Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 103, Nº. 2, pp 297-303, 2009
X Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

LA GEOMETRÍA DE LA REPRESENTACIÓN VISUAL

FERMANDO ETAYO GORDEJUELA *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid.

INTRODUCCIÓN

Con la expresión "representación visual", queremos indicar la plasmación en una superficie de la realidad tridimensional que percibimos visualmente. Esta plasmación se ha realizado a lo largo de la Historia de diversos modos: desde el dibujo y la pintura, hasta el diseño por ordenador, pasando por la cámara oscura, la fotografía y el cine. En todos los casos la realidad tridimensional es reducida a una imagen bidimensional.

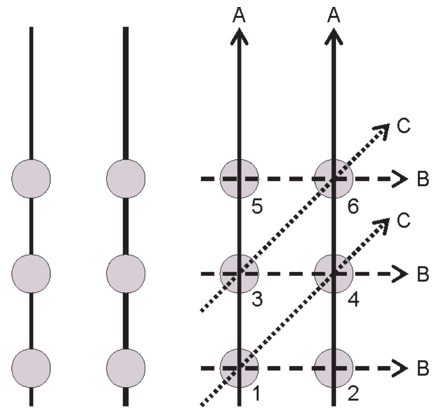
Existen dos modos básicos de hacer esa reducción: el primero es que se parezca a lo que nosotros vemos. De hecho nuestros ojos, y nuestro cerebro que interpreta lo que vemos, realizan esa correspondencia entre la realidad tridimensional y su imagen bidimensional. El segundo procedimiento consiste en que lo que plasmemos en dos dimensiones tenga unas claves que nos permitan reconstruir la realidad tridimensional. Esta es la idea de los distintos tipos de mapas y de la Geometría Descriptiva en general. En este pequeño trabajo vamos a centrar nuestra atención en la primera cuestión: cómo hacer que un dibujo sea realista. Para ello deberemos analizar, en primer lugar, cómo vemos. Como mostraremos, existe una diferencia esencial entre la visión con un ojo y la visión con dos. Pero no nos adelantemos.

Comenzaremos describiendo lo que percibimos con uno y con dos ojos, repasaremos muy brevemente la perspectiva en el Arte y pasaremos a los modelos matemáticos subyacentes: las geometrías proyectiva y epipolar. Como veremos ésta última está muy relacionada con la reconstrucción de imágenes, que es la labor que nuestro cerebro realiza con la información que le proporcionan los dos ojos. Y, desde el punto de vista técnico, es la labor de la fotogrametría y de las técnicas de visión por ordenador.

1. CÓMO VEMOS: CON UN OJO. VISIÓN CICLÓPEA

La visión con un ojo solo, la realización de un cuadro o la de una fotografía tienen el mismo modelo geométrico: cada punto del espacio tridimensional se proyecta desde un punto (la pupila, el objetivo de la cámara) sobre una superficie (la retina, el lienzo sobre el que pintemos, la película en el caso de la cámara fotográfica). Vamos a denominar a esta aplicación visión ciclópea, pues, como veremos más adelante, el tener dos puntos de vista proporciona información esencialmente diferente. Ahora vamos a enunciar algunas de las propiedades geométricas elementales y conocidas de la visión, dejando para más adelante la construcción del modelo matemático subyacente.

Para entender las leyes de nuestra visión (las que denominamos coloquialmente leyes de la perspectiva) pensemos en la siguiente situación: un pintor quiere plasmar en un cuadro una carretera flanqueada de árboles, situados los de una orilla enfrente de los de la otra, y a igual distancia. En la siguiente ilustración se recogen el plano y el cuadro realizado. Las líneas paralelas las vemos fugar (unirse) en el horizonte del cuadro.

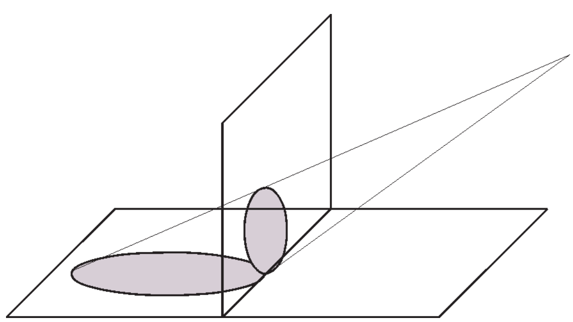


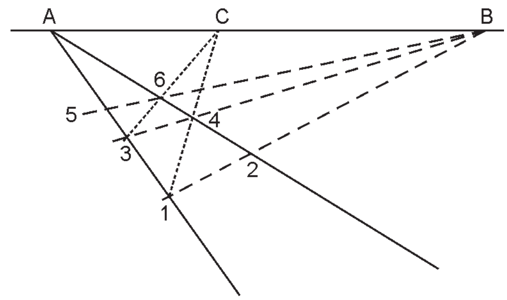
Varias cosas son evidentes:

- Vemos las rectas como rectas.
- No sabemos calcular distancias.
- No vemos conservarse los ángulos.

Pero la visión no es azarosa y sabemos reconocer cuándo un dibujo tiene la perspectiva correcta. Otro ejemplo que podemos considerar es el siguiente: cuando observamos el firmamento, para lo que tener uno o dos ojos es indiferente, podemos saber la dirección de las estrellas, pero no la distancia a que se encuentran. Un fenómeno similar se da en la llamada anamorfosis de perspectiva: si pintamos una figura en el suelo puede hacernos el mismo efecto que si la tuviéramos levantada en un plano perpendicular.

En la Historia del Arte esta propiedad de la anamorfosis de perspectiva ha sido muy utilizada, desde "Los embajadores" de Holbein hasta las pinturas en el suelo de Julian Beever. También así se han podido realizar muchos trucos cinematográficos, aprovechando que nuestra vista no sabe calcular distancias ni tamaños (por ejemplo, los del recientemente fallecido especialista español Emilio Ruiz del Río).



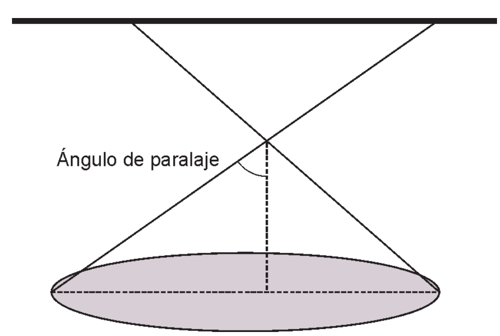


2. CÓMO VEMOS: CON DOS OJOS. VISIÓN ESTEREOSCÓPICA

La visión con dos ojos o estereoscópica permite medir profundidades si el objeto de nuestra atención está suficientemente cerca. Porque cada uno de los ojos toma una imagen del objeto y nuestro cerebro las procesa, obteniendo una única imagen a partir de las dos.

Este fenómeno es bien conocido en Astronomía: cuando se observa la posición de una estrella cercana en un momento dado y seis meses más tarde, esto es, cuando la Tierra ha recorrido la mitad de su órbita alrededor del Sol, la posición de la estrella ha variado. Se llama ángulo de paralaje anual a la mitad del ángulo que forman las dos trayectorias de la estrella.

Un fenómeno parecido es el de los anaglifos: Son imágenes que provocan un sensación de efecto tridimensional. Requieren, para verse, el empleo de las gafas 3D. La idea es casi superponer dos imágenes, pero de modo que cada ojo vea sólo una de ellas. Para ello se tinta cada imagen en rojo o en azul y usando las gafas (en las que cada lente tiene filtro de un color)



cada ojo ve sólo una imagen. Entonces se tiene sensación de visión binocular (cada ojo percibe dos imágenes un poco desplazadas entre sí) y el cerebro reconstruye la imagen tridimensional.

En resumen, tenemos las siguientes propiedades y problemas planteados.

- La visión ciclópea permite pasar de 3D a 2D.
- La visión estereoscópica permite reconstruir, es decir, pasar de 2D a 3D a partir de dos imágenes.
- Problema 1: ¿qué tipo de aplicación es la que pasa de 3D a 2D en visión ciclópea?
- Problema 2: ¿por qué a partir de dos imágenes planas podemos reconstruir imágenes 3D?

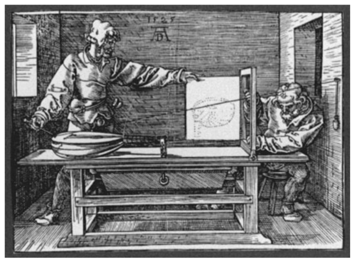
3. LA PERSPECTIVA EN EL ARTE

El problema de "representar fielmente" la realidad en una pintura es anterior al de la obtención del modelo matemático subyacente. Abreviando los antecedentes más o menos experimentales (por ejemplo Giotto ,1267-1337, ya realiza fugas, aunque le falta consistencia) se puede decir que Alberti (1404-1472) en su tratado sobre la Pintura de 1435 formula las preguntas precisas:

- *¿Qué se conserva por proyección, si no lo hacen ni la longitud ni los ángulos?*
- *¿Qué relación hay entre dos secciones de la misma figura?*
- *¿Cuáles son las propiedades comunes a dos secciones cualesquiera?*

Estas preguntas son de naturaleza plenamente matemática, y tenían una motivación real muy clara. Poco tiempo después, Bruneleschi (1377-1446) enuncia los llamados "experimentos" que dan apoyo teórico a lo que se estaba consiguiendo ya dibujar con corrección. El primer experimento se pregunta cómo se puede saber si un cuadro tiene buena perspectiva. La respuesta es si lo retratado en el cuadro se puede prolongar fuera de éste coincidiendo con lo que se ve en la realidad (la manera de exponerlo era más complejo, usando un espejo. Una idea parecida se puede ver en varios cuadros de Magritte (1898-1967), en los que aparece una pintura y su prolongación en la realidad circundante fuera de la pintura). El segundo experimento trata sobre cómo se puede representar a la vez dos fachadas del palacio de la señoría de Florencia. La respuesta es que fugando a dos puntos, que determinan la línea del horizonte (o del infinito, diremos luego) del cuadro.

En Durero (1471-1528) encontramos deliciosas ilustraciones de los principios de la perspectiva.



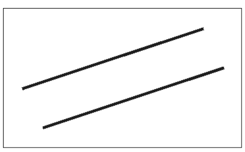
Leonardo da Vinci (1452-1519) amplia la variedad de recursos para dar profundidad a un cuadro, al introducir la denominada perspectiva aérea, mediante las siguientes técnicas: "Sfumatto", esto es, desvanecimiento del detalle; colores en el fondo azulados, semejantes a los de la atmósfera: y disminución del volumen de los objetos del fondo. Pero con ello trascendemos de nuestra búsqueda de la geometría que liga los objetos del espacio tridimensional con su proyección sobre un plano.

4. EXPLICACIÓN MATEMÁTICA DE LA VISIÓN CICLÓPEA: GEOMETRÍA PROYECTIVA

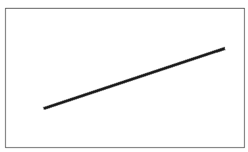
El espacio proyectivo se obtiene añadiendo al espacio afín (de puntos ordinarios) los puntos del infinito (los puntos impropios), que forman un hiperplano. Así el plano proyectivo es la unión del plano afín y la recta del infinito (donde se "cortan las paralelas"). La recta proyectiva es la recta afín con el punto del infinito. Y el espacio proyectivo tridimensional se obtiene añadiendo al afín el plano de infinito.

Esta definición del espacio proyectivo a partir del afín tiene un inconveniente: la distinta naturaleza aparente de los puntos ordinarios y de los del infinito. Sin embargo, esa diferencia es aparente y no real, como se pone de manifiesto con la siguiente construcción, que, por sencillez, realizamos para dimensión dos:

1. Un plano afín tiene asociado siempre un espacio vectorial (dos puntos determinan el vector que los une). A cada recta afín se le asocia su dirección, que es una recta vectorial. Dos rectas afines son paralelas si y sólo si tienen la misma dirección.

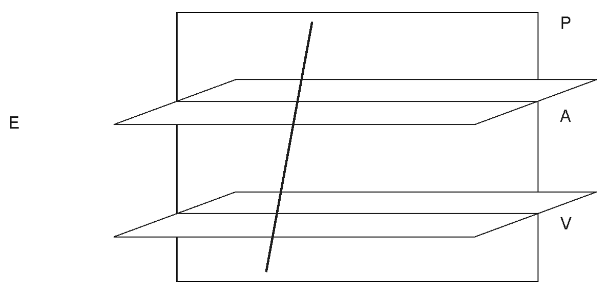


Plano afín A con dos rectas paralelas



Plano vectorial V asociado. Las paralelas tienen la misma dirección.

2. El plano afín y su plano vectorial asociado se pueden sumergir en un espacio vectorial E de dimensión tres (el plano vectorial como subespacio vectorial)



3. Cada recta vectorial del espacio ambiente E corta al plano afín A en un único punto o está contenida en V. Se llama punto proyectivo a cada recta vectorial de E. Las rectas contenidas en el plano vectorial V se denominan puntos del infinito.

4. Un subespacio proyectivo de dimensión k es el conjunto de rectas vectoriales de un subespacio vectorial de dimensión $k+1$. En particular, las rectas contenidas en un plano P forman una recta proyectiva, que tiene como puntos afines los de $P \cap A$ y como punto del infinito $P \cap V$. Cada recta afín con su punto del infinito (que es su dirección) define una recta proyectiva. Dos rectas afines son paralelas si y sólo si tienen la misma dirección, esto es, el mismo punto del infinito.

Este modelo del espacio proyectivo no es tan extraño a la intuición como pudiera parecer. De hecho, cuando observamos la bóveda celeste, por cada dirección vemos sólo un punto, ocupado o no por una estrella, de la que, en todo caso, nos resulta imposible saber la distancia a la que está. La gran ventaja que tiene el modelo es que se pueden utilizar todas las propiedades del Álgebra Lineal. En particular, para dar coordenadas se pueden utilizar las llamadas coordenadas homogéneas: un punto proyectivo es una recta vectorial de un espacio vectorial de una dimensión mayor, o, lo que es lo mismo, una clase de equivalencia de vectores respecto de la relación siguiente: dos vectores no nulos son equivalentes si y sólo si son proporcionales (esto es, si definen la misma recta vectorial). Por tanto, las coordenadas de un punto proyectivo son las de uno cualquiera de los vectores que lo genera. Así en un plano proyectivo un punto tendrá tres coordenadas (a:b:c) homogéneas, esto es, $(a{:}b{:}c) = (\lambda a{:}\lambda b{:}\lambda c)$ cualquiera que sea la constante λ no nula.

Desde el punto de vista de la Geometría y la Topología superiores el espacio proyectivo es muy rico en propiedades: El espacio proyectivo real es una variedad diferenciable, compacta, conexa, orientable si es de dimensión impar y no orientable si es de dimensión par. Tiene curvatura seccional constante y a la esfera como su recubridor universal de dos hojas. El espacio proyectivo complejo es una variedad de Kähler de curvatura holomórfica constante. La recta proyectiva compleja se identifica con la esfera de Riemann y las transformaciones de Möbius son homografías. Se define el fibrado principal de variedad total S^{2n+1} sobre $P_n(C)$ de fibra la circunferencia.

Pero sigamos con lo que concierne a la representación visual. La visión ciclópea es una aplicación proyectiva, llamada proyección cónica (no es apli-

Geometría	Aplicaciones propias	Propiedades (invariantes de la geometría)	Objetos preservados
Euclidea	Movimientos = rotaciones + traslaciones	Distancias	
Métrica o Equiforme	Semejanzas = movimientos + homotecias	Ángulos	Las aplicaciones conformes son aplicaciones proyectivas que preservan la cuádrica del absoluto.
Afin	Aplicaciones afines	Paralelismo, razón simple, baricentros	Las aplicaciones afines son aplicaciones proyectivas que preservan el hiperplano del infinito.
Proyectiva	Aplicaciones proyectivas	Razón doble	

cación afín ni vectorial), y, por tanto, las propiedades que conserva son las que conservan las aplicaciones proyectivas. En particular, la alineación de puntos y las razones dobles.

Existe otra propiedad muy importante en Geometría Proyectiva: la Geometría Proyectiva comprende a la Afín, ésta a la Conforme y ésta a la Euclídea. Esta cadena de contenidos se conoce como Estratificación de las Geometrías. En la tabla precedente describimos la situación, en que cada geometría está comprendida en la inferior.

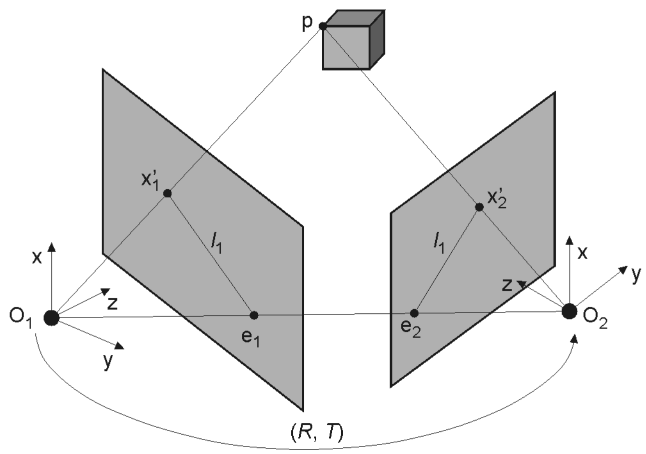
Esta relación de contenidos fue establecida en el siglo XIX, junto con más propiedades. Por ejemplo, Laguerre estableció en 1853 la fórmula que lleva su nombre y que permite hallar el ángulo de dos rectas como (1/2i) veces el logaritmo neperiano de la razón doble de sus puntos del infinito y de los cíclicos (éstos puntos forman la cónica del absoluto, están en el infinito del plano proyectivo complejo y cualquier circunferencia pasa por ellos). Este tipo de relaciones tiene un gran valor estético, porque permite reconstruir propiedades de las Geometrías Afín y Métrica a partir de las de la Proyectiva. Pero, he aquí lo sorprendente de nuestra historia, son también propiedades esenciales para la reconstrucción de imágenes por ordenador, dando una vez más ejemplo de cómo los conocimientos teóricos pueden resultar fundamentales para aplicaciones imposibles de soñar en la época en que se formularon.

5. EXPLICACIÓN MATEMÁTICA DE LA VISIÓN ESTEREOSCÓPICA: GEOMETRÍA EPIPOLAR

La fotogrametría, que comenzó a mediados del siglo XIX, y la visión por computador, de segunda mitad del XX, tienen un planteamiento común entre sí y común con nuestra visión binocular: a partir de dos imágenes diferentes de un mismo objeto ser capaces de reconstruir las verdaderas proporciones del objeto. Una imagen se obtiene realizando una proyección cónica, que es una aplicación proyectiva y, por tal, conserva alineaciones y razones dobles, pero no razones simples, ni ángulos, ni distancias. ¿Cómo, pues, a partir de dos imágenes se va a poder reconstruir las proporciones de un objeto, esto es, los ángulos y el tamaño relativo de sus lados? Conocer el tamaño absoluto no es sino fijar una unidad de medida (o dar un testigo en la imagen, como se hace en las fotos de excavaciones arqueológicas).

La parte de la Geometría Proyectiva que estudia esta cuestión es la llamada Geometría Epipolar. La disposición que tenemos es la siguiente: supongamos que tomamos dos fotos de un mismo objeto. Cada punto p del objeto tendrá dos imágenes, una en cada foto.

Si supiéramos la matriz del movimiento (R,T), rotación y traslación, que lleva una cámara en la otra, podríamos determinar las verdaderas proporciones del objeto. Pero la situación que tenemos es otra: cono-



- Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las cámaras.
- Los puntos x'_1 y x'_2 son las proyecciones del punto p sobre los planos imágenes.
- Los puntos e_1 y e_2 son los epipolos: dónde ve cada cámara a la otra.
- El plano determinado por O_1, O_2 y p se llama epipolar.
- Las rectas l_1 y l_2 son las rectas epipolares, que se definen como la intersección del plano epipolar con los planos imágenes. Pasan por los epipolos.

cemos las dos imágenes de cada punto de nuestro objeto. Calculemos la matriz de la aplicación que hace corresponder a cada punto del primer plano imagen la línea correspondiente del segundo, esto es, en nuestro caso, al punto x'_1 le hace corresponder la línea l_2. Esta aplicación es una correlación proyectiva degenerada. Su matriz F se llama matriz fundamental (esencial cuando las cámaras están calibradas, esto es, cuando se conocen su parámetros internos) y verifica la restricción epipolar: $(x_1')^t\, F\, x_2' = 0$, donde x'_1 y x'_2 denotan las coordenadas en columna de los puntos x'_1 y x'_2, y t la matriz transpuesta. Esta condición se deriva de que la recta epipolar l_2 pasa por el punto x'_2.

Hacen falta conocer ocho puntos, porque lo que se quiere obtener es la matriz fundamental, que es una matriz homogénea 3 por 3 (es una correlación proyectiva). Por tanto, se trata de poner un sistema con ocho ecuaciones del tipo $(x_1')^t\, F\, x_2' = 0$. Este procedimiento se denomina algoritmo de los ocho puntos. Así que hacen falta conocer al menos las imágenes de ocho puntos en ambos fotos. Hay que emparejar puntos de una y otra imagen. Esto se hacía al principio de la fotogrametría por medios mecánicos y después por procedimientos informáticos de *matching*.

El resultado importante es que conociendo la matriz fundamental podemos calcular las matrices del movimiento que lleva una cámara en otra, R y T. De hecho, existen sólo cuatro posibles pares de matrices (R,T) que den lugar a la misma matriz fundamental, pero sólo en un caso los puntos tendrán todos profundidad positiva respecto de ambas cámaras (esto es, se verán sus imágenes realmente, no quedarán los puntos del objeto detrás de la cámara) Este resultado había sido anticipado por el Teorema de Kruppa (1913), que establece que dadas las imágenes de cinco puntos (en posición general) mediante dos proyecciones cónicas, existen como mucho once posiciones posibles para los centros de las proyecciones.

Las cámaras se dicen calibradas si se conocen sus parámetros internos (como la distancia focal). La reconstrucción de imágenes tiene las siguientes propiedades:

1. Con cámaras sin calibrar sólo se puede reconstrucción proyectiva.
2. Con cámaras calibradas se puede hacer reconstrucción euclídea.
3. Dar la calibración de las cámaras equivale a determinan el plano del infinito y la cónica del absoluto.
4. Con cámaras sin calibrar, si conocemos la cónica del absoluto (y el plano del infinito) podemos hacer reconstrucción euclídea (y calibrar las cámaras).
5. Si conocemos el tipo de movimiento (por ejemplo, que sea traslación), podemos determinar fácilmente la cónica del absoluto.

En el caso general en que las cámaras no estén calibradas, para obtener la reconstrucción euclídea hay que determinar el hiperplano del infinito (lo que da la reconstrucción afín) y la cónica del absoluto (que permite la reconstrucción equiforme) de acuerdo con la estratificación de las geometrías establecida en el siglo XIX y comentada en la sección anterior.

En esta historia no debemos olvidar al coronel de ingenieros francés Aime Laussedat, quien, en 1858, empieza a dibujar mapas cartográficos a partir de vistas, manuales primero, fotográficas después, dando origen a la fotogrametría. En 1863 la Real Academia de Ciencias de Madrid convocaba un concurso para: "Determinar los errores probables que deben resultar en los planos topográficos deducidos de dos perspectivas fotográficas, teniendo en cuenta todas las causadas que pueden influir en su producción". Ganó Laussedat con la memoria "Sobre la aplicación de la fotografía al levantamiento de planos".

COMENTARIOS FINALES

En esta exposición hemos trazado un simple bosquejo sobre los fundamentos matemáticos de la representación visual. Algunas consideraciones que parece oportuno recoger en el momento final son las siguientes:

Las mismas nociones básicas son comunes a diversas disciplinas.

La Ciencia, y en particular la Matemática, se desarrolla en relación al mundo circundante. En lo que acabamos de exponer, baste considerar la búsqueda del modelo matemático subyacente a la visión, a la perspectiva en el arte, a la reconstrucción de imágenes por ordenador.

De modo recíproco, avances de Matemática Pura resultan esenciales en aplicaciones muy posteriores. Por ejemplo, la estratificación de las geometrías.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Agrupamos las referencias según su carácter.

Geometría y Arte:

1. Julian Lowell Coolidge: *A History of Geometrical Methods*, Dover, N. York, 2003
2. Hubert Damisch: *El origen de la perspectiva* . Alianza Ed. , Madrid, 1997.
3. W. M. Ivins, Jr.: *Art and Geometry. A study in space intuitions.*. Dover, N. York, 1964.
4. Marin Kemp: *La ciencia del arte. La óptica en el arte occidental de Brunelleschi a Seurat.* Ed. Akal, Madrid, 2000.
5. Dan Pedoe: *La Geometría del Arte*. Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1979.
6. Leonardo da Vinci: *Tratado de la Pintura*. Ed. Akal, Madrid, 2007.
7. Heinrich Wölfflin: *Conceptos fundamentales de la Historia del Arte.* Ed. Optima, Barcelona, 2002.
8. Susana Woodford: *Cómo mirar un cuadro*. Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 2004.

Geometría proyectiva:

9. Brannan, David A. ; Esplen, Matthew F. ; Gray, Jeremy J.: *Geometry*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
10. Coxeter, H. S. M.: *Fundamentos de Geometría*, Limusa, 1988.
11. Frenkel, J.: *Géométrie pour l'élève-professeur*. Hermann, 1973.
12. J.M. Rodríguez Sanjurjo, J.M. Ruiz Sancho: *Geometría Proyectiva*. Addison-Wesley, 1998.
13. L.A. Santaló: *Geometría proyectiva* E.U.D.E.B.A. 1966.

Geometría de la visión por computador:

14. R. I. Hartley, A. Zisserman: *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambrdige University Press, 2004.
15. Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecká, S. Shankar Sastry: *An Invitation to 3-D Vision.* Springer, New York, 2004.
16. I. Herman: *The Use of Projective Geometry in Computer Graphics*. Springer, Berlín, 1992.