B(\theta_2, \phi_2) | CC \rangle|^2. \end{aligned}$$

1. Caso separable

Cuando $\gamma = 0$, el estado inicial $|CC\rangle$ es factorizable. Con estrategias del tipo $U_A(\theta_1, 0) \otimes U_B(\theta_2, 0)$, esto es, cuando los jugadores solo pueden aplicar a sus Qbits rotaciones arbitrarias alrededor del eje Oy , las recompensas son las clásicas correspondientes a las estrategias simples C, D con probabilidades $\cos^2 \frac{1}{2}\theta_1$, $\sin^2 \frac{1}{2}\theta_2$:

$$\begin{aligned} R_A(U_A(\theta_1, 0), U_B(\theta_2, 0)) &:= \\ R_A(C, C) \left| \cos \frac{1}{2}\theta_1 \cos \frac{1}{2}\theta_2 \right|^2 + \end{aligned}$$

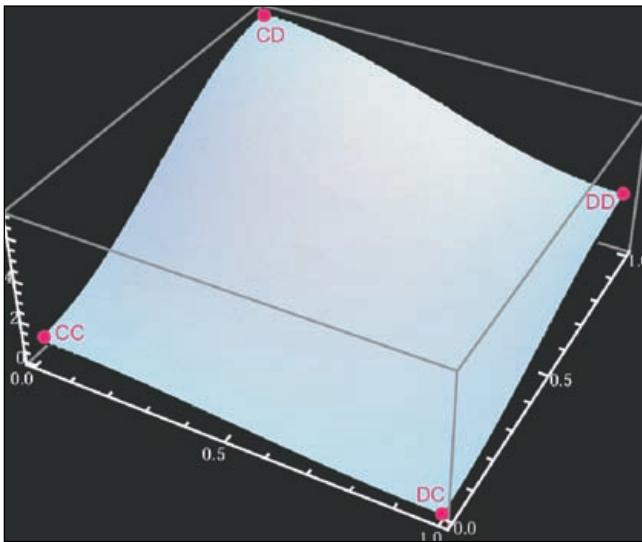


Figura 13. Condena de A en el caso separable.

$$R_A(C,D) \left| \cos \frac{1}{2}\theta_1 \sin \frac{1}{2}\theta_2 \right|^2 + \\ R_A(D,C) \left| \sin \frac{1}{2}\theta_1 \cos \frac{1}{2}\theta_2 \right|^2 + \\ R_A(D,D) \left| \sin \frac{1}{2}\theta_1 \sin \frac{1}{2}\theta_2 \right|^2,$$

y análogamente para $R_B(U_A(\theta_1, 0), U_B(\theta_2, 0))$, intercambiando los índices 1,2.

La Fig. 13 muestra los valores de R_A , con los ángulos θ en unidades de π , para los valores 0, 1, 3, 7 que elegimos como típicos. (Similar gráfico para R_B , intercambiando los ejes.) Vemos que la estrategia DD , con castigos (3, 3), es el único equilibrio Nash: la mejor opción estratégica de A es siempre $D := U_A(\pi, 0)$, cualquiera que sea la estrategia $U_B(\theta_2, 0)$ adoptada por B ; y viceversa. En resumen, la versión cuántica del juego del prisionero no aporta nada nuevo en el caso de separabilidad.

2. Caso entrelazado

Otro es el cantar si el estado presentado por el árbitro a los jugadores está completamente enredado, es decir, $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ y además los jugadores pueden usar acciones más generales que las meras rotaciones,

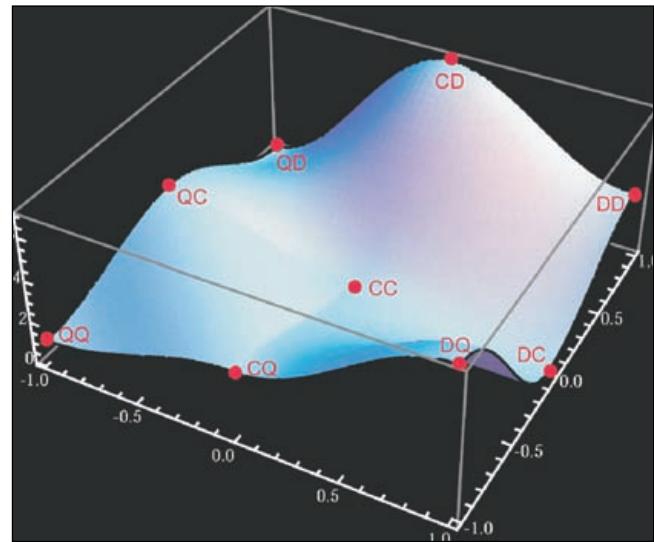


Figura 14. Condena de A en el caso entrelazado.

como por ejemplo las $U(\theta, \phi)$. Consideremos el siguiente ejemplo:¹⁹ los jugadores pueden aplicar como estrategias operadores unitarios de la forma

$$U_A(t) := \begin{cases} U_A(t\pi, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ U_A(0, t\pi) & \text{si } -1 \leq t \leq 0, \end{cases}$$

y análogamente para U_B . En este caso, un cálculo directo lleva a las condensas mostradas en la Fig. 14.

Ahora ha dejado de ser DD un equilibrio Nash, y aparece como equilibrio Nash un nuevo par de estrategias, denotadas por QQ , correspondientes a los valores $(-1, -1)$ para los parámetros (t_1, t_2) , esto es, a las acciones $U_A(0, \pi), U_B(0, \pi)$. Las condensas asociadas a este equilibrio son $(1, 1)$, y en esta ocasión QQ es también un par óptimo Pareto. Luego podemos afirmar que la introducción del entrelazamiento ha hecho posible evitar el dilema del prisionero.

	Benito: Q	Benito: C	Benito: D
Alicia: Q	(1,1)	(3,3)	(0,7)
Alicia: C	(3,3)	(1,1)	(7,0)
Alicia: D	(7,0)	(0,7)	(3,3)

Cuadro II. Condenas en el juego del prisionero con tres estrategias Q, C, D para cada jugador.

¹⁹ J. Eisert, M. Wilkens, M. Lewenstein, *Quantum Games and Quantum Strategies*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3077-3080 (1999).

La estrategia *CC* también conduce a las condenas (1, 1), pero no sería una elección forzada por la racionalidad, pues si *B* decidiera estar callado (estrategia *C*), la mejor opción de *A* sería *D*, y si *B* optara por acusarle, o por jugar *Q*, la mejor opción de *A* sería *Q*; nunca la *C*.

Fijándonos solo en las tres estrategias distinguidas *Q,C,D*, tenemos la tabla II.

VII. ESTADÍSTICAS EXTRAÑAS

Hay que andarse con cuidado al enfrentarse con las estadísticas. Para ilustrar esta advertencia, diré que cierta empresa C dedicada a hacer encuestas fue contratada por una multinacional M para hacer un estudio estadístico de parejas de gemelos, atendiendo al sexo (*M, F*, por masculino, femenino), edad (*J, V*, por joven, viejo) y color de piel (*B, N*, por blanco, negro). Terminado el trabajo, C entregó a M sus resultados expresados en porcentajes de parejas femenino-blanco, femenino-joven, y joven (de cualquier sexo)-blanco, extraídos, según dice su informe adjunto, de una muestra real de $N \gg 1$ pares de gemelos:

$$\%(FB) = \frac{1}{4}, \%(FJ) = \frac{3}{4}, \%(JN) = \frac{1}{4}.$$

Cuando el gabinete técnico de M recibió estos datos, sus expertos se percataron inmediatamente que eran del todo imposibles, por lo que no solo no pagaron a la empresa C, sino que además la denunciaron por intento de engaño.

¿En qué razones se apoyó la multinacional para fundamentar su acción? En algo tan simple como que siempre debe satisfacerse la desigualdad $\%(FJ) \leq \%(FB) + \%(JN)$. En efecto, cada par de gemelos del tipo *FJ* o bien es blanco, en cuyo caso cae en el colectivo *FB*, o bien es negro, integrando *JN*. Si se prefiere un argumento más formal,

$$\begin{aligned} F \cap J &= ((F \cap B) \cup (F \cap N)) \cap J = \\ &= (F \cap B \cap J) \cup (F \cap N \cap J), \end{aligned}$$

por lo que, siendo disjuntos $F \cap B \cap J$ y $F \cap N \cap J$, tenemos

$$|F \cap J| = |F \cap B \cap J| + |F \cap N \cap J|,$$

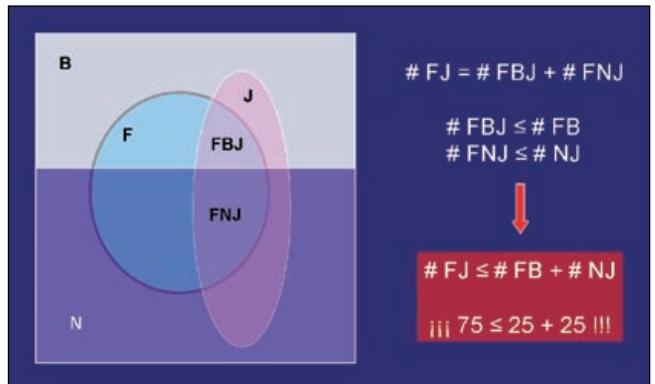


Figura 15. Visualización gráfica de la desigualdad $|F \cap J| \leq |F \cap B| + |N \cap J|$.

indicando por $|X|$ el número de elementos del conjunto X . Pero $|F \cap B \cap J| \leq |F \cap B|$, $|F \cap N \cap J| \leq |N \cap J|$; en consecuencia, $|F \cap J| \leq |F \cap B| + |N \cap J|$, como pretendíamos probar.

La firma C quedó desolada. ¿Cómo había podido pasarle eso? Y en lugar de aceptar el escarmiento por el fallo evidente de profesionalidad que había mostrado, optó por mantenerse en sus trece, siempre que su equipo científico fuera capaz de rebatir el argumento de M. Y he aquí que uno de sus empleados más jóvenes, licenciado en físicas, y experto en fundamentos cuánticos, le brindó la solución.

Es la siguiente. Se trata de probar que en la naturaleza es posible la existencia de conjuntos de pares gemelos con tres posibles atributos, $A = S, C, E$ (por “sexo, color, edad”), cada uno de ellos dicotómico (es decir, con dos valores posibles) $a_{\pm} = s_{\pm}, c_{\pm}, e_{\pm}$, que asociaremos, respectivamente, a los términos (femenino, masculino), (blanco, negro), (joven, viejo), de modo que con ellos se cumplan los porcentajes presentados por C a M, y en consecuencia la argumentación de M resulte insostenible. Así es, en efecto. Supongamos una fuente que emite pares de fotones en direcciones opuestas (digamos, hacia la izquierda o eje $-Ox$, y hacia la derecha o eje $+Ox$) y polarizaciones entrelazadas, de modo que el estado de polarización de cada par de fotones sea de la forma

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle|V\rangle + |H\rangle|H\rangle),$$

es decir, superposición lineal, con igual peso, de dos estados, en los que ambos fotones o están polarizados

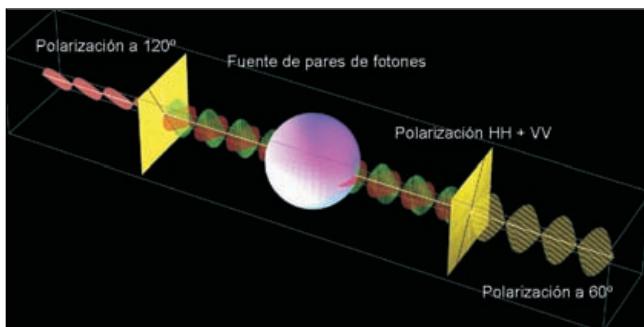


Figura 16. Fuente de fotones.

en dirección vertical o en dirección horizontal. Coloquemos sendos polarizadores para cada fotón, con eje de polarización según alguno de los versores $\mathbf{n}_{a\pm}$, perpendiculares al eje horizontal Ox . El versor $\mathbf{n}_{a\epsilon}$ se caracteriza por denotar una dirección tal que los fotones que atraviesen el polarizador con eje según esa dirección tienen el atributo A con valor a_ϵ . Como los valores a_+ y a_- se excluyen mutuamente, los versores \mathbf{n}_{a+} y \mathbf{n}_{a-} deben ser ortogonales entre sí. Cada fotón que atraviesa el polarizador correspondiente es registrado en un detector, situado tras dicho polarizador.

Coloquemos, en el camino del fotón izquierdo, el polarizador según \mathbf{n}_{s+} , y a la derecha, según \mathbf{n}_{c+} . Cuando los dos detectores se disparen, definiremos a este par como un caso femenino-blanco. Su probabilidad es $\frac{1}{2}\cos^2\theta_{fb}$, donde θ_{fb} es el ángulo entre los versores \mathbf{n}_{s+} , \mathbf{n}_{c+} . Cambiemos ahora el segundo versor por \mathbf{n}_{e+} . La probabilidad de coincidencia en el disparo será en este caso $\frac{1}{2}\cos^2\theta_{fj}$, y señalará una instancia de femenino-joven. Y si ahora cambiamos el de la izquierda por \mathbf{n}_{c-} , manteniendo el de la derecha como \mathbf{n}_{e+} , el disparo conjunto de los dos detectores tendrá probabilidad $\frac{1}{2}\cos^2\theta_{nj}$ e indicará un caso de negro-joven. En resumen, si el total de coincidencias obtenidas representa nuestro conjunto muestral Ω , los subconjuntos Ω_{fb} , Ω_{fj} y Ω_{nj} representan los porcentajes relativos $\cos^2\theta_{fb}$, $\cos^2\theta_{fj}$ y $\cos^2\theta_{nj}$.

Tomando $\theta_{fb} = \pi/3$, $\theta_{fj} = \pi/6$, y $\theta_{nj} = \pi/3$, resultan los porcentajes absolutos $1/4$, $3/4$, $1/4$ de nuestro problema original.

Ante esta espectacular y sorprendente defensa, la denuncia fue retirada.

Caveat El lector curioso se preguntará dónde estaba el fallo del argumento de la acusación. ¡Era algo tan evidente (para la mayoría) el admitir que cualquier par de gemelos del tipo *FJ* o bien es blanco, o bien es negro! En el proceso paralelo expuesto por el físico cuántico de C, es claro que no podemos mantener esa afirmación, por cuanto que en el colectivo solo se ha preparado cada par de fotones con dos de los tres atributos. Nótese, además, que uno de los fotones del par tiene uno de esos atributos, y el otro fotón el atributo restante, cuando, en nuestro mundo ordinario, son ambos gemelos quienes presentan a la vez los dos atributos. En el experimento cuántico esto es imposible, por ser los atributos considerados, las polarizaciones, físicamente incompatibles sobre un mismo fotón. Por tanto, los pares de fotones preparados solo son gemelos en el origen.

VIII. TELEPORTACIÓN CUÁNTICA

La serie televisiva *Star Trek* (1966) popularizó el teletransporte material:²⁰ se *deconstruye* o “desmaterializa” un individuo aquí, y en otro lugar se *reconstruye*. Todo esto en un lapso de tiempo despreciable. Evidentemente, tal proceso sigue perteneciendo al dominio de la ciencia ficción.

En 1993 se propuso un método para teleportar estados cuánticos.²¹ En un laboratorio *A* se halla un cierto sistema físico en un estado cuántico ρ desconocido. Necesitamos construir una réplica exacta de ese estado sobre un sistema físico análogo al anterior, pero ubicado en otro laboratorio alejado *B*. Sabemos que es imposible clonar estados cuánticos desconocidos; no hay fotocopiadoras cuánticas de uso general que permitan sacar copias exactas de estados cuánticos arbitrarios. Si esto no fuera cierto, obteniendo suficientes copias de un estado podríamos usarlas para determinar este con precisión arbitraria, y bastaría pasar esta información al laboratorio *B* para

²⁰ Con mucha anterioridad se había fantaseado ya en la literatura de ciencia ficción sobre este asunto. Recuérdese, por ejemplo, la película “La Mosca”.

²¹ C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, *Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895-1899 (1993).

preparar allí un sistema en dicho estado. Entonces, cómo podemos teleportar estados cuánticos? Hay un procedimiento para ello, que se ha llevado a la práctica en numerosas ocasiones. Veamos en qué consiste.

En A tenemos un sistema físico S_1 en el estado ρ_1 a teletransportar. Supongamos que se dispone de un sistema compuesto $S_{23} = S_2 + S_3$ de dos partes S_2 y S_3 , una de las cuales, S_2 , se halla en A , y la otra, S_3 , en B . Sea ω_{23} el estado del sistema S_{23} . Se trata de idear un proceso Φ sobre $S_1 + S_{23}$ tal que la restricción a S_3 del estado evolución bajo Φ del estado conjunto $\rho_1 \otimes \omega_{23}$ de $S_1 + S_{23}$ sea ρ_1 :

$$\text{tr}_{12}(\Phi(\rho_1 \otimes \omega_{23})) = \rho_1.$$

Ese proceso Φ debe ser LOCC (*Local Operations and Classical Communications*), esto es, debe consistir en procesos cuánticos locales (es decir, que afecten solo a los sistemas localizados en A o en B), y en intercambio clásico de información entre los dos laboratorios.

Ilustrémoslo con el caso elemental de un qubit como sistema S_1 y de dos qubits como sistema auxiliar $S_{23} = S_2 + S_3$. Supongamos que S_1 se halla en un estado puro $|\psi\rangle$, y que A y B comparten un estado entrelazado $(|00\rangle + |11\rangle)/2^{-1/2}$ del sistema S_{23} de dos qubits. Nótese la siguiente identidad (Fig. 17):

$$|\psi\rangle(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{2}[(|00\rangle + |11\rangle)|\psi\rangle + (|01\rangle + |10\rangle)(\sigma_x|\psi\rangle) + (|01\rangle - |10\rangle)(-i\sigma_y|\psi\rangle) + (|00\rangle - |11\rangle)(\sigma_z|\psi\rangle)].$$

Por su linealidad, basta con comprobarla para $|\psi\rangle = |0\rangle$: $|\psi\rangle = |0\rangle$.

Supongamos que sobre los dos qubits $S_1 + S_2$ medimos cualquier observable X que distinga entre los cuatro vectores ortonormales $2^{-1/2}(|00\rangle + |11\rangle)$, $2^{-1/2}(|01\rangle + |10\rangle)$, $2^{-1/2}(|01\rangle - |10\rangle)$, $2^{-1/2}(|00\rangle - |11\rangle)$ (base de Bell), que aparecen con igual probabilidad en la expresión anterior, asignándoles resultados x_1, x_2, x_3, x_4 diferentes. Si la medición de X arroja el valor x_1 , sabremos que tras esta medida el tercer qubit S_3 estará en el estado ψ ; si $X = x_2$, S_3 estará en el estado $\sigma_x|\psi\rangle$, y bastará aplicarle la puerta lógica σ_x para llevarlo al estado ψ ; y análogamente con las otras dos posibilidades restantes.

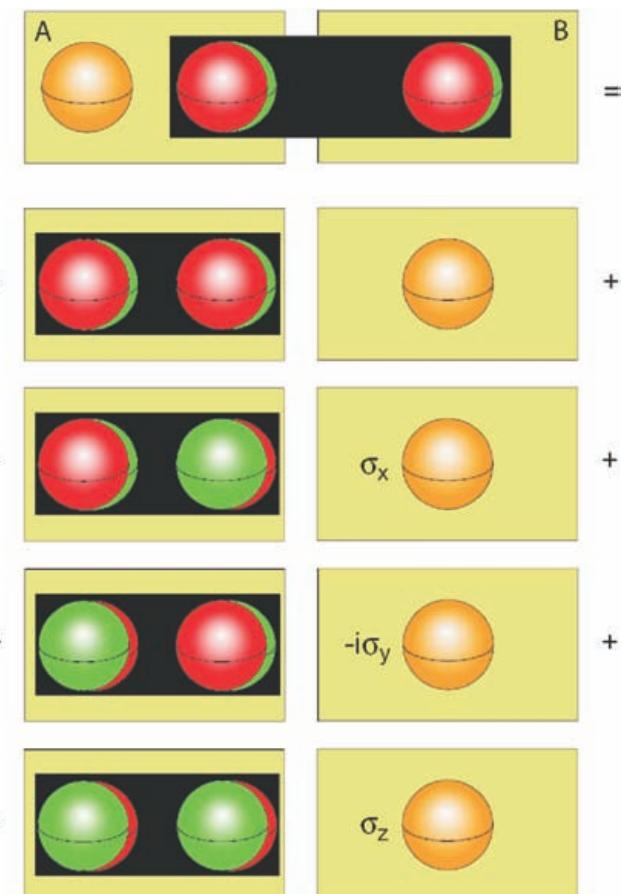


Figura 17. Ilustración de la identidad para la teleportación de un qubit.

Tras este proceso, el primer qubit S_1 , inicialmente en el estado ψ , quedará entrelazado con el segundo qubit S_2 en uno de los estados de Bell. Su estado particular ha pasado de ser $|\psi\rangle$ a estar caotizado $(\frac{1}{2}\mathbf{1}_2)$. La imposibilidad de clonación cuántica no podía permitir copiar su estado sobre el sistema S_3 permaneciendo el original.

Nótese que no se teletransporta ni materia, ni energía. Se ha teleportado información para llevar el tercer qubit, el que está en B , al estado ψ , pero no a velocidad superlumínica, como estaría uno tentado de pensar por el uso del entrelazamiento. No, no se ha violado ninguna ley física, pues ha sido preciso que del laboratorio A se comunique clásicamente al B (por teléfono, a voces, con mensajero, etc.) el resultado de la medición de X , para que los físicos de B apliquen a su qubit la transformación que proceda ($\text{id}, \sigma_x, \dots$), con el fin de terminar la reconstrucción del estado $|\psi\rangle$ sobre el soporte S_3 .

A. Experimentos de teleportación cuántica

Se han realizado experimentos de teleportación de fotones a fotones, de átomos a otros átomos idénticos, y experimentos híbridos de materia a luz.

Entre fotones se consiguió por vez primera en 1997.²²

Unos años después, se realizó entre átomos.²³ De materia a luz se logró también en 2004.²⁴

En un principio, la teleportación solo cubría distancias muy pequeñas, dentro de un mismo laboratorio. Estas limitaciones se han superado. Por ejemplo, la teleportación entre fotones alcanzó los 600 m, a lo largo de una fibra óptica de vidrio bajo el Danubio, en Viena.²⁵ Finalmente, en 2007 se consiguió hacer la transferencia de estados cuánticos entre materia y luz de forma reversible: materia a luz, y luego de esta luz a materia.²⁶

Esta teleportación reversible entre materia y luz puede ser sumamente importante en el futuro para transmitir a largas distancias mediante fotones (qubits de luz) información cuántica almacenada en una memoria (qubits de materia). Se trata de un paso muy importante para implementar una original propuesta de Cirac *et al.* como base de los repetidores cuánticos.²⁷ La propuesta de estos autores puede esquematizarse así: sea un átomo en una cavidad electromagnética, con tres estados distinguibles $|a\rangle$, $|b\rangle$; $|e\rangle$ (ver Fig. 18), tales que la frecuencia $(E_e - E_b)/\hbar$ es prácticamente resonante con el campo de la cavidad. Un pulso exterior de luz cuya frecuencia $\Omega(t)$ crece adiabáticamente hasta $(E_e - E_a)/\hbar$, excita el nivel fundamental a al ni-

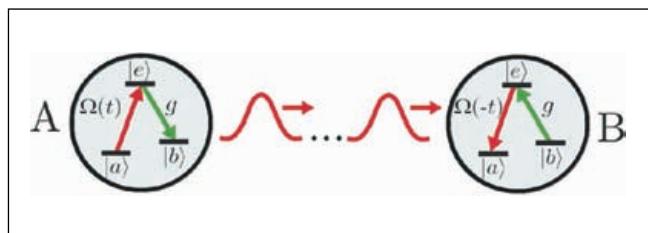


Figura 18. Transferencia de estados entre materia y luz (Boozer *et al.*).

vel e (zona A del dibujo) del que decae espontáneamente al nivel b , emitiendo un fotón de la cavidad. Si esta está inicialmente en su estado fundamental de vacío $|0\rangle$, pasa tras esa emisión a un estado monofotónico $|1\rangle$. Por otro lado, si el átomo estuviera en el estado b , la influencia del pulso exterior, fuera de resonancia, es despreciable, y el átomo no se vería afectado. El fotón emitido puede ser luego utilizado en otro laboratorio similar (zona B) para excitar de b a e , y luego pasar de e a a “arrastrando” el sistema con un pulso exterior $\Omega(t_0 - t)$ inverso en el tiempo del primero.

Primer paso, de materia a luz:

$$|a\rangle|0\rangle \mapsto |b\rangle|1\rangle, \quad |b\rangle|0\rangle \mapsto |b\rangle|0\rangle,$$

y por linealidad

$$(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle)|0\rangle \mapsto |b\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle).$$

Esto es, el estado $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ del átomo ha sido traspasado al campo de la cavidad como $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$.

Supongamos ahora que el fotón $|1\rangle$ de la cavidad primera escapa y llega a la segunda cavidad, donde podrá producir la transición $b \rightarrow e$, y luego un pulso

²² D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Experimental Quantum Teleportation*, Nature **390**, 575-579 (1997).

²³ M. Riebe, H. Häffner, C. F. Roos, W. Hänsel, M. Ruth, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D. F. V. James, R. Blatt, *Deterministic Quantum Teleportation with Atoms*, Nature **429**, 734-737 (2004). M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, D. J. Wineland, *Deterministic Quantum Teleportation of Atomic Qubits*, Nature **429**, 737 (2004).

²⁴ D. N. Matsukevich, A. Kuzmich, *Quantum State Transfer Between Matter and Light*, Science **306**, 663-666 (2004).

²⁵ R. Ursin, T. Jennewein, M. Aspelmeyer, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, A. Zeilinger, *Quantum teleportation link across the Danube*, Nature **430**, 849 (2004).

²⁶ A. D. Boozer, A. Boca, R. Miller, T. E. Northup, H. J. Kimble, *Reversible state transfer between light and a single trapped atom*, Phys. Rev. Lett. **98**, 193601 (2007); arXiv:quant-ph/0702248v1.

²⁷ J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, H. Mabuchi, *Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Modes in a Quantum Network*, Phys. Rev. Lett. **78**, 3221-3224 (1997).

inverso en tiempo al inicial podrá provocar la desexcitación $e \rightarrow a$.

Segundo paso, de luz a materia:

$$|b\rangle|1\rangle \mapsto |a\rangle|0\rangle, \quad |b\rangle|0\rangle \mapsto |b\rangle|0\rangle,$$

es decir,

$$|b\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \mapsto (\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle)|0\rangle,$$

traspasándose así el estado fotónico al átomo de la segunda cavidad.

Las zonas A y B podrían ser estaciones nodales de una red de repetidores cuánticos para recibir, guardar y reenviar información cuántica.