Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 103, Nº. 2, pp 279-295, 2009
X Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

MATEMÁTICAS Y CIENCIA

FERNANDO BOMBAL GORDÓN *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid.

INTRODUCCIÓN

Los matemáticos han ganado la guerra. Así comienza la película *Una Mente Maravillosa*, inspirada en la vida del matemático y Premio Nobel de Economía de 1994 **John Nash**. Y continúa el personaje: *Han descifrado los códigos nazis y japoneses, han desarrollado la Bomba atómica...* (y se podría añadir: han creado la investigación operativa para *"proporcionar a los departamentos ejecutivos las bases cuantitativas para su decisión, en relación con las operaciones bajo su mando"*[1] , lo que incluye métodos para la detección de submarinos, estrategias para mejorar los combates aéreos y navales, etc.; han desarrollado el método del simplex para resolver los problemas de logística de los ejércitos aliados, etc.). La afirmación del personaje de la película parece ciertamente exagerada. Pero hace referencia a un hecho fundamental: Es evidente que las teorías científicas, por muy incomprensibles que resulten, repercuten de manera decisiva en los avances tecnológicos que condicionan nuestro quehacer cotidiano. Vivimos en un mundo pseudo-mágico, rodeado de mecanismos maravillosos, cuyo fundamento no conocemos ni comprendemos, pero los utilizamos. Como dice el científico y escritor de Ciencia-Ficción recientemente fallecido Arthur C. Clarke, *Toda tecnología suficientemente avanzada es indistinguible de la magia*[2]. Y detrás de gran parte de esas Teorías científicas, están las matemáticas presentes de una u otra manera.

A lo largo de esta Conferencia trataré de mostrar, a muy grandes rasgos, algunos ejemplos de esta relación de las matemáticas con el desarrollo de la Ciencia.

MATEMÁTICAS Y CONOCIMIENTO CIENTÍFICO

Parece claro que, cualquiera que sea la definición que adoptemos, el objetivo básico de la Ciencia es la *modelización* de los distintos aspectos de la realidad en términos comprensibles, de modo que puedan uti-

[1] Comentario al artículo *Las Matemáticas y el arte de la guerra,* (F. W. Lanchester), incluido en el Vol. 6 de "Sigma, el Mundo de las Matemáticas" ([19]).

[2] Cita incluida en su libro *Perfiles del Futuro. Investigación sobre los límites de lo posible.* Biblioteca Universal Caralt, 1977.

lizarse estos modelos para *predecir* hechos aún desconocidos y, eventualmente, *descubrir* mecanismos que permitan modificar el entorno. Parafraseando a **L. E. Aute**, *La ciencia es una estrategia para tratar de encontrar la verdad.*

Para desarrollar esta tarea (como cualquier otra actividad humana), hace falta un *lenguaje*. Es cierto que todo lenguaje, producto del pensamiento, supone ya un proceso de abstracción y modelización del entorno, y contiene términos aritméticos (los padres deben poder reconocer y evaluar el número de sus hijos; los cazadores deben poder informar del número y posición de las presas, etc.) Pero el lenguaje natural desarrollado por cada grupo de seres humanos para transmitir e intercambiar información, no es adecuado para este fin. Como dice el famoso Físico Matemático **Yuri Manin**,

> *"...este lenguaje natural es una herramienta extremadamente flexible para comunicar los factores necesarios para la supervivencia, para expresar las propias emociones e imponer nuestra voluntad, para la seducción y la convicción y capaz de crear los ricos mundos virtuales de la poesía y la religión. Pero el lenguaje natural no es el más adecuado para adquirir, organizar y continuar nuestra creciente comprensión de la naturaleza... A partir de Galileo, Kepler y Newton, el lenguaje natural en las ciencias quedó relegado al papel de un intermediario de alto nivel entre el conocimiento científico (codificado bien en tablas astronómicas, fórmulas químicas, ecuaciones de la teoría cuántica de campos o bases de datos del genoma humano), y nuestro cerebro... Todo lo que es esencial* [para el discurso científico] *se transmite... a través de las matemáticas... Además, en el proceso de su desarrollo interno... las matemáticas crean, también, mundos virtuales de gran complejidad y belleza, que desafían cualquier intento de ser descritos en lenguaje natural...*([15])

Este largo párrafo resume muy acertadamente el papel de las matemáticas como lenguaje científico. Pero también apunta a que las matemáticas son algo más que un mero lenguaje: tiene objetivos propios, independientes de su papel como auxiliar de las demás Ciencias.

Como señala el mismo autor más adelante, las matemáticas como lenguaje tienen una propiedad peculiar: a partir de un texto matemático inicial y a través de un juego "formal" con las leyes propias de esta ciencia, se obtiene como "output" un texto matemático que contiene nuevos conocimientos. Podría decirse que el texto inicial contiene un conocimiento implícito que el proceso hace explícito.

Pero comencemos por el principio:

LA APARICIÓN DE LA CIENCIA

Esta noción de la Ciencia como instrumento para conocer y controlar la realidad, se originó en Grecia. La posibilidad de desarrollar este planteamiento se basa en una importante hipótesis de partida: la de que *el mundo real está controlado por leyes que el hombre puede comprender y conocer*.

Esta idea, asumida tácitamente por los escépticos pensadores griegos de alrededor del siglo VI a. de C., es la causante de la gran revolución ideológica que condujo al nacimiento de la Filosofía y las Matemáticas primero, y de la Ciencia en sentido moderno después.

Los filósofos griegos, en su búsqueda de la naturaleza de la realidad, descubrieron que las apariencias son engañosas y pueden llevar a conclusiones falsas, por lo que trataron de encontrar un método perfecto de razonamiento. Para ello, observaron con sorpresa que los objetos matemáticos, números y figuras, que usaban los egipcios y babilonios desde tiempo inmemorial, eran tan ontológicamente simples que el estudio de sus propiedades verdaderas era mucho más sencillo que las del mundo real, y este estudio podía servir de modelo o ensayo para encontrar los métodos de razonamiento deseados. Aparecen así las Matemáticas como un *instrumento para la búsqueda de una explicación verdadera de la realidad*. Esta es probablemente la razón de la aproximación a las matemáticas de hombres como **Thales** o **Pitágoras**. Los enunciados de los teoremas geométricos de Tales seguramente harían sonreir a los "matemáticos" egipcios y babilonios por su simplicidad y falta de utilidad, pero tienen el carácter de *verdades absolutas*, están *demostrados*, y siguen siendo ciertos ahora, después de más de 2.000 años.

Los primeros métodos de demostración de los griegos estaban basados en razonamientos visuales, especialmente adaptados a los primeros estudios sobre Geometría, la ciencia de *lo que se ve*, y a la aritmética pitagórica, esencialmente discreta. No se trataba de un método especial para tratar los objetos matemáticos, sino del mismo método empírico utilizado para analizar la realidad física, pero que al aplicarlos sobre los objetos tan puros y simples como los matemáticos, se obtenían resultados con un grado de certeza irrefutable.

A comienzos del siglo V A. de C., los Pitagóricos habían obtenido y desarrollado una gran cantidad de resultados sobre la geometría del triángulo y otras figuras geométricas. En particular, desarrollaron una eficaz *Teoría de Proporciones* que permitía relacionar entre sí diversas magnitudes geométricas y dar una descripción de las mismas. La Filosofía pitagórica partía de la asunción de que todo objeto estaba formado por una colección de *átomos* individuales e indivisibles (recuérdese la afirmación de que *todo es número*). En particular, dos magnitudes geométricas análogas eran siempre *conmensurables*, es decir, existía una unidad de medida común para ambas. De este modo, las dos magnitudes estaban en la misma relación que los correspondientes múltiplos de la unidad de medida común. Esta teoría permitía visualizar fácilmente los razonamientos geométricos, convirtiéndolos en muchos casos en problemas aritméticos. Por ello el descubrimiento a mediados del siglo V de la existencia de segmentos inconmensurables (como el lado y la diagonal del cuadrado o del pentágono regular), supuso un verdadero terremoto. ¡Todas las demostraciones basadas en la teoría de proporciones pitagóricas quedaban en principio invalidadas! la geometría *no* es aritmética y los objetos matemáticos, no eran tan simples como se pensaba.

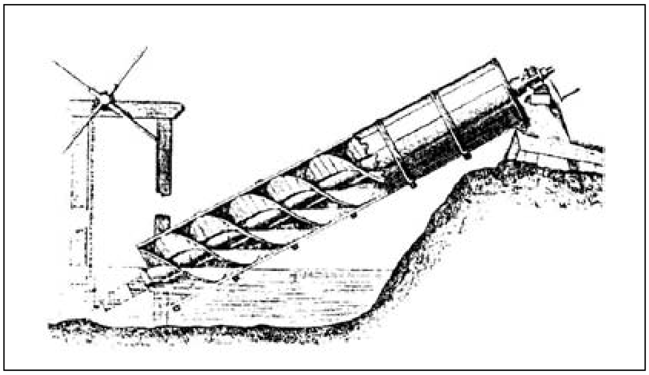
Para agravar las cosas, por esa época aparecen las aporías de **Zenón de Elea**, una serie de brillantes experimentos mentales para demostrar que la existencia de una pluralidad de objetos o el movimiento conduce a contradicciones lógicas. La base de estas aporías está en la introducción de procesos infinitos en esos experimentos mentales.

Esta crisis de fundamentos hizo cuestionar la seguridad del método seguido para demostrar las propiedades de los objetos matemáticos, consistente en *hacer ver* o *poner en evidencia* que tales resultados eran necesariamente verdaderos.

Y así, en algún momento de la segunda mitad del siglo V a. de C. un grupo de pensadores griegos establecieron un nuevo método para el descubrimiento de la verdad: el **método axiomático-deductivo**, que es esencialmente el mismo que usamos hoy: a partir de unas pocas verdades *evidentes* (o *axiomas*, como las llamaron los griegos), se trata, a través de una serie de etapas muy simples, de obtener una cadena de afirmaciones, con la propiedad de que una cualquiera de ellas es verdadera con toda seguridad si lo son todas las anteriores. A las leyes que rigen la forma correcta de pasar de un escalón a otro de la cadena, se las llamó mas tarde *leyes lógicas o deductivas* A estas cadenas de afirmaciones lógicamente correctas, los griegos las llamaron **demostraciones**.

Los pensadores griegos quedaron fascinados con el nuevo instrumento de investigación del conocimiento, y se dedicaron con ahínco a su estudio y desarrollo. Por una serie de razones, que sería prolijo exponer aquí, no fueron muy lejos ni tuvieron demasiado éxito en la siguiente etapa, es decir, en la aplicación de ese instrumento al conocimiento del mundo Físico.

No obstante, algunos matemáticos griegos no desdeñaron hacer incursiones en el mundo de la Física y la Astronomía. Entre todos, destaca la figura gigantesca de **Arquímedes** (287-212 a. de C.), uno de los mayores genios que han existido, quien, junto a maravillosos descubrimientos matemáticos, sentó las bases de varias partes de la Física moderna: la Mecánica y la introducción del concepto de *fuerza*, el estudio de la palanca (cuya ley descubrió), la Hidrostática (recordemos el "*principio de Arquímedes*"), etc. Y sus estudios no quedaron en meras descripciones teóricas:



Reproducción del tornillo de Arquímedes para la elevación de agua.

el *tornillo de Arquímedes*, un tornillo transportador, muy pronto sirvió para el riego artificial a gran escala. Sus invenciones mecánicas durante el asedio de su ciudad natal, Siracusa, por las tropas romanas en la Segunda Guerra Púnica, sembraron el terror entre los atacantes: Bastaba que hubiera alguna actividad inusual en las murallas para que las tropas romanas huyeran despavoridas, pensando que se les venía encima algún nuevo invento del genial Arquímedes en forma de lluvia de piedras, aceite hirviendo o "fuego griego", el *napalm* de la antigüedad, o ingeniosas combinaciones de palancas y poleas que levantaban las naves romanas y las arrojaban contra las rocas. De hecho, después de dos años de asedio, la ciudad sólo pudo ser tomada por la traición de alguno de sus habitantes. Desgraciadamente, y a pesar de las órdenes explícitas de Marcelo, jefe del Ejército romano, durante el saqueo subsiguiente pereció también Arquímedes. Era el año 212 a. de C.

Además de Arquímedes, no debemos olvidar las aportaciones de **Eratóstenes** (276-194 a. de C.) sobre el cálculo del radio de la Tierra, o el grandioso trabajo de observación y cálculo astronómico de **Ptolomeo** (hacia 85-165), recogido en una monumental obra de 13 libros denominada *Almagesto*, esto es, "el más grande", por los árabes. En el libro I del Almagesto se encuentra una tabla, correcta hasta el último segundo, de todos los arcos desde medio grado hasta 180 grados, que fue una herramienta indispensable para todos los astrónomos de los mil años posteriores.

A través de esta aproximación lógica y deductiva a la naturaleza, los Griegos obtuvieron una evidencia sustancial de que el Universo está gobernado por una serie de leyes y posee un orden.

UN LARGO INTERLUDIO HASTA EL RENACIMIENTO

Con el establecimiento del Imperio Romano en el Mediterráneo, la cultura Griega comienza un lento declive, refugiándose principalmente en Alejandría, hasta su conquista por los Árabes en el año 641. Por otro lado, el colapso del Imperio Romano de Occidente en el siglo V de nuestra Era llevó a Europa a un largo período de oscuridad en el aspecto cultural y científico. La herencia cultural griega fue conservada en parte y finalmente transmitida a Europa a través del Imperio Bizantino primero y, sobre todo, de los Árabes. Finalmente, la asimilación y aceptación de la cultura griega y en particular del pensamiento Aristotélico por parte de la Iglesia Católica a partir del siglo XIII, sentó las bases para el renacimiento intelectual en la cultura Occidental.

Este hecho tuvo también una importante consecuencia: La creencia griega en un universo matemáticamente diseñado se contraponía a las ideas medievales acerca de la omnipresencia de Dios y su acción constante sobre el Mundo. Como síntesis de ambas concepciones surgió la doctrina de que el Dios cristiano había diseñado el universo *racionalmente* y de ahí la gran importancia del descubrimiento de este diseño racional por parte de la divinidad. La búsqueda de las leyes de la naturaleza se convirtió así en una cuestión de afirmación religiosa.

LA NUEVA ASTRONOMÍA

Uno de los ejemplos más claros de este maridaje entre la concepción griega de la Naturaleza y la visión cristiana del mundo, se encuentra en la Revolución astronómica protagonizada por **N. Copérnico** y **J. Kepler**. Hasta el siglo XVI, la única teoría astronómica aceptada por los astrónomos profesionales (y aplicada para el cálculo de calendarios y la navegación) era el sistema geocéntrico de Ptolomeo, contenido en los últimos 12 libros del Almagesto. Como la mayoría de los grandes pensadores de la antigüedad, Ptolomeo postuló un universo esencialmente geocéntrico, lo que estaba en concordancia con la idea cristiana del Hombre como centro del Universo.

Básicamente, en este esquema un planeta P recorre con movimiento uniforme un círculo (epiciclo del planeta) cuyo centro S (en muchos casos el Sol, aunque en otros es simplemente un punto matemático para explicar las observaciones), se mueve a su vez con velocidad constante sobre otro círculo de centro en la Tierra (llamado deferente). Seleccionando apropiadamente los radios del epiciclo y el deferente, la velocidad del planeta y la del centro del epiciclo, Ptolomeo pudo explicar los movimientos aparentes de los planetas conocidos en bastante concordancia con las observaciones. Pero el aumento del número y

N. Copernico (1474-1543).

calidad de éstas, fue originando una serie cada vez mayor de discrepancias con el modelo.

Para el tiempo en que **Copérnico** comenzó a trabajar en un nuevo sistema astronómico, la teoría Ptolomeica se había vuelto mucho más complicada. Más y más círculos (hasta 77 en estas fechas) se habían tenido que introducir para adaptar la teoría a las nuevas observaciones.

Estudioso de los griegos y convencido de que el Universo estaba diseñado armoniosamente, Copérnico pensaba que debía existir una teoría mucho más simple que explicara los hechos observables. Y efectivamente, Copérnico consiguió un modelo mucho más sencillo, reduciendo el número total de ciclos de 77 a 34, con la modificación sustancial de que el *sol* era ahora el centro de cada deferente. De este modo, la tierra abandonaba su posición privilegiada de centro del universo para convertirse en un planeta más moviéndose sobre un epiciclo. Hay que decir que ya **Aristarco de Samos** (310-239 a. de C.) había concebido un sistema similar, pero las dificultades originadas por una Tierra en movimiento eran mayores que las ventajas, por lo que el modelo fue abandonado.

Copérnico recogió sus investigaciones en un libro notable, *De revolutionibus orbitum coelestium*, pero fue lo bastante cauto como para retrasar la publicación de sus ideas hasta casi el final de sus dias. Para evitar la palmaria contradicción de la nueva teoría con algunos pasajes literales de la Biblia, un célebre obispo luterano, **A. Osiander** (1498-1552) incluyó (al parecer sin el conocimiento de Copérnico) un prólogo a *De Revolutionibus* en el que se adoptara una concepción fenomenista de la ciencia: Ésta, y en especial la Astronomía, no tendría más que un fin: "salvar las apariencias" (*"salvare apparientias"*), e.d., relacionar y ordenar las observaciones por medio de *hipótesis de trabajo* que permitan calcular, prever y predecir, sin ninguna pretensión de encontrar las causas ocultas. Las hipótesis en que se base el modelo, no deben pretender ser verdaderas, ni siquiera verosímiles, sino simplemente sencillas y convenientes para el cálculo. Esta postura no es nueva. Los mismos griegos eran conscientes de que puede explicarse el mismo conjunto de fenómenos con hipótesis matemáticas diferentes. En este caso, la elección entre dos explicaciones alternativas (matemáticamente equivalentes), debe hacerse de modo que el modelo elegido sea el más sencillo posible. Lo cierto es que esta concepción se fue extendiendo a toda la ciencia a partir del siglo XVII y se explicita claramente a comienzos del siglo XIX, cristalizando en la corriente llamada *convencionalismo*. Hasta tal punto está hoy vigente lo muestra la siguiente declaración de **S. Hawking** con ocasión del 25 aniversario de la creación de los Premios Príncipe de Asturias:

> *Una teoría es tan sólo un modelo matemático para describir las observaciones, y no tiene derecho a identificarse con la realidad, sea lo que sea lo que esto signifique. Podría ser que dos modelos muy diferentes lograran describir las mismas observaciones: ambas teorías serían igualmente válidas, y no se podría decir que una de ellas fuera más* ***real*** *que la otra* [El País, 13-04-2005, pág. 38].

La Iglesia Católica no puso objeciones al principio a los distintos modelos matemáticos del cielo. Así, el astrónomo jesuita **C. Clavius** (1538-1612) (principal responsable de la reforma del Calendario juliano decidida en el Concilio de Letrán y que finalmente tuvo lugar en 1582) aceptó sin reservas el modelo de Copérnico, por las ventajas para el cálculo y la predicción, aunque declaró que los axiomas en los que se basaba no tenían realidad física. Los Protestantes presentaron una mayor oposición a las tesis copernicanas. El mismo **Lutero** señaló:

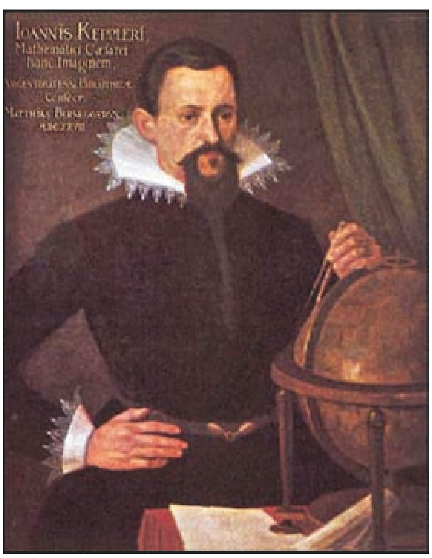
> *Algunos han prestado atención a un astrólogo advenedizo que se esfuerza en demostrar que es la Tierra quien gira y no el cielo o el firmamento, el Sol y la Luna [...] Este loco anhela trastocar por com-*

> *pleto la ciencia de la Astronomía, pero las Sagradas Escrituras nos enseñan que* ***Josué*** *ordenó al Sol, y no a la Tierra, que se parara.*

Por su parte, **Calvino** afirmó: *"¿quién osará colocar la autoridad de Copérnico por encima de la del Espíritu Santo?"*

Sin embargo, pronto empezó a extenderse la idea de la realidad del sistema de Copérnico, con lo que suponía de contradicción palmaria con pasajes literales de la Biblia. El mismo **Tycho Brahe** contribuyó a esta idea, al descubrir en 1572 una nueva estrella en el cielo (al parecer, se trató de una supernova), que destruía la convicción de la inmutabilidad de los cielos. La trascendencia de la nueva teoría para una nueva concepción del Universo en manos de abanderados como **Giordano Bruno** (detenido por la Inquisición en 1592, y posteriormente excomulgado y quemado en la hoguera en Roma en 1600 por defender la existencia de otros mundos análogos a la Tierra en la vastedad del Universo copernicano), hizo que la Inquisición condenara en 1616 la teoría copernicana en los siguientes términos:

> *La doctrina que asegura que el Sol está inmóvil en el centro del mundo es falsa y absurda, formalmente herética y contraria a las Escrituras, mientras que la doctrina que asegura que la Tierra no está en el centro del mundo, sino moviéndose y girando cada día, es filosóficamente falsa y absurda y teológicamente errónea.*



J. Kepler (1571-1630).

Como consecuencia, *De Revolutionibus* fue incluido en el Índice de libros prohibidos en 1616.

Aunque la teoría Copernicana suponía un cambio revolucionario, se seguían manteniendo en ella dos suposiciones básicas de la teoría de Ptolomeo: los astros describen *círculos* y se mueven a *velocidad uniforme*. El abandono de estas hipótesis fue obra de un hombre singular, **J. Kepler** (1571-1630).

Como Copérnico, Kepler era un hombre profundamente religioso, y estaba convencido de que el Universo había sido creado por Dios de acuerdo con algún plan bello y simple. Por ello, al hacerse cargo del puesto de *Profesor de Matemáticas y Moral* en la escuela del Seminario de Graz en 1594, se dedicó de lleno a la búsqueda de ese plan que explicara simple y satisfactoriamente los hecho observados. El porqué había exactamente seis planetas (los únicos conocidos en su tiempo) y la búsqueda de alguna ley que explicara sus distancias sucesivas al sol le preocupaban sobremanera. En 1595 creyó haber encontrado la solución: los planetas describirían órbitas circulares en torno al sol de acuerdo con el siguiente modelo:

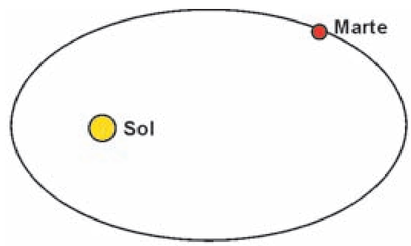
> *"La Tierra es la medida de todas las demás órbitas (y se representa por una esfera). Ella circunscribe un dodecaedro: la esfera que contiene a éste, es la de Marte. La órbita de Marte circunscribe un tetraedro; la esfera que lo contiene es la de Júpiter. La órbita de Júpiter circunscribe un cubo; la esfera que lo contiene es la de Saturno. Pon ahora en la órbita de la Tierra un icosaedro; la esfera inscrita es la de Venus. En la órbita de Venus coloca un octaedro; la esfera a él inscrita es la de Mercurio."*

Kepler quedó entusiasmado por la presunta revelación del plan divino sobre la estructura del Universo en términos puramente geométricos (los cinco sólidos regulares más la esfera). Su obra *Mysterium Cosmographicum* le hizo célebre y conocido entre los astrónomos y matemáticos. Galileo le dio la bienvenida como *"compañero en la investigación de la verdad"* y el eminente astrónomo danés **Tycho Brahe** (1546-1601), a la sazón en Praga bajo la protección del emperador Rodolfo II, reconoció su talento y le invitó a visitarle. Kepler aceptó la invitación y llegó a Praga a mediados de Octubre de 1600. Y al año siguiente, a la muerte de Tycho, fue nombrado "matemático Imperial" (aunque con bastante menos sueldo que el danés, ¡y eso cuando se lo pagaban! Kepler tuvo que dedicarse a la elaboración de horóscopos para poder mantener a su familia.)

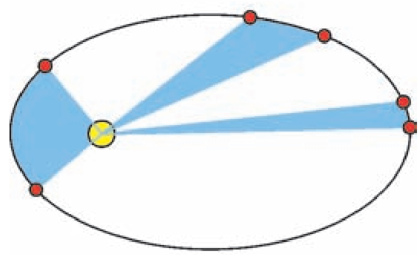
Tras algunos problemas con los herederos de Brahe, Kepler pudo acceder a las observaciones registradas por Tycho. En vida, éste se había mostrado renuente para suministrar esos datos a Kepler, temiendo (con razón) que se sirviera de los mismos para afianzar la teoría copernicana, en lugar de su modelo (intermedio entre el de Ptolomeo y el de Copérnico: Los planetas giraban en torno al sol, pero el sol y la luna orbitaban alrededor de una Tierra fija e inmóvil, que así volvía a recuperar su lugar de centro del Universo: ¡una verdadera pesadilla matemática!) . Cuando finalmente pudo Kepler acceder a los registros de Tycho, pronto se convenció de la inexactitud de su teoría, por lo que se puso a la tarea de encontrar otra que explicara la abrumadora cantidad de precisos datos de observaciones que tenía ahora a su disposición. Especial atención prestó a las observaciones sobre la posición de Marte, el planeta de órbita más excéntrica. Dejemos hablar al filósofo de la Ciencia **Thomas Kuhn** (1922-1997):

> *"Fue una labor inmensa, que ocupó la mayor parte del tiempo de Kepler durante cerca de 10 años [...] Se vio obligado una y otra vez a cambiar la combinación de círculos que empleaba para calcular las órbitas [...] Una larga serie de infructuosos ensayos convenció a Kepler de que ningún sistema fundamentado en una composición de círculos podía resolver el problema. La clave debía estar en alguna otra figura geométrica.[...]"*

Después de cálculos tremendamente laboriosos (recordemos que aún no se empleaban los logaritmos) y ensayar todo tipo de órbitas circulares para la Tierra y Marte, Kepler reparó, por puro azar, en que las discrepancias entre las tentativas teóricas y las observaciones variaban con una regularidad matemática. Y entonces tomó una decisión revolucionaria: Primero, abandonó la idea de un movimiento uniforme, y ensayó un modelo en el que Marte describía un círculo excéntrico en torno al sol, con una velocidad variable, inversamente proporcional a la distancia al sol. Con sorpresa, descubrió que ahora las *áreas barridas por un radio vector que uniera Marte con el Sol eran uniformemente proporcionales a los tiempos* (esta es la **segunda ley de Kepler**) y los datos se ajustaban a las observaciones (dentro de los márgenes de error razonables). En cuanto a la forma de la órbita, al abandonar la forma circular, los cálculos se complicaban extraordinariamente. Finalmente Kepler, probablemente inspirado por sus lecturas de los geómetras griegos, ensayó con una elipse, colocando al Sol en uno de sus focos. Y, de repente, todos los datos concordaban a la perfección: ¡se verificaba la ley de las áreas y las posiciones se ajustaban a la perfección con las observaciones de Tycho! Así quedó establecida la **Primera Ley de Kepler**: *los planetas describen elipses en las que el Sol ocupa uno de los focos*.



Primera Ley de Kepler

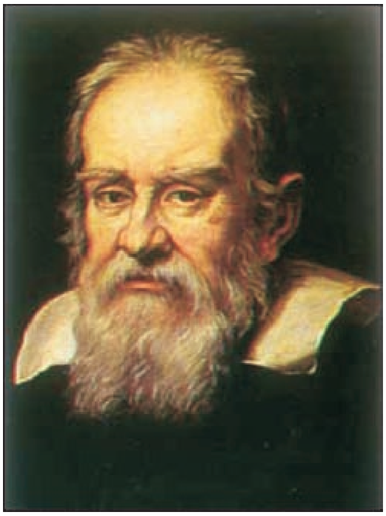


Segunda Ley de Kepler

En la *Astronomia Nova*, aparecida en 1609, se recogen estas dos Leyes. La **tercera Ley** que establece que el cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita elíptica, la descubrió Kepler, tras innumerables ensayos, en 1618, y apareció publicada en su obra *Harmonices Mundi*, en 1619.

LA REVOLUCIÓN CIENTÍFICA

El modelo de Kepler, fruto como hemos visto de innumerables ensayos y pruebas, es paradigmático de los modelos empiristas en la ciencia. El modelo era sugerente y explicaba muchos problemas. Pero su rápida popularidad, a pesar de la oposición de la



Galileo Galilei (1564-1642).

Iglesia, se debió en gran parte al trabajo del gran iniciador de la Revolución Científica en marcha: **Galileo Galilei** (1564-1642). Galileo es un verdadero hombre del Renacimiento. Recibió una esmerada educación y pronto se dedicó a la investigación y la enseñanza, alcanzando rápidamente una muy buena reputación.

La invención del telescopio por **Galileo** (1564-1642) a comienzos del siglo XVII vino a suponer un apoyo decisivo para las nuevas teorías astronómicas. A finales de 1609 dirigió su mejor telescopio al cielo y comenzó una serie de descubrimientos que cambiaron la imagen del mundo. Galileo describió montañas en la Luna, cuatro satélites en torno a Júpiter, fases en Venus y manchas en el Sol. Todo ello indicaba que los cuerpos celestes no eran en absoluto inmutables y “divinos”, como sostenía Aristóteles. De hecho, sus observaciones proporcionaban una fuerte evidencia a favor del modelo copernicano (y en contra del de Tycho Brahe), incluyendo el movimiento de rotación de la Tierra. En 1616 escribió la *Carta a la Gran Duquesa* (se trataba de **Cristina de Lorraine**) atacando las doctrinas de Aristóteles y defendiendo que el modelo copernicano no era un artificio matemático, sino que describía la realidad física.También abogaba porque no se diera una interpretación literal a las Sagradas Escrituras, cuando éstas contradecían la evidencia probada.

Como sabemos, en 1616 la teoría de Copérnico fue condenada por la Iglesia. Galileo fue advertido para que no continuara la defensa de esa teoría. Por suerte para él, uno de sus admiradores fue elegido Papa (**Urbano VIII**), y Galileo se apresuró a dedicarle su nuevo libro *Il saggiatore* (El Ensayista), aparecido en 1623, en el que describe lo que debe ser el método científico:

> *La Filosofía está escrita en ese gran libro que es el Universo… Pero no podemos entender el libro si antes no aprendemos el lenguaje en el que está escrito y su alfabeto.* ***Ese lenguaje es el de las matemáticas****, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin la cuales es humanamente imposible entender una sola palabra de Él…*

Galileo es uno de los mayores precursores de la gran Revolución Científica que se iba a iniciar en el siglo XVII y tuvo una influencia decisiva en los hábitos de los científicos posteriores. Galileo defiende que la Naturaleza está regida por una serie de *principios básicos* simples, que deben descubrirse por al experimentación y la inducción. Una vez descubiertos estos principios, debe encontrarse una *descripción* o *modelo matemático* del fenómeno estudiado, que permita *predecir hechos*, *comprobables* por medio de la observación y experimentación. Esta última parte y, sobre todo, la necesidad de *matematizar* la Naturaleza, suponía un cambio fundamental con el aristotelismo vigente, y fue trascendental para la gran Revolución Científica en ciernes.

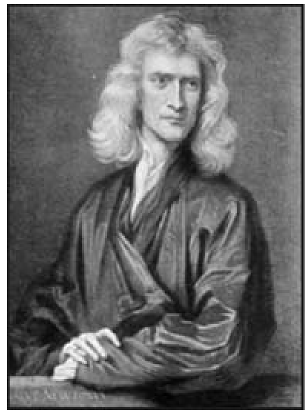
Las ideas de Galileo eran singularmente arriesgadas para aquella época. En su *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo* (es decir, la teoría de Ptolomeo y la de Copérnico), publicado en 1632, Galileo adopta la forma de una amable discusión entre tres personajes para hacer una crítica feroz de muchas de las teorías vigentes e introducir su concepción del mundo, con visiones completamente nuevas sobre la gravedad, el movimiento en el vacío y, sobre todo, su percepción de que las leyes cuantitativas que rigen los movimientos acelerados *deben* poder deducirse lógicamente de una proporción matemática simple. De esta manera, Galileo se separa de las teorías aristotélicas y escolásticas al uso, que trataban de buscar explicaciones causales y cualitativas a los fenómenos.

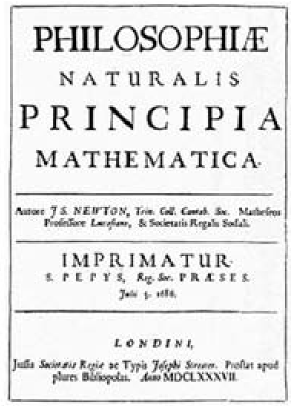
El libro tuvo tanto éxito que atrajo la atención de la Inquisición. Tras un proceso de 20 días, el 22 de Junio de 1632 un tribunal de siete cardenales declaró *"absurda, falsa en Filosofía y herética la afirmación de que el sol ocupa el centro del Universo y que la Tierra no está inmóvil en el centro del mundo"*. Después de esto, Galileo tuvo que firmar la fórmula de abjuración y oir la sentencia de reclusión en su casa. A pesar de su amargura, continuó trabajando infatigablemente, hasta su muerte en 1642. En 1638 publicó un estudio sistemático y revolucionario sobre el movimiento de los proyectiles, que le llevó a formular la *ley de composición de movimientos* que, junto con sus ideas sobre la gravedad, le permitió afirmar (correctamente) que la trayectoria era una *parábola*. De este modo se va confirmando el modelo matemático de la Naturaleza: las cónicas: elipses, parábolas e hipérbolas, curvas inventadas por los geómetras griegos 2000 años antes, en un contexto puramente geométrico, aparecen ahora como parte del diseño fundamental de la Naturaleza.

La influencia del pensamiento de Galileo fue muy grande entre los científicos de la época, aunque, a la vista de la experiencia, la mayoría tomó buen cuidado en plantear sus teorías como meras"hipótesis de trabajo", a semejanza del prólogo del obispo Osiander a *De Revolutiones* de Copérnico, que ya hemos citado. Pero el mensaje de Galileo caló hondo. Así, comienzan a desarrollarse una gran cantidad de nuevas técnicas matemáticas: la teoría de los indivisibles para el cálculo de volúmenes (Cavalieri, Kepler...), las técnicas de cálculos de tangentes de **Fermat** y **Descartes**, la Geometría Analítica, etc. que permitieron enriquecer y fortalecer en gran medida el "lenguaje" necesario para leer la Naturaleza, según el programa propuesto por Galileo.

Pero el paradigma de la Revolución Científica en marcha es, sin duda, **Isaac Newton** (1642-1727) y su obra *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* o *Principia*, como se conoce habitualmente. Esta obra, publicada en 1687 consta de 3 libros, los dos primeros titulados *Sobre el movimiento de los cuerpos* y el tercero *Sobre el Sistema del Mundo* y es una de las obras cumbre de la Ciencia. Newton trata de encontrar un modelo matemático riguroso que le permita explicar *todos* los fenómenos del movimiento a partir de unos pocos *principios*.

Los descubrimientos matemáticos, imprescindibles para el desarrollo de su obra, los fue obteniendo





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Newton a lo largo de toda su vida, y constituyen una de las mayores aportaciones al desarrollo de la Matemática desde los tiempos de Arquímedes. Su *Método de las fluxiones*, o lo que es lo mismo, el Cálculo Diferencial, es la herramienta básica para la formulación de los modelos de las Ciencias de la Naturaleza hasta bien entrado el siglo XX (y todavía lo sigue siendo en áreas muy grandes de la misma). La estrategia es realizar un Análisis del fenómeno estudiado a nivel infinitesimal, utilizando las *leyes* que lo rigen, para obtener una *ecuación diferencial* que relaciona las variables relevantes. Los métodos del cálculo permiten obtener una *solución* de esa ecuación que describirá totalmente el fenómeno a nivel macroscópico en función de las variables elegidas.

Sin embargo, hay que decir que en los *Principia* aparecen estos métodos someramente recogidos en la Sección 1 del Libro I y en términos muy geométricos (probablemente, para evitar controversias).

En este Primer Libro, Newton introduce 8 definiciones, entre las que se encuentran las de fuerza, inercia, masa y cantidad de movimiento y su famoso escolio sobre términos "de todos conocidos": tiempo, espacio y movimiento. Después enuncia sus famosas **Tres Leyes del movimiento**. Finalmente, incluye 6 Corolarios que contienen las leyes de composición de velocidades y fuerzas, entre otros hechos destacados. Con la sola ayuda de estas definiciones y leyes, Newton obtiene una enorme cantidad de demostraciones matemáticas relativas al movimiento de los cuerpos.

En el libro segundo de los *Principia* se estudia el movimiento de un cuerpo en un medio resistente, con distintas hipótesis sobre la resistencia ofrecida. Estudia la propagación de las ondas, comienza el estudio de los fluidos viscosos, etc.

La culminación de los *Principia* la constituye el tercer libro, en el que se establece la **teoría de la Gravitación Universal**. El gran triunfo del “Sistema del Mundo” de Newton es la demostración de las 3 leyes de Kepler, obtenidas como vimos tras largos años de observación, ensayo y error, y que aparecen ahora como consecuencia sencilla de la Ley de Gravitación y las tres leyes del movimiento.

Newton estudia también el movimiento de los satélites alrededor de un planeta; fija la densidad de la Tierra entre 5 y 6 (valor admitido actualmente: 5,5) y a partir de aquí deduce las masas de los planetas y del sol en relación con la de la Tierra. Calcula el achatamiento producido por la rotación de la Tierra; explica por primera vez la precesión de los equinoccios; estudia la variación del peso con la latitud; justifica las órbitas descritas por los cometas y, finalmente, sienta las bases de la teoría de las mareas por la atracción combinada del Sol y la Luna. En fin, todo un compendio de resultados, deducidos matemáticamente a partir de unos cuantos principios simples.

LA MATEMATIZACIÓN DE LAS CIENCIAS FÍSICAS

La obra monumental de Newton abrió a la Humanidad la visión de un nuevo orden en el mundo: un universo controlado por un pequeño número de principios físicos expresables únicamente en términos matemáticos. Un esquema majestuoso que abarcaba desde la caída de una piedra hasta el movimiento de los planetas y las mareas. El esquema newtoniano fue decisivo para convencer al mundo de que la naturaleza está regida por leyes matemáticas.

A lo largo del siglo XVIII, los científicos (a su vez la mayoría matemáticos), siguieron con empeño el plan de Newton de matematización de la Naturaleza. Y ciertamente se obtuvieron logros espectaculares en esta dirección, que sirvieron a su vez para confirmar las visión Newtoniana del mundo. Entre ellos, podemos citar:

- La predicción del regreso y posición aproximada del cometa Halley (descubierto en 1682), realizada por **A. C. Clairaut** (1713-1765) en una sesión de la Academia de Ciencias de Paris. Clairaut anunció la aparición del cometa cerca del sol para mediados de abril de 1759. El cometa apareció un mes antes de lo anunciado, pero la hazaña resultaba enorme, teniendo en cuenta que sólo se disponía de las observaciones realizadas durante unos pocos dias 77 años antes.
- La confirmación experimental del achatamiento polar de la Tierra, predicha por Newton y Huygens, como consecuencia de las mediciones del arco de meridiano en Perú y Laponia.
- El descubrimiento del planeta Neptuno. Aunque realizado en 1846, el descubrimiento está enteramente basado en el trabajo matemático del siglo XVIII. En 1781, el astrónomo **W. Herschel** (1738-1822) descubrió el planeta Urano, utilizando un potente telescopio. Pero la órbita de Urano no se comportaba de acuerdo a las predicciones. Otro astrónomo, **A. Bouvard** (1767-1843), conjeturó que las anomalías se debían a la presencia de un planeta desconocido. Se hicieron multitud de intentos para localizar al nuevo planeta, hasta que el joven astrónomo francés **J. Leverrier** (1811-1877) culminó un impresionante trabajo de cálculo y habilidad matemática y envió al astrónomo alemán **J. Galle** (1812-1910) el 23 de Septiembre de 1846 los datos de la órbita del nuevo planeta, calculada a partir de las perturbaciones observadas en la órbita de Urano. Galle descubrió Neptuno a sólo 55 minutos de arco de la posición predicha por Leverrier.
- La formulación por **P. L. M. de Maupertuis** (1698-1759) del *Principio de Mínima Acción*, clarificado y generalizado por Lagrange, permitió unificar métodos y deducir soluciones para muchos problemas de la Mecánica. La herramienta matemática básica para la aplicación de este principio es el Cálculo de Variaciones, uno de los grandes motores del desarrollo del Análisis desde el siglo XVIII.

El interés general hacia las Ciencias de la Naturaleza y el éxito de los modelos matemáticos para su descripción hacen que durante el siglo XVIII y las primeras décadas del siglo XIX una parte importante de los desarrollos matemáticos estén dirigidos a su aplicación a la mecánica o a la física en general. Y, obviamente, había razones importantes para ello, pues un mejor y mayor conocimiento en el funcionamiento de los procesos de la Naturaleza podía tener importantes repercusiones en la tecnología, la industria y, en definitiva, el aumento de poder económico y político. Sin embargo, esta explicación "utilitaria", probablemente bastante acertada a partir del último cuarto del siglo XVIII, es, como señala S. Bochner, demasiado simplista, ya que

> *... Parece imposible encontrar una explicación sociológica de por qué en el siglo XVIII (y sólo en este siglo), con un desarrollo industrial incipiente y muy poca atención a la verificación experimental, se produjo esa fusión casi perfecta entre matemáticas y mecánica, con enorme beneficio para ambas y para toda la física y tecnología por venir...* ([Bo, pág. 7])

Como consecuencia de este maridaje, a partir del último tercio del siglo XVIII, la mayor parte de las Academias e Instituciones científicas organizaron multitud de concursos para la resolución de problemas surgidos en el mundo de las aplicaciones: desde el diseño de cascos de buques hasta la creación de mejores modelos matemáticos para entender la transmisión de la luz o el calor.

La percepción de que las matemáticas son una herramienta imprescindible para la consolidación de otras ciencias fue ampliamente aceptada y sirvió como base para su institucionalización como ciencia independiente. Un ejemplo típico de esta opinión predominante lo encontramos en las palabras del astrónomo **J. Zech** (18921-1864):

> *...Creo que no se puede rechazar al menos la posibilidad de que todo lo que es aprehendido por nuestros sentidos pueda calcularse matemáticamente. La razón de que ésto no haya ocurrido todavía no reside en las limitaciones de las matemáticas, sino en las de las ciencias naturales, que todavía no han progresado lo suficiente en el conocimiento de las causas que yacen tras los fenómenos observados...*

En consecuencia, durante la primera mitad del siglo XIX gran parte de la matemática que se produce tiene su motivación en las aplicaciones. Sin embargo, hay que hacer notar que esta matemática "práctica" fue desarrollada por hombres como **Cauchy, Fourier, d'Alembert, Euler, Lagrange, Poisson, Laplace, Gauss, Jacobi, Hamilton**, etc., que nadie dudaría en colocar entre los matemáticos "puros". De hecho, la mayor parte de las teorías desarrolladas por estos "arquitectos" de la mecánica y la ingeniería, surgieron de un proceso de abstracción matemático, con muy poco que ver con una experimentación directamente planificada, a diferencia de los modelos matemáticos de los físicos "teóricos" de un siglo más tarde, como **Gibbs, Boltzmann** o **Plank**, creados precisamente para explicar convincentemente una diversidad de hechos experimentales.

EL SIGLO XX: LUCES Y SOMBRAS

Por supuesto que, como hemos dicho, no toda la matemática desarrollada en los siglos XVII y XVIII, ni siquiera la producida por los matemáticos que se distinguieron en Física o en Mecánica, fue originalmente desarrollada con un fin concreto. Ya a mediados del siglo XIX, la matemática se hizo completamente independiente de la Mecánica y la Física en general, lo que no obsta para que estas ciencias siguieran siendo, directa o indirectamente, el origen de una parte importante de las matemáticas desarrolladas en la época. Sin embargo, una y otra vez, muchos de los resultados absolutamente abstractos, obtenidos sin una motivación práctica aparente, han resultado decisivos para la formulación y desarrollo de algunas de las más importantes teorías científicas. Ya hemos señalado el caso de las cónicas en la formulación del modelo astronómico de Kepler. Pero también esto se puede aplicar a dos de los considerados más grandes descubrimientos del siglo XX: la *Teoría de la Relatividad* y la *Mecánica Cuántica.*

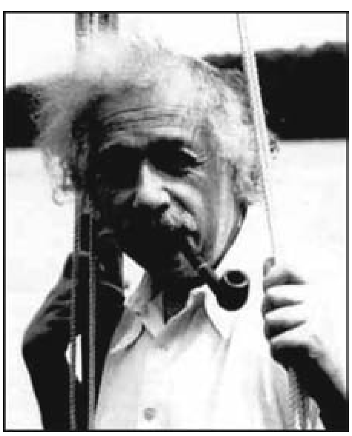
A finales del siglo XIX, la Mecánica clásica creada por Newton, complementada por la Electrodinámica clásica (finalizada por **J. C. Maxwell** (1831-1879)), proporcionaban un marco totalmente satisfactorio para la comprensión del mundo macrocósmico. A comienzos del siglo XX, con el aumento de precisión en los instrumentos de medida y la posibilidad de realizar experimentos más y más complejos, los físicos empiezan a estudiar fenómenos en condiciones poco usuales: a velocidades muy altas o a escala microscópica. Y es entonces cuando empiezan a surgir discrepancias con las predicciones suministradas por la

Física clásica, lo que motivó una profunda revisión de sus fundamentos y dio origen a las dos grandes teorías físicas de este siglo: la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica. La primera trata de explicar con precisión los fenómenos que ocurren a altas velocidades (próximas a la de la luz), mientras que la segunda intenta describir los acontecimientos que tienen lugar a escala atómica.

1. La Teoría de la Relatividad

La Teoría Especial de la Relatividad, aunque tremendamente atrevida y revolucionaria en sus postulados físicos, no requiere matemáticas especialmente innovadoras; de hecho, algunos historiadores han sostenido que esta Teoría está en germen implícita en la obra de Poincaré y Lorentz. Sin embargo, su desarrollo y sus implicaciones más sorprendentes están indisolublemente ligadas al nombre de **Albert Einstein** (1879-1955).

La Teoría de la Relatividad Especial resulta una consecuencia absolutamente lógica del principio de la invariancia de las leyes físicas para todos los observadores inerciales (*principio de Galileo*), junto al axioma de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. Pero en este esquema no tiene cabida la Gravedad, que parece propagarse a velocidad infinita. A partir de 1911, Einstein dirigió sus esfuerzos a integrar en su teoría especial los efectos de la gravitación, tratando de explicarlos por medio de una estructura geométrica en el espacio-tiempo que obligara a los objetos a desplazarse en la forma prevista por la teoría de la gravitación de Newton. Así surgió la Teoría General de la Relatividad (1915), que todo el mundo reconoce que es una creación original y genuina de Einstein.



A. Einstein (1879-1955).

En los primeros intentos, el formalismo matemático empleado por Einstein era bastante elemental y clásico, y los resultados no fueron muy prometedores. Precisamente entonces, un matemático conocido suyo, **Pick**, dirigió su atención a los trabajos de **Ricci** y **Levi-Civita** en una abstracta parcela de la Matemática pura, la Geometría Riemaniana. Einstein comenzó a estudiar esos trabajos, con la ayuda de su amigo y compañero de la época escolar **M. Grossman**, y descubrió que constituían precisamente el aparato matemático adecuado que necesitaba.

La formulación de la Teoría General de la Relatividad en términos de "espacios curvos" y geometría Riemaniana (no euclídea) se hizo ya inseparable de la misma. Como tantas otras veces, este hecho atrajo la atención de los matemáticos hacia esta teoría, lo que impulsó su interés y desarrollo dentro del ámbito de las matemáticas "puras". A su vez, los físicos comenzaron a interesarse en este campo de la matemática, lo que les llevó a aproximarse a áreas como la topología y a intensificar el contacto con la geometría diferencial.

2. La Mecánica Cuántica

La Mecánica Cuántica, como hemos dicho, surge para explicar las discrepancias con lo predicho por la Física clásica a nivel microcósmico. A diferencia de la Teoría de la Relatividad, centrada en la obra de un sólo hombre, la Mecánica Cuántica es una obra colectiva, aunque plagada de protagonistas sobresalientes (entre ellos tuvo un papel destacado el mismo Einstein). La historia comienza cuando **M. Planck** (1858-1947), para explicar el problema de la *radiación del cuerpo negro*, postula que la energía emitida por cada oscilador atómico sólamente puede surgir en cantidades discretas, $h\nu$, $2h\nu$, $3h\nu$..., donde h es una constante universal (*constante de Planck*) y ν es la frecuencia intrínseca del oscilador radiante. Del mismo modo, **N. Bohr** (1885-1962) para explicar el espectro discreto de emisión del átomo de hidrógeno, tuvo que postular en 1913 que los electrones excitados no podían existir en cualquier estado, sino sólo en aquellos en los que su momento cinético tomara los valores discretos $h/2\pi$, $2h/2\pi$... Otros ejemplos de estos *efectos cuánticos* se fueron descubriendo a lo largo del primer cuarto de este siglo.

La cuantización de las variables físicas conlleva aceptar que, a nivel microcósmico, los fenómenos tienen lugar de manera esencialmente discontinua e imprevisible. Las implicaciones de este hecho iban a hacer tambalear las ideas previas sobre la realidad física y, en último término a negar el *Principio de Causalidad* (entendido como la posibilidad de predecir el estado futuro de un sistema físico con una probabilidad tan cercana a 1 como se quiera.)

La inevitable interacción del observador con el hecho observado lleva al Principio de Complementariedad de **N. Bohr**, que establece la imposibilidad de realizar una descripción causal (en términos de transferencia de energía o momento) de los fenómenos atómicos que sea a la vez una descripción espacio temporal (en términos de posición), ya que ambas requieren disposiciones experimentales mutuamente excluyentes. Sin embargo, *ambas* descripciones, son necesarias para la comprensión del fenómeno. La cuantificación de este principio conduce al principio de incertidumbre, formulado por primera vez por **W. Heisenberg** en 1926, una de cuyas consecuencias es la dualidad onda-partícula tan típica del mundo microfísico: las partículas subatómicas se nos aparecen a veces como diminutas balas tremendamente veloces, y otras veces presentan fenómenos de difracción e interferencia propios de las ondas, dependiendo de la disposición experimental que empleemos.

Una vez más, la Física se enfrentaba al dilema de elegir entre dos concepciones contradictorias, cada una de las cuales parecía igualmente demostrable por las observaciones. Intentar resolver esta serie de hechos confusos y a veces contradictorios condujo a un cambio radical de la imagen de la realidad microfísica: el comportamiento de las cosas a escala microcósmica es, simplemente, distinto al que estamos habituado. Un átomo no se comporta como un muelle oscilando, ni como un sistema solar en miniatura, ni como algún tipo de nube rodeando un núcleo (por citar alguna de las imágenes habituales). Sin embargo, al menos podemos decir que, en este aspecto, *todas* las partículas subatómicas se comportan igual. En palabras del físico y Premio Nobel **R. Feynman** (1918-1988), *"todas están chifladas, pero exactamente de la misma manera"*.

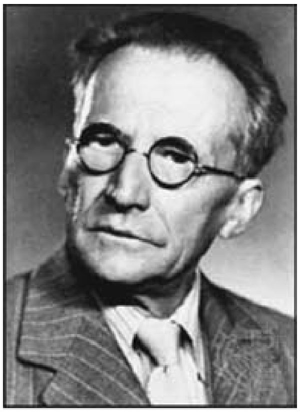
En la actualidad, la Física Moderna parece haberse instalado confortablemente en el convencionalismo: las teorías proporcionan descripciones y predicciones cada vez más exactas de los hechos observados, sin pretender encontrar una explicación última de la realidad. A este respecto es quizá paradigmática la reflexión que hace el ya citado R. Feynman a cuenta de la discusión del conocido experimento para detectar o bien la energía o bien la posición de los electrones que pasan a través de una pantalla con dos agujeros. Como es bien sabido, en el primer caso los electrones se comportan como ondas, y en el segundo caso como partículas. Dice Feynman:

> *La cuestión es saber cómo funciona realmente. ¿Qué mecanismo es el causante de todo esto? Nadie sabe de ningún mecanismo. Nadie puede dar una explicación del fenómeno más profunda que la que yo he dado; o sea, una mera descripción… La formulación matemática puede hacerse más precisa… Pero el misterio profundo es el que acabo de describir y, en la actualidad, nadie puede ir más al fondo.* [Fe: Cap. 6]

Ya hemos citado anteriormente la opinión de S. Hawking al respecto, con ocasión del 25 aniversario de los Premios Príncipe de Asturias.

Pero volvamos a nuestro tema: A diferencia de otras teorías físicas, los modelos matemáticos propuestos para desarrollar la Mecánica Cuántica fueron

W. Heisenberg (1901-1976)



E. Schrödinger (1887-1961)

muy diversos. En muchos casos, las matemáticas empleadas eran claramente insatisfactorias y en absoluto rigurosas. Las formulaciones más conocidas son la *Mecánica de Matrices* de **Heisenberg** y la *Mecánica Ondulatoria* de **Schrödinger**.

El mismo Schrödinger se encargó de encontrar lo que llamó "una identidad matemática formal" entre ambas formulaciones. Esencialmente se trataba de una regla formal que permitía trasladar toda ecuación de la mecánica ondulatoria a una ecuación de la mecánica matricial, y un recíproco parcial. La unificación de ambas teorías, sin embargo, se produjo en 1927 como consecuencia del trabajo de un matemático, **J. Von Neumann** (1903-1957), trabajando a la sazón bajo la dirección del gran **D. Hilbert** (1862-1943).

El problema residía en la búsqueda de una analogía formal entre el espacio "discreto" Z de los valores de los índices de las matrices que aparecían en la teoría de Heisenberg, y el espacio Ω de la variable "continua" de las ecuaciones de Schrödinger. Como señala Von Neumann, "*... no es de extrañar que esto no pueda lograrse sin cierta violencia sobre el formalismo y la matemática: los espacios Z y Ω son verdaderamente muy distintos, y toda tentativa de ponerlos en relación debe chocar con grandes dificultades.*". El descubrimiento innovador de Von Neumann fue percatarse de que, si bien Z y Ω son muy distintos, **los espacios de funciones reales sobre ellos que intervienen en la Mecánica Cuántica son esencialmente los mismos.** En efecto, a las sucesiones que aparecían en la Mecánica de matrices habitualmente se les imponía la condición de normalización $\sum |x_n|^2 = 1$, mientras que las funciones ψ de la Mecánica ondulatoria debían cumplir $\int |\psi|^2 = 1$, tras su interpretación como densidades de probabilidad. Esto sugirió a Von Neumann limitar el ámbito de las sucesiones o funciones aceptables en ambas teorías a lo que hoy conocemos como los espacios

$$\ell_2 = \left\{ \mathbf{x} = (x_n) : x_n \in C \text{ y } \|\mathbf{x}\| = \left(\sum |x_n|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

y

$$L_2(\Omega) = \{\psi : \Omega \to C : \psi \text{ es medible Lebesgue y } \|\psi\| = \left(\int |\psi|^2 \right)^{1/2} < \infty \}$$

Estos espacios, que Von Neumann designó por F_Z y F_Ω, respectivamente, habían sido introducidos por Hilbert y Lebesgue alrededor de 1906, y constituyen los primeros y más importantes ejemplos de los llamados **Espacios de Hilbert**. Lo interesante es que en 1907, independientemente, los matemáticos **F. Riesz** y **E. Fischer** habían probado que *ambos espacios son isomorfos e isométricos*, es decir, idénticos desde el punto de vista estructural.

De esta manera, la equivalencia de la mecánica de matrices y la mecánica ondulatoria resulta una consecuencia lógica del hecho de que ambas son sólo diferentes representaciones matemáticas de las mismas relaciones abstractas.

Como vemos, de nuevo una herramienta matemática desarrollada en otro contexto, resuelve un problema fundamental para la formulación de una teoría física. Como en el caso de la Teoría de la Relatividad, este éxito impulsó enormemente la teoría de espacios de Hilbert y la teoría de Operadores (que en el modelo de Von Neumann representan los *observables* de un sistema físico).

Otro ejemplo de "matemáticas prefabricadas" lo podemos encontrar en la teoría de ondas de choque. La necesidad de una tal teoría se hizo urgente en los años 1940, con la aparición de la fisión atómica, ¡y resultó que ya existía todo un libro que contenía el mejor estudio sobre el tema!. El libro, titulado *Lecons sur la propagation des ondes* había sido escrito en 1903 por el eminente matemático francés **J. Hadamard** (1865-1963), e inmediatamente se convirtió en libro de referencia para los especialistas en fisión atómica ¡40 años después de su aparición!.

Del mismo modo, el trabajo de **G. Boole** (1815-1864) y su obra *Laws of Thought* resultó crucial como base para el inicio de la Teoría Redes y de la Información. Y que decir de la Teoría de Grafos, indispensable hoy en día en materias como Diseño de Circuitos, Máquinas Finitas o Redes Neuronales, y que se inició en 1736 con la solución dada por **L. Euler** (1707-1783) del famoso problema de los siete puentes de Könisberg.

LUCES Y SOMBRAS

Los ejemplos anteriores, a los que podríamos añadir muchos otros, muestran lo que el Premio Nobel en Física **Eugene Wigner** llamó "la irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales". En sus propias palabras ([17])

> *El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos estar agradecidos por ello, con la esperanza de que de que continúe siendo válido en el futuro y que se extienda [...] a otras ramas del conocimiento.*

En el mismo sentido se expresa **N. Bourbaki** (pseudónimo de un grupo de matemáticos, en su mayoría franceses, de gran influencia en el desarrollo de la matemática moderna) (véase [2]):

> *Que existe una relación íntima entre los fenómenos experimentales y las estructuras matemáticas parece confirmarse plenamente de la forma más inesperada mediante los descubrimientos más recientes de la física contemporánea. Pero no sabemos absolutamente nada sobre los fundamentos de este hecho (suponiendo que se pudiera encontrar realmente significado a estas palabras) y tal vez no lleguemos a saber nunca sobre ello.*

En el carácter deductivo y (aparentemente) irrefutable de las Matemáticas es donde reside probablemente gran parte del éxito de las mismas como lenguaje universal de la Ciencia, primero en el campo de las ciencias físicas y, a partir de este siglo, en todos los ámbitos, incluidas las ciencias sociales, la lingüística, la biología, la medicina e incluso el arte. Y sin embargo esta idea de que las Matemáticas eran el reino de la verdad irrefutable y gozaban de unos cimientos sólidos e inamovibles, hace tiempo que ha sido abandonada por los mismos matemáticos, que han tenido que aprender a moverse dentro de límites bien precisos, y aceptar que el viejo sueño de alcanzar la infalibilidad y la certeza absoluta, es imposible. Aún en 1925 el gran matemático alemán David Hilbert expresaba en un famoso artículo:

D. Hilbert (1862-1943)

> *En cierto sentido, la matemática se ha convertido en una corte de arbitraje, un tribunal supremo para decidir cuestiones fundamentales sobre una base concreta aceptada por todos y donde cada afirmación sea controlable... Un ejemplo del tipo de cuestiones fundamentales que pueden ser tratadas de este modo es la tesis de que todo problema matemático es soluble. Todos nosotros estamos convencidos de que realmente es así... pues en matemática no hay ningún "ignorabimus".* (El subrayado es mío. Véase [10])[3]

En 1931, **K. Gödel** (1906-1978) acababa con la esperanza de Hilbert, probando que todos los esfuerzos para demostrar que la matemática está libre de contradicciones, están condenados al fracaso. De hecho, es imposible probar la *consistencia* (es decir, la ausencia de contradicciones) de cualquier sistema formal lo suficientemente amplio como para contener la aritmética. Más aún, cualquier sistema formal consistente y adecuado para la aritmética clásica es necesariamente *incompleto*, es decir, contiene afirmaciones legítimas del sistema que son indecidibles, esto es, ni su afirmación ni su negación son demostrables. Esto supone, por tanto, una limitación fundamental del método axiomático mismo que, desde su invención por los griegos, había sido considerado como la más potente herramienta descubierta para alcanzar la verdad.

La elección de diferentes sistemas de axiomas conduce a diferentes teorías matemáticas, a veces conteniendo resultados contradictorios entre sí. El caso de las geometrías no euclídeas, aparecidas en el siglo

[3] **Hilbert** se refiere a la afirmación de **Du Bois-Reymond** acerca de la limitación esencial de la razón para conocer la Naturaleza, resumida en su frase *Ignoramus et ignorabimus*.

XIX, es paradigmático, y la aceptación de que todas ellas son igualmente "verdaderas" (es decir, consistentes), supuso una de las más importantes crisis de fundamentos del siglo. También Gödel contribuyó decisivamente a clarificar esta idea de "verdad" dentro de un sistema axiomático, con sus resultados sobre la consistencia relativa de la teoría de conjuntos abstracta, creada a principios de este siglo con la idea de constituir una sólida fundamentación de toda la matemática. En 1904 **E. Zermelo** (1871-1956) formuló explícitamente el siguiente *axioma de elección*: Si $S=\{A,B,...\}$ es cualquier colección de conjuntos no vacíos, existe un conjunto Z que consta precisamente de un elemento de A, uno de B, etc. Con este axioma se pueden demostrar resultados realmente sorprendentes, a pesar de su aparente inocuidad. Por ello, pronto se puso en cuestión si los resultados obtenidos con este axioma tendrían la "misma validez" que los obtenidos sin él. En 1938, Gödel demostró que si la teoría de conjuntos habitual es consistente, también lo es si le añadimos el axioma de elección. En 1963 **P. Cohen** dio otra vuelta de tuerca a esta historia probando que, recíprocamente, la teoría de conjuntos usual sigue siendo consistente si le añadimos la *negación* del axioma de elección. De modo que este axioma es imposible de demostrar a partir de los restantes. El mismo Cohen expresó claramente la situación:

> *Las matemáticas se asemejan a un trabajo propio de Prometeo, lleno de vida, energía y maravilla, pero que sin embargo contiene la semilla de una duda insuperable. Es bueno que sólo de tarde en tarde nos paremos a revisar la situación y expresar nuestros pensamientos acerca de estas profundas cuestiones. Durante el resto de nuestras vidas matemáticas contemplaremos y quizá participaremos en la gloriosa procesión [...]*
>
> *Este es nuestro destino, vivir con dudas, perseguir absolutos de los que no estamos seguros y, en suma, darnos cuenta de que la única ciencia "verdadera" posee la misma naturaleza mortal, quizá empírica, que el resto de las actividades humanas* ([4])

CONCLUSIÓN

La mayor parte de nuestra exposición se ha referido a la interrelación entre matemáticas y física, como consecuencia de haber sido esta la conexión más clara. Pero es evidente que a lo largo de este siglo ha tenido lugar una matematización acelerada de muchas otras partes de la ciencia. Y no sólo porque se utilice la matemática para medir o describir fenómenos, sino como herramienta básica para su desarrollo. Como señala Solomon Bochner, abundando en la opinión ya citada de Yuri Manin al principio de mi intervención:

> *...Los intentos filosóficos para reducir el origen de toda la matemática a razones meramente utilitarias, son muy poco convincentes. Pero es cierto que las matemáticas son el lenguaje de la ciencia en un sentido profundo. Las matemáticas son el medio indispensable a través de cual la ciencia se expresa y se comunica consigo misma. Y así como el lenguaje no sólo expresa pensamientos... sino que también los crea, así sucede que las matemáticas no sólo especifican, clarifican y hacen manejables en forma rigurosa conceptos y leyes de la ciencia que quizá, parcialmente al menos, podrían desarrollarse sin ella; sino que, en ciertos instantes cruciales, es un constitutivo esencial para su aparición y creación.* ([1])

Como ejemplo, Bochner cita la fórmula de Newton para el movimiento de una partícula sobre una recta

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F$$

La masa m y la fuerza F son quizá objetos no matemáticos, pero la velocidad instantánea $v=dx/dt$ y la aceleración instantánea $a=dv/dt=dx^2/dt^2$ son entes puramente matemáticos, inconcebibles sin una teoría del cálculo infinitesimal...

Sería prolijo, y probablemente inútil, intentar siquiera una enumeración de las contribuciones de la matemática a las distintas áreas de conocimiento, pero podemos añadir algunos ejemplos a los ya citados: desde el uso del Análisis de Fourier por la Psicología de la percepción (como instrumento básico para modelizar la recepción e interpretación de imágenes a través de los sentidos), pasando por la creciente utilización de la Teoría de Grupos en Química, Cristalografía o la Física subatómica, la Teoría de Números en Criptografía o la utilización de los Sistemas Dinámicos, la Teoría del Caos y los Fractales en Medicina, Meteorología o Economía. Recordemos que varios Premios Nobel en Economía han sido otorgados a economistas con una fuerte formación matemática y por sus contribuciones a la Economía Matemática (**L. Kantorovich**, en 1975; **G. Debreu**, en 1983, por ejemplo). En este campo, como en muchos otros, se utilizan cada vez con mayor frecuencia técnicas y métodos matemáticos procedentes del área de la matemática más sofisticada.

Esta tendencia creciente a la matematización, ha originado también, como ocurrió en el siglo XVIII, necesidades matemáticas específicas, lo que Bochner llama "matemáticas-para-usos diversos", y que ciertamente ha contribuido a la aparición y desarrollo de nuevos métodos y teorías matemáticas. Ello ha producido, a su vez, a lo largo de este siglo, reavivamientos periódicos de la polémica entre "matemática aplicada" y "matemática pura". Esta polémica, iniciada a mediados del siglo XIX, cuando la Matemática obtuvo su *status* de Ciencia independiente, a mi entender, es en gran parte artificial y coyuntural, y se reabre cada cierto tiempo por razones que muchas veces son extrañas a la propia Comunidad Matemática.

Por otro lado, el enorme crecimiento de los conocimientos científicos y la progresiva fragmentación de la ciencia en campos más y más especializados, hace que esta dicotomía tenga cada vez menos sentido. Una gran parte de los matemáticos profesionales se mueven en parcelas de saber tan especializadas que sería difícil su adscripción directa a una de las dos categorías mencionadas. Más aún, probablemente a lo largo de su vida profesional, cambien más de una vez su adscripción formal a uno u otro campo. Lo que resulta cada vez más evidente es la necesidad de colaboración y trabajo en equipo entre los distintos especialistas, con el consiguiente efecto de permeabilidad e interconexión entre las especialidades, lo que contribuye a enriquecer y fortalecer la unidad última de las Matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

1. BOCHNER, S.: *The role of Mathematics in the rise of Sciencie.* Princeton, 1966. (Hay traducción en castellano: *El papel de la matemática en el desarrollo de la Ciencia*. Alianza Universidad Ciencia 689. Madrid, 1991.)

2. BOURBAKI, N.: *The Architecture of Mathematics.* American Math. Monthly, (1950), 221-232.

3. BROGLIE, L. DE: *El papel de las Matemáticas en el desarrollo de la física teórica contemporánea.* En "Las grandes corrientes del pensamiento matemático", F. Le Lionnais y Col. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 3a. Ed., 1976.

4. COHEN, P, J., *Comments on the foundation of set theory*, en "Axiomatic set theory", D. Scott (editor). Proc. Symp. Pure Math. , Part O, American Math. Soc., Providence, 1971.

5. COURANT, R., ROBBINS, H.: *What is Mathematics?* Oxford University Press, 14th Ed., 1969. (Traducción española: *¿Qué es la Matemática?*, Madrid, Aguilar.)

6. DAVIS, Ph. J., HERSH, R.: *Experiencia Matemática.* Ed. Labor, 1988.

7. FEYNMAN, R. F., *El carácter de la Ley Física.* Tusquets, Barcelona 2000.

8. GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.): *From the Calculus to Set Theory: 1630-1910.* Durckworth, London, 1980. (Hay traducción española en Alianza Ed., 1984).

9. HEATH, T.L.: *A history of Greek mathematics.* Vol. 1-2. Dover, New York, 1981

10. HILBERT, D.: *Über das Unendliche*. Mathematische Ann. **95** (1926), 161-190. .

11. JAMMER, M.: *The conceptual development of Quantum Mechanics.* en "The History of Modern Physics, 1800-1950" Vol. 12. American Inst. of Physics, 1989.

12. KLINE, M.: *Mathematics. The Loss of Certainty.* Oxford University Press, 1980.

13. KLINE, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern times.* Oxford Univ. Press, New York, 1972.

14. LAKATOS, I.: *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza Ed., Madrid, 1981.

15. MANIN, Yu. I.: *Mathematics as Profession and Vocation.* en "Mathematics: Frontiers and Perspectives", Amer. Math. Soc., 2000.

16. NEWMAN, J. R.: *Sigma, el mundo de las matemáticas.* Vols. I-VI. Ed. Grijalbo, Barcelona, 1969.

17. WIGNER, E.: *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* Commun. Appl. Math. (1960), 1-14.