Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 104, Nº. 1, pp 97-105, 2010
XI Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

MATEMÁTICAS Y REALIDAD. GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS Y UNIVERSO

FERMANDO ETAYO GORDEJUELA *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid.

... hay matemáticos y filósofos... que dudan si todo el Universo o, para decirlo de manera más amplia, toda existencia, fue creada solo de acuerdo con la geometría euclídea, e incluso se atreven a soñar que dos rectas paralelas que, de acuerdo con Euclides nunca se pueden cortar en la Tierra, quizás puedan hacerlo en el infinito.

F.M. Dostoyevski (1821-1881), en *Los hermanos Karamazov*.

INTRODUCCIÓN

El tema objeto de este escrito es de una profundidad y una complejidad tales que es ingenuo pretender poder dar idea del mismo en unas pocas páginas. Así que lo que haré será dar un ejemplo significativo respecto del problema, con la esperanza de que el lector se pueda sentir atraído por la cuestión y pueda profundizar en ella de manos mucho más expertas que las mías. El ejemplo que he escogido ha tenido además una importancia capital en la historia de las Matemáticas y de la Filosofía de dicha disciplina.

Para empezar a referirnos a la relación entre las Matemáticas y la Realidad circundante, citemos el siguiente ejemplo elemental. Un planeta *se descubre*, un teléfono móvil *se inventa*, el teorema de Pitágoras, ¿se *inventa* o se *descubre*? La cuestión no es evidente.

Las Matemáticas son una disciplina singular, que combina la especulación con la aplicación. Las Matemáticas se relacionan con el mundo de dos modos:

Unas veces, el mundo circundante (físico, económico, de cualquier disciplina científica) propone problemas y las Matemáticas obtienen el modelo que describe el comportamiento del fenómeno que se trate. Por ejemplo, ante el problema de cómo representar fielmente en un cuadro el espacio que rodea al pintor, nació la Geometría Proyectiva, que da el modelo matemático de la perspectiva. Naturalmente, aquí es clara la relación entre Realidad y Matemáticas, puesto que éstas se usan para obtener el modelo matemático de la correspondiente situación del mundo.

Otras veces las Matemáticas plantean sus propios problemas, avanzan en sus soluciones y, al cabo de años e incluso siglos, resulta que esas nociones matemáticas son las que sirven para describir fenómenos del mundo. Esta adecuación entre Matemáticas y Realidad es sumamente sorprendente y ha sido objeto de estudio (y de fascinación) de numerosos autores. ¿Por qué las Matemáticas concuerdan con el mundo real? Un ejemplo es el de las geometrías no euclídeas. Nacieron como un problema puramente matemático, que fue desenvolviéndose en un ambiente puramente matemático durante veinte siglos. En el XIX se resolvió, y la resolución condujo a otras teorías matemáticas, que fueron imprescindibles para la Cosmología Moderna, la de la Teoría de la Relatividad.

Vamos a hacer énfasis en el segundo sentido de relación entre Matemáticas y Realidad. Sin embargo, comenzaremos por el primero, desarrollando un poco las ideas básicas de la Geometría Proyectiva. Porque a lo largo de estas páginas vamos a mostrar que estas tres cosas que ahora cito están relacionadas:

1. La representación de objetos en perspectiva.
2. La existencia de una única paralela por un punto exterior a una recta.
3. La forma del Universo.

UN MODELO MATEMÁTICO: LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

La Geometría Proyectiva es un modelo matemático que nació para explicar las leyes de la perspectiva. En 1435, el arquitecto y pintor florentino Alberti se preguntaba qué se conserva por proyección, si no lo hacen ni la longitud ni los ángulos? Las leyes de la perspectiva fueron descritas en años posteriores con precisión, aunque el enfoque del tema ha variado con los siglos desde el ámbito de la Geometría Descriptiva hasta expresiones matemáticas más abstractas. No es este el momento de dar una descripción más detallada, que ya ha sido objeto de este ciclo en el curso precedente [E].

Sin embargo sí quiero destacar tres ideas claves acerca de la evolución histórica de la Geometría Proyectiva.

Nació para modelar la perspectiva cónica o lineal, y se enmarcó dentro de la Geometría Descriptiva, que estudia los diferentes sistemas de representación. Sin embargo, ya en sus inicios, por obra de Desargues y Pascal, se obtuvieron interesantes propiedades proyectivas del plano y el espacio. La diferencia esencial entre la Geometría Proyectiva y los restantes sistemas de representación es la del espacio matemático en que se desarrolla: el espacio proyectivo se obtiene añadiendo al ordinario los puntos impropios o del infinito. Así, para entender la geometría de nuestra visión ocular debemos construirán modelo matemático en que además de los puntos ordinarios estén los del infinito Nuestra experiencia nos lo dice bien claro: cuando miramos las vías paralelas de un tren las vemos converger en un punto, que no es un punto propio porque no lo podemos alcanzar si viajamos en el tren. En los demás sistemas de representación (axonométrico, isométrico, caballera, etc.) las paralelas se representan como paralelas.

A partir del siglo XIX, siglo de oro de la Geometría Proyectiva, se estudian otros modos de definir el espacio proyectivo (como cociente de un espacio vectorial, como cociente de una esfera, etc.), se estudian en todas las dimensiones (no sólo hasta la tercera), se utilizan otros cuerpos de escalares (además del real, los complejos, los cuaterniones, los de característica prima). Digamos, de un modo simplista, que ha pasado a ser un objeto de las Matemáticas "puras" y se estudia desde sus diferentes ramas: Geometría, Álgebra, Topología, Variable Compleja, etc Así, el espacio proyectivo real es una variedad diferenciable, compacta, conexa, orientable si es de dimensión impar y no orientable si es de dimensión par. Tiene curvatura seccional constante y la esfera es recubridor de dos hojas El espacio proyectivo complejo es una variedad de Kähler de curvatura holomórfica cons-tante. La recta proyectiva compleja se identifica con la esfera de Riemann y las transformaciones de Möbius son homografías. Se define el fibrado principal de variedad total la esfera $(2n+1)$-dimensional sobre el espacio Pn (C) de fibra la circunferencia. Y podríamos continuar citando propiedades.

¿Qué ha quedado del modelo matemático que habíamos creado para explicar la perspectiva cónica? ¿Hemos llegado los matemáticos y lo hemos convertido en una maraña indescifrable? No. El modelo sigue funcionando. Pero es que además ha engendrado un ente matemático de gran trascendencia en las propias Matemáticas.

La tercera consideración que quiero hacer es el de las ulteriores aplicaciones de la Geometría Proyectiva. Resultados teóricos del siglo XIX, como la estratificación de las geometrías, han resultado esenciales para la resolución de imágenes en Fotogrametría y en Visión por Computador. Es decir, cerramos el círculo: la Realidad nos movió a crear el modelo matemático y creado éste lo podemos aplicar a resolver problemas en los que no soñábamos. Evidentemente, en el XIX no pensaban en la Visión por Computador.

Este paseo por la Geometría Proyectiva nos va bien para nuestro propósito de estudiar la relación entre Matemáticas y Realidad y nos servirá para lo que sigue, porque nos volveremos a topar con la Geometría Proyectiva.

UN PROBLEMA MATEMÁTICO: LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

Para entender el problema debemos remontarnos al siglo tercero antes de Cristo, a "Los Elementos" de Euclides. No es lugar de describir la importancia de esta obra, capital en la historia de las Matemáticas. Del método científico se dice que nació en el siglo XVI y que es una de las mayores aportaciones de Occidente a la Cultura de la Humanidad. Del "método matemático" podemos decir que ya estaba perfectamente establecido casi veinte siglos antes. Este "método matemático" consta de tres ingredientes, que vamos a describir para el caso de la geometría:

Los objetos geométricos: puntos, rectas, planos, circunferencias, ángulos, etc.

Los postulados son relaciones dadas entre esos elementos.

Los teoremas son relaciones que se demuestran a partir de los postulados

Para entender mejor lo que significa esto tomamos como ejemplo el ajedrez. En este caso tendríamos.

Objetos: peones, alfiles, caballos, torres, rey y reina

Postulados: los movimientos, el enroque, las reglas del juego.

Teorema: "en las condiciones actuales te doy mate en tres jugadas"

En el caso de la Geometría del plano, Euclides enunció cinco postulados (que transcribimos en un lenguaje más actual).

Postulado 1. Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.

Postulado 2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado.

Postulado 3. Hay una sola circunferencia con un centro y un radio dados.

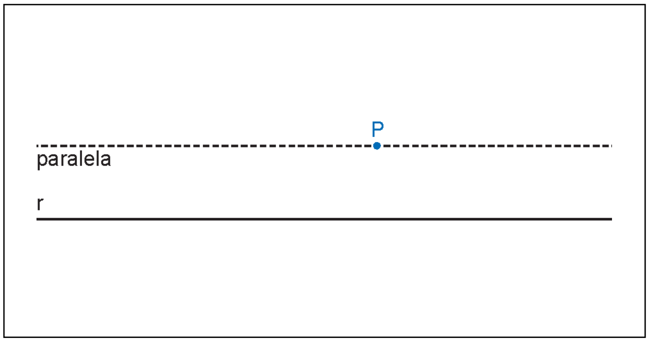

Figura 1. Postulado 5.

Postulado 4. Todos los ángulos rectos son iguales.

Postulado 5. Por un punto exterior a una recta sólo pasa una recta que no corte a la dada. Este Postulado recibe también el nombre de axioma de las paralelas (ver **figura 1**).

Ya casi desde tiempos de Euclides se suscitó la cuestión de si el quinto postulado era realmente un postulado o de si era un teorema. Es decir, si era independiente de los otros postulados o si se podía deducir de ellos. Ésta es una cuestión puramente estética, porque el dilucidarla de entrada sólo sirve para abreviar o no la lista de postulados. Contestando a una pregunta tantas veces formulada por los estudiantes y, desgraciadamente, por muchas personas ajenas al sistema educativo pero con responsabilidades sobre él, ¿para qué sirve resolver esta cuestión? Pues no sirve para nada. Pero en ese *no servir para nada* los matemáticos han empleado más de veinte siglos, ocupando el tiempo de muchas mentes maravillosas, y la respuesta dada, a la postre, ha servido para muchísimo, como veremos más adelante.

¿Cómo se puede responder la cuestión? Si probamos que se puede deducir de los otros cuatro postulados, habremos probado que es un teorema. Este es el modo de razonar que se ha tenido durante siglos, tratando de demostrar que se podía deducir de los otros postulados. ¿Y si no lo logramos probar? Bueno, no adelantemos acontecimientos y sigamos poco a poco.

Para demostrar que es un teorema hemos de probar que se deduce de los otros postulados, empleando sólo los objetos geométricos y los postulados o teoremas que ya estén establecidos.

Un detalle esencial, pero que se pasó mucho tiempo por alto es el siguiente. Cuando definimos de modo axiomático una teoría, como hemos hecho con la Geometría, los nombres de los objetos responden a las ideas que tenemos de ellos, pero son irrelevantes a la hora de demostrar los resultados. Vayamos al ejemplo del ajedrez, para ver esto más claramente. Si al caballo lo pasamos a llamar patata, pero sigue avanzando dos cuadros en un sentido y uno en el otro, el juego al que jugamos sigue siendo el ajedrez. De hecho, no nos importaría el nombre que tuviera la ficha (y que difiere de un idioma a otro). Lo único que nos importa es las propiedades que tiene. Del mismo modo, si en la geometría, cambiamos punto y recta por cualesquiera otros nombres, seguimos "jugando al mismo juego" con tal de que mantengan sus propiedades.

La línea más sólida de intentar demostrar que el quinto postulado era un teorema fue por reducción al absurdo: suponer que no se verifica (que por un punto exterior a una recta no pasa una única recta que no corta a la dada) y llegar a una contradicción. Demostraciones por reducción al absurdo eran bien conocidas. Para empezar, en los propios Elementos de Euclides está básicamente realizada así la de la infinitud de los números primos.

El quinto postulado establece una condición doble: "existe una única recta". Hay dos maneras de negar una afirmación de este tipo:

1. *Por un punto exterior no se puede trazar ninguna recta que no corte a la dada.*
2. *Por un punto exterior se puede trazar más de una recta que no corte a la dada.*

Nos adelantamos diciendo que Euclides tenía razón: el quinto postulado es un postulado y no un teorema. La geometría que verifica los cuatro primeros postulados más la no existencia de ninguna paralela se llama elíptica. La que verifica los cuatro primero más la existencia de al menos dos paralelas se llama hiperbólica.

La Humanidad tuvo durante siglos un ejemplo a mano: la geometría de la esfera. En la geometría esférica no hay paralelas, llamando rectas a los círculos máximos (aunque no verifica el primer postulado: por puntos antipodales pasa más de un círculo máximo) (ver **figura 2**).

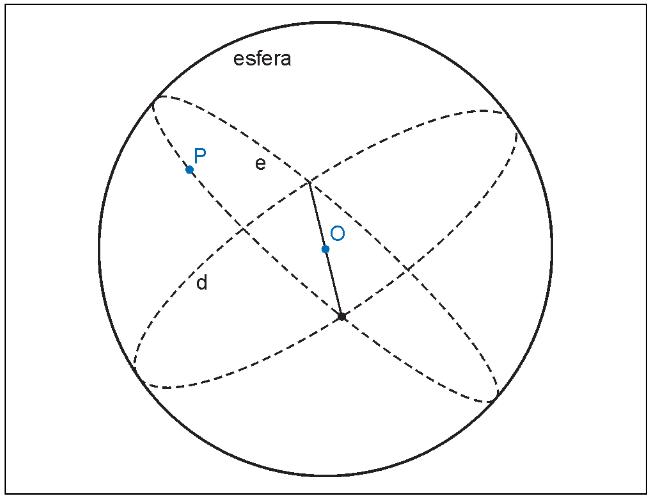

Figura 2. Geometría de la esfera.

El plano proyectivo sí tiene geometría elíptica (pues los puntos antipodales dan lugar a un único punto proyectivo, al considerar el plano proyectivo como cociente de la esfera).

Como hemos mencionado, a lo largo de la historia, hubo muchos intentos de demostración del quinto postulado Saccheri (1733) lo intentó por reducción al absurdo ("supongamos que hay más de dos paralelas"), pero no llegó a contradicción. Lobachevski, Gauss y los Bolyai, padre e hijo, (1820-1830) obtuvieron las propiedades fundamentales de una geometría que no verificara el quinto postulado (geometría hiperbólica). Pero dejemos aquí este problema, puramente matemático, más aún, puramente estético dentro de las Matemáticas, y comentemos otro que se desarrolló en paralelo, sin ninguna relación aparente.

UN PROBLEMA FÍSICO: LA FORMA DEL UNIVERSO

Ya en la antigüedad se realizaron importantes medidas cosmológicas. Así se atribuye a Aristarco de Samos (320-250 a.C.) la medición de tamaños y distancias relativas del Sol y la Luna, en función del radio terrestre y a Eratóstenes (~273-194 a.C) la del radio terrestre. Básicamente se concibe el Universo con modelo geocéntrico y movimientos circulares, cada vez más complejos para adaptarse a la observación experimental. Además se supone que es finito, con borde, y de tamaño fijo.

Entre los siglos XV y XIX la Astronomía y la Cosmología avanzan espectacularmente. Por citar sólo algunos hitos: A Galileo (1564-1642) se le debe el inicio de la observación astronómica moderna, utilizando el telescopio. Descubre cuatro satélites de Júpiter. Kepler (1571-1630) enuncia las tres leyes del movimiento de los planetas alrededor del Sol, que son leyes empíricas, ajustadas a la observación. Newton (1643-1727) enuncia la Ley de la Gravitación Universal, de la que se deducen las de Kepler. Concibe el Universo infinito, sin bordes, expendido en todas direcciones. En 1781 Herschell descubre Urano, primer planeta que se añade a la lista de los conocidos desde la Antigüedad. Y en 1846 Leverrier y Galle anuncian el descubrimiento de Neptuno, cuya existencia predice la ley de Newton (por la influencia gravitatoria en la órbita de Urano). Es un éxito magnífico de la Mecánica newtoniana pues el planeta fue descubierto con papel y lápiz primero y luego encontrado en el cielo.

Básicamente se concibe el Universo con modelo heliocéntrico y de tamaño infinito, pero surge la Paradoja de Olbers (ya formulada por Kepler): si el universo es infinito, ¿por qué de noche es oscuro? En todas partes habría luz de alguna estrella. ¿Es infinito en el tiempo? No hay unanimidad.

LOS DOS ÚLTIMOS SIGLOS

Volvamos nuestros ojos a la geometría, a la recién aparecida Geometría Hiperbólica de principios del XIX, en que por cada punto exterior a una recta se pueden trazar al menos dos rectas que no cortan a la dada (y todas las comprendidas entre ambas también gozan de esa propiedad). Se desarrolla la correspondiente trigonometría (que, no por casualidad, está regida por las funciones hiperbólicas) y no aparece ninguna contradicción. Ahora bien, ¿qué sentido tiene esta geometría?

Esta pregunta se traduce en la búsqueda de Modelos. Se buscan objetos matemáticos cuya geometría sea de modo natural hiperbólica. Para ello se recurre a las superficies, cambiando la noción de recta por la de *andar en línea recta* por la superficie. Este andar en línea recta se denomina geodésica (en particular, la línea más corta que une dos puntos de una superficie, si existe, es una geodésica, aunque una geodésica globalmente no tiene por qué minimizar distancias: por ejemplo, Santander y Madrid están en el mismo meridiano, que es una geodésica entre ambas ciudades, pero ir de Santander a Madrid pasando por el polo Norte, atravesar el Océano Pacífico, cruzar el Polo Sur, subir por África y entrar en Madrid por la carretera de Andalucía es un camino recto, pero que no da la mínima distancia. Es más corto bajar por Burgos (aunque no estoy seguro de que sea mucho más rápido en realidad).

Localmente, las geodésicas de una superficie verifican los axiomas de Euclides, salvo el quinto. Así, las geometría elíptica, euclídea e hiperbólica equivalen a que la suma de los ángulos de un triángulo sea mayor, igual o menor que 180º. La primera superficie con geometría hiperbólica que se estudió fue la pseudoesfera de Beltrami (1869).

Por los mismos años, la Geometría Proyectiva vivía su momento de gran expansión, combinando las ideas sintéticas con las analíticas, Pero es que, además, se probó que la Geometría Euclídea era una subgemometría de la Proyectiva. Así, Laguerre (1853) estableció que dos rectas son perpendiculares si y sólo si sus puntos del infinito son conjugados respecto de la cónica del absoluto.

Y la Geometría hiperbólica también tiene cabida dentro de la proyectiva. Es el modelo de Klein-Beltrami (1871) de plano hiperbólico: en el círculo unidad se denominan rectas hiperbólicas a sus cuerdas. Los puntos de la circunferencia unidad son los del infinito. Por un punto exterior a una recta existen dos

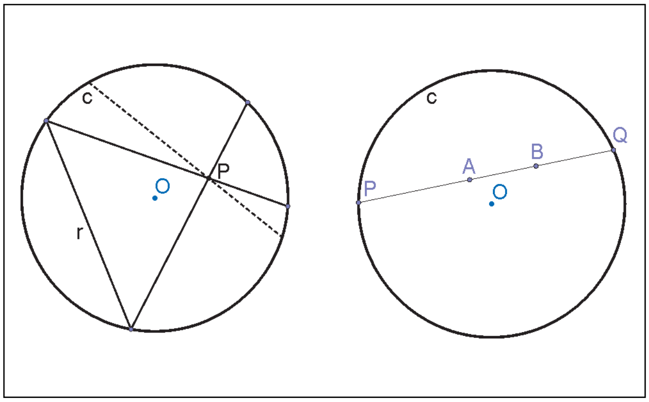

Figura 3. Geometría hiperbólica.

rectas que cortan a la dada en puntos del infinito, es decir, dos paralelas. Las comprendidas entre ambas paralelas son secantes a la dada o exteriores a la dada, según la región en que estén de las definidas por las dos paralelas (ver **figura 3,** izquierda).

La distancia entre dos puntos A y B está dada por $d(A,B)=(1/2)\log([A,B,P,Q])$, donde el corchete denota la razón doble y P y Q son los puntos del infinito de la recta determinada por A y B. La razón doble es un invariante de la Geometría Proyectiva (ver **figura 3,** derecha).

Esto llevó Cayley a exclamar su conocida frase: “La Geometría Proyectiva es toda la geometría”.

Todas estas ideas de pensar en superficies, en vez de en planos, tomando como rectas las geodésicas, enlazan con el gran estudio de Gauss *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828), en el que se había planteado estudiar la Geometría intrínseca de una superficie, que es la que se percibe sin salirse de la superficie. En primer lugar, consigue asociar a cada punto de la superficie un número, que expresa cómo se curva la superficie en el punto (ese número lo denominamos hoy en día curvatura de Gauss) y demuestra que esa cantidad permanece invariante por isometrías locales (y denominó a este resultado fundamental “teorema egregio”, y así lo seguimos denominando).

Pues bien, todos los caminos se van encontrando: aquello que estudió Gauss se relaciona con las geometrías no euclídeas del siguiente modo: la geometría euclídea tiene curvatura nula, la hiperbólica la tiene negativa y la elíptica positiva.

El siguiente paso lo dio Riemann cuando en su trabajo *Ueber die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854) introdujo las nociones de variedad diferenciable y de métrica en una tal variedad, y pudo definir la curvatura en ellas, generalizando las ideas de Gauss. El tipo de Geometría de una variedad depende de su curvatura.

Se planteó entonces la cuestión de qué Geometría es la correcta, dándose distintas respuestas (Riemann y Helmholtz: la que se ajuste a las observaciones; Russell [R] en 1897: la que tienen en común la euclídea y las no euclídeas, es decir, la proyectiva). Hasta que llegó Poincaré y deshizo el nudo gordiano diciendo que la pregunta no tenía sentido dentro de las Matemáticas. Matemáticamente todas son ciertas. La pregunta tiene sentido en el campo de la Física. Y aquí ya hemos enlazado con la Cosmología.

Y apareció un nuevo problema: el de la consistencia de las propias Matemáticas. La existencia de diferentes geometrías y la aparición de la teoría de conjuntos, debida inicialmente a la obra de George Cantor, con sus paradojas, llevaron a reflexionar sobre los mismos fundamentos de las Matemáticas y sobre la consistencia de la disciplina. Así desde finales del XIX hasta más allá de mediados del XX se desarrolló una ingente labor de fundamentación, de aplicación del rigor más estricto, de axiomatización de geometría y aritmética, con la aparición de nuevas ramas muy teóricas y rigurosas como la Topología y el Análisis Funcional, por citar sólo dos ejemplos. El movimiento bourbakista es la más clara evidencia de esta manera de estudiar Matemáticas, pues su obra impregnó la docencia superior de la disciplina durante décadas.

Y además de esta labor de depuración rigurosa dentro de las Matemáticas, apareció una reflexión filosófica sobre el sentido de las Matemáticas. Brotaron diferentes corrientes de pensamiento, los diferentes “-ismos”, como en la pintura y el arte de la época. Por ser breves, podemos citar estas cuatro corrientes, con algunos de sus más señalados defensores:

Realismo matemático: las entidades matemáticas existen con independencia de la mente humana. Por tanto, las Matemáticas se descubren, no se inventan. (Erdös, Gödel).

Formalismo: Las Matemáticas son un juego formal, con sus reglas y su lenguaje. Es esencial la consistencia, por lo que el teorema de Gödel es un obstáculo. (Hilbert, Tarski).

Intuicionismo: Las Matemáticas son obra de la mente humana y no existirían si no hubiera hombres. (Brouwer).

Logicismo: Las Matemáticas son parte de la Lógica. (Frege).

A este respecto, querido lector, te recomiendo que releas la cita de Dostoyevski con la que abría este trabajo para que veas lo lejos que llegó esta reflexión.

Pero volvamos a la Cosmología. Desde la aparición de la memoria mencionada de Riemann hasta la enunciación de la Teoría Especial de la Relatividad, en 1905, se fue desarrollando el cálculo en variedades de dimensión arbitraria, merced a las contribuciones de matemáticos como Christoffel, Ricci, y Levi-Civita, por no hacer más extensa la lista. Todas las fórmulas que vemos en teoría de Relatividad están expresadas en los términos matemáticos que estos autores crearon. Simultáneamente hubo numerosas contribuciones desde el lado de la Física, debidas a científicos como Lorentz, Poincaré, Minkowsky, Michelson y Morley. En 19095 Einstein enunció la teoría especial o restringida de la Relatividad y en 1915 la general. Como propiedades más notables cabe citar, de un modo muy breve, las siguientes: No puede detectarse el movimiento absoluto uniforme. La velocidad de la luz es constante (independiente del observador que la mida). Y la que más nos importa para nuestro discurso, Curvatura y Gravedad pueden identificarse, en es sentido de que las grandes masas curvan el espacio, o, visto del modo recíproco, la curvatura del espacio determina la atracción gravitatoria.

Así, la teoría de la relatividad es, en su fundamento, geométrica, y la forma del universo, que su geometría sea globalmente de tipo elíptico, hiperbólico o euclídeo, depende de la cantidad de masa y energía (de cualquier tipo) que contenga.

En 1919 Eddintgon realiza la primera verificación experimental de la teoría de la relatividad, midiendo la precesión del perihelio de Mercurio. En 1929 Hubble enuncia la Ley de alejamiento de las galaxias, de la que se desprendió la Expansión del Universo. En 1948 Gamow plantea la existencia del Big Bang: nuestro Universo tuvo singularidad inicial hace unos 15.000 millones de años. En 1965 Penzias y Wilson descubren el fondo cósmico de microondas, que es la huella de esa explosión inicial.

La mecánica newtoniana es muy buena aproximación a escalas intermedias (de velocidad y de tamaño), pero a grandes escalas la Física Relativista es la que rige (a pequeñas, la Cuántica). Nuestro Universo es finito en tiempo y en tamaño y no se sabe si continuará un proceso de expansión indefinida o volverá a contraerse. Depende de su geometría global

CONCLUSIONES

El ejemplo de las geometrías no euclídeas y la forma del Universo no es sólo un ejemplo importante en la Historia de las Matemáticas. Es el ejemplo que abrió la discusión sobre el significado de la verdad en las Matemáticas, sobre el papel que tenían en la descripción del Universo físico, sobre la "metamatemática".

Desde el siglo XIX se han sucedido diversas corrientes de pensamiento sobre el significado de las Matemáticas: realismo (o platonismo), formalismo, logicismo, intuicionismo. Dejando aparte la del platonismo, las demás han tropezado con inquietantes realidades, que no han podido soslayar.

Tres ideas clave en la exposición realizada:

- La historia del quinto postulado es puramente matemática.
- La cosmología es una parte de la Física.
- Las geometrías no euclídeas
  - resuelven la cuestión del quinto postulado (puramente matemática)
  - sirven para desarrollar la Matemática precisa para entender la Cosmología Moderna.
  - siembran la gran duda sobre la relación entre Matemáticas y Mundo Real y sobre la verdad de las Matemáticas.

Más ideas

- La inmensa mayoría de los matemáticos realiza sus investigaciones al margen de las discusiones filosóficas, y en todas se sigue el modelo de pensamiento griego (postulado-definición-teorema).
- La cosmología moderna sigue teniendo su fundamento matemático en la geometría (en la geometría diferencial: la gravitación equivale a la curvatura, la luz sigue trayectorias geodésicas, etc.).
- En las Matemáticas juega un papel muy importante la estética. Las Matemáticas son bellas para muchos de sus cultivadores. Así Jacobi afirmaba en 1830 que *la finalidad única de la ciencia es rendir honor al espíritu humano*.

- El camino entre Matemáticas y Realidad es de ida y vuelta. El ejemplo de la Geometría proyectiva lo ilustra:

  - Se introduce para dar un modelo de la visión y la perspectiva.

  - Desempeña un papel importante en las propias Matemáticas

  - Se relaciona con otros problemas de Matemáticas (como el del quinto postulado)

  - Constituye un modelo de Geometría elíptica

  - Se construyen nuevas aplicaciones, como en Criptografía o en Visión por Computador.

EPÍLOGO

A modo de ilustración y para reflexión del lector enunciaré unas pocas célebres citas sobre el sentido de las Matemáticas y su relación con el mundo exterior.

- *The natural numbers come from God, everything else is man's work.* (Leopold Kronecker, 1823-1891)

- *The most incomprehensible thing about the universe is that it is comprehensible.*

- *How can it be that mathematics, being after all product of human thought which is independent of experience, is so admirably appropriate to the objects of reality?* (Albert Einstein, 1879-1955)

- *La concepción platónica es la única sostenible. Con ello me refiero a la concepción de que la matemática describe una realidad no sensible, que existe independientemente tanto de los actos como de las disposiciones de la mente humana, y que sólo es percibida por ella, aunque probablemente de forma incompleta. Esta concepción es más bien impopular entre los matemáticos, aunque algunos de los grandes la han adoptado, por ejemplo Hermite, que escribió una vez lo siguiente:'Existe, si no me equivoco, todo un mundo que es el conjunto de las verdades matemáticas, al que no tenemos acceso más que por la inteligencia, al igual que existe el mundo de las realidades físicas; ambos son independientes de nosotros y de creación divina.' "* (K.Gödel, 1906-1978) *Ensayos inéditos, Edición a cargo de F. Rodríguez Consuegra,* Mondadori, Madrid, 1994, p.169).

- *Que existe una relación íntima entre los fenómenos experimentales y las estructuras matemáticas parece confirmarse plenamente de la forma más inesperada mediante los descubrimientos más recientes de la física contemporánea. Pero no sabemos absolutamente nada sobre los fundamentos de este hecho (suponiendo que se pudiera encontrar realmente significado a estas palabras) y tal vez no lleguemos a saber nunca sobre ello.* (N.Bourbaki, *L'Architecture des Mathématiques*, 1948). Borubaki es un pseudónimo de un grupo de matemáticos franceses (Dieudonné, H. Cartan, Eilenberg, Samuel, Weil, Schwartz, Chevalley, Godement, Serre, Grothendieck, Koszul, etc) autor de una monumental obra “Elementos de Matemáticas” escrita a mitad del XX al modo de Euclides, pero partiendo de las axiomáticas recientes de conjuntos, desterrando la geometría. A mediados de los 50 apareció la teoría de categorías, más general que la de conjuntos, lo que obligaba a refundar toda la obra.

- *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* (Eugene Wigner, 1902-1995), Premio Nobel de Física en 1963, de nacionalidad húngara. La frase es el título de un libro suyo. En ese libro se lee: *El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos mostrarnos agradecidos por él y esperar que permanezca siendo válido en la investigación futura y que se extienda, para bien o para mal, para placer nuestro, aunque también tal vez para nuestra perplejidad, a ramas más amplias del saber.*

- *Eugene Wigner wrote a famous essay on the unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences. He meant physics, of course. There is only one thing which is more unreasonable than the unreasonable effectiveness of mathematics in physics, and this is the unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology.* (I. Gelfand, 1913-2009) Matemático ruso, afincado en Estados Unidos. Este texto último ha quedado algo desfasado con la progresiva matematización de las Bio-ciencias, en la que trabajó muy activamente el propio Gelfand.

- Penrose (matemático y físico inglés, 1931-) considera en [P] que existen tres mundos y tres misterios: El de la verdad (en el que deben encontrarse las matemáticas), la belleza y la moralidad. El de la fisicalidad. El de la Mentalidad. Cada uno de ellos parece de englobar en su totalidad al que le sigue, aunque parezca depender solo de una pequeña parte de su predecesor. No deberíamos preguntarnos *qué* es la realidad, sino meramente *cómo* se comporta. Los físicos modernos describen las cosas invariablemente en términos de modelos matemáticos. Es como si trataran de encontrar la “realidad” dentro del mundo platónico de las ideas matemáticas. [...] Pero ¿son las nociones matemáticas cosas que habitan realmente en un “mundo” propio? Si es así, parece que hemos encontrado que nuestra realidad última tiene su hogar dentro de este mundo completamente abstracto. Y concluye: “me resisto a *identificar* la realidad física dentro de la realidad abstracta del mundo de Platón”.

REFERENCIAS

1. [E] F. Etayo: La Geometría de la Representación Visual. X Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica de la Real Academia de Ciencias.
2. [P] R. Penrose: *El camino a la realidad*. Debate, Madrid, 2006
3. [R] B. Russell: *An Essay on the Foundations of Modern Geometry*, Dover, 2003 (primera edición 1897).
4. [S] J. M. Sánchez Ron: *El canon científico*, Crítica, Barcelona, 2005.
5. Telmo Fernández, Benjamín Montesinos: *El desafío del Universo.* Espasa Calpe, Madrid, 2007.
6. [W] J. R. Weeks: *The shape of space*. Marcel Dekker, N. York, 2002.