

# LA GRAN SINFONÍA CÓSMICA

ALBERTO GALINDO TIXAIRE \*

\* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Departamento de Física Teórica. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense. 28040 MADRID. agt@fis.ucm.es.

## I. INTRODUCCIÓN

Mi conferencia anterior, “Armonías en los cielos”, quiso rendir testimonio de admiración a esa docena de grandes astrónomos que se enfrentaron al misterio del Universo para arrancarle sus primeros secretos. Solo disponían de sus ojos desvalidos, de su portentosa razón, y de una pasión y curiosidad desbordantes. Aún así, consiguieron idear las primeras medidas astronómicas, descubrir la precesión de los equinoccios, predecir los eclipses, obtener la forma de las órbitas de los planetas, y legislar la causa principal de los movimientos de los astros. Aquella música de los orbes que solo el “maestro” Pitágoras podía oír llegó al siglo XVIII transformada en un orden cósmico regido por leyes mecánicas universales.

Desde los comienzos del siglo XX nuestra visión del Universo ha experimentado cambios radicales. No solo porque la física acababa de entrar en las revolucionarias eras cuántica (1900) y relativista (1905, 1916), sino además porque se descubrió la existencia de un universo extragaláctico (1929) y su expansión a gran escala, así como su fase singular, extremadamente densa, de gran explosión, que el hallazgo fortuito en 1964 de la radiación cósmica de fondo revelaría que había sido enormemente caliente.

En los últimos 30 años la cosmología ha dejado de ser una ciencia con gran penuria de datos y por tanto demasiado especulativa, a ser una atractiva ciencia

frontera entre la astrofísica y la física de partículas elementales. Los grandes telescopios, los sistemas intercontinentales de radiotelescopios, y los globos y satélites de observación, han permitido amasar una gran cantidad de valiosos datos que han impulsado el desarrollo de una cosmología de precisión, y han revelado algunos hechos sorprendentes: la mayor parte de la materia es de composición desconocida, y la expansión actual del Universo es acelerada.

De todo ello ha surgido un modelo cosmológico de concordancia, nuestro actual sistema del mundo podríamos decir, que, con aproximadamente una docena de parámetros globales, da cuenta de todos los datos observacionales hasta el presente. Este modelo engloba la inflación primitiva, necesaria para responder al problema de los horizontes y otros similares, además de proporcionar un espectro de inhomogeneidades, germen de las grandes estructuras astrofísicas observadas. Pero también presenta sombras o puntos débiles: 1/ Ignoramos de qué está hecha la materia oscura exótica, esto es, un 23% de todo lo que existe. 2/ Ignoramos cuál es el origen de una energía, llamada oscura, responsable de las fuerzas antigravitatorias que aceleran la expansión del cosmos, y que representa el 73% de todas la energía/materia existente en el cosmos. Y 3/, desconocemos los detalles de la inflación primitiva.

Nuestras esperanzas están ahora puestas en la sonda Planck, y el gran colisionador de hadrones LHC

\* Este texto fue esencialmente escrito en el primer semestre de 2010. Lo hemos mantenido, con alguna nota de actualización.

del CERN. De la primera, por su gran sensibilidad y su mayor resolución angular, esperamos información del período inflacionario primitivo y del fondo de ondas gravitacionales entonces existente; el segundo tal vez produzca, aparte del ansiado bosón Higgs, materia supersimétrica, ese hipotético sector que albergaría al mejor candidato a materia oscura.

Atrás quedó el tiempo de la música monocorde de las órbitas celestes; hoy los astrónomos asisten, por un lado, a una sinfonía cósmica virtual que conjuga todas las leyes físicas conocidas y elementos aún hipotéticos, y por otro, a una auténtica sinfonía real en tres tiempos que arranca con la inflación, sigue hasta la liberación de la luz, y culmina con el primer brote de estrellas. Sobre su partitura, siempre incompleta, versará esta segunda conferencia con que cerraré mi pequeña contribución al Año Internacional de la Astrofísica.

## II. EL UNIVERSO FÍSICO

Hasta finales del siglo XVII la Astronomía se centró en la cinemática de los astros, sin proponer causas dinámicas para estos movimientos. La primera propuesta vino de Newton, con su ley universal de la gravedad. Rige tanto la caída de los graves como el movimiento de los astros.

### A. Newton, el maestro

*Como hombre, fue un fracaso; como monstruo, fue grandioso.* Así dice Aldous Huxley de Newton.<sup>1</sup> Para

Keynes: *Newton ... fue el último niño prodigo a quien los Reyes Magos podrían rendir justo y sincero homenaje.*<sup>2</sup> Considerado como el científico más grande de todos los tiempos (gloria a compartir a lo sumo con Arquímedes y Einstein), a Newton debemos, entre otras cosas, el cálculo de fluxiones directo (cálculo diferencial) e inverso (cálculo integral), la teoría de los colores, y la ley de la gravedad universal. Gestas todas realizadas a sus 23 años, en los 18 meses más fecundos de toda la historia de la imaginación creadora. *Todo esto ocurría en los años de la peste de 1665 y 1666, pues en aquellos días me encontraba en lo mejor de la vida para la creación, y nunca tuve más afición que entonces por las matemáticas y la física,* escribió Newton medio siglo después.<sup>3</sup> Sus famosos PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA (1687) son obra cumbre de la ciencia.

Según nos enseñó Newton, la fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  con que una masa inercial  $m_1$ , situada en el punto  $\mathbf{r}_1$  de un referencial galileano, atrae a otra masa  $m_2$  colocada en  $\mathbf{r}_2$  es

$$\mathbf{F}_{12} = -G_N m_1 m_2 r_{12}^{-3} \mathbf{r}_{12},$$

donde  $\mathbf{r}_{12} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $r_{12} := |\mathbf{r}_{12}|$ , y  $G_N$  es la constante (de Newton) de la gravedad universal. Aunque el propio Newton estimó (indirectamente) el valor de  $G_N$  —en realidad, lo que estimó fue la densidad media de la Tierra<sup>4</sup>— su primera medida (también indirecta) fue hecha por Cavendish (1798), con un 1% de precisión. Hoy se sabe que<sup>5</sup>

$$G_N = 6.67428(67) \times 10^{-11} \text{ uSI}. \quad (1)$$

La cosmología, provista de esta ley dinámica universal, se convierte en ciencia moderna. Las órbitas keple-

<sup>1</sup> If we evolved a race of Isaac Newtons, that would not be progress. For the price Newton had to pay for being a supreme intellect was that he was incapable of friendship, love, fatherhood, and many other desirable things. As a man he was a failure; as a monster he was superb.

<sup>2</sup> Newton was not the first of the age of reason: he was the last of the magicians, the last of the Babylonians and Sumerians, the last great mind which looked out on the visible and intellectual world with the same eyes as those who began to build our intellectual inheritance rather less than 10,000 years ago. Isaac Newton, a posthumous child born with no father on Christmas Day, 1642, was the last wonderchild to whom the Magi could do sincere and appropriate homage. En Newton: The Man, THE COLLECTED WRITINGS OF JOHN MAYNARD KEYNES, Volume X. MacMillan St. Martin's Press, pp. 3634.

<sup>3</sup> All this was in the two plague years of 1665 and 1666. For in those days I was in my prime of age for invention & minded Mathematics & Philosophy more than at any time since. (Parte del borrador de una carta, hallado tras la muerte de Newton, que aparentemente escribió éste a Pierre des Maizeaux.)

<sup>4</sup> Existe la siguiente relación:  $G_N \rho_\oplus = (3/4\pi) g_\oplus / R_\oplus^2$ .

<sup>5</sup> K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G 37, 075021 (2010)

rianas aparecen como deducción matemática, y la ley armónica de Kepler se reviste como *ley “1-2-3”*:

$$G_N (M_\odot + m_p)^1 = \omega_p^2 a_p^3,$$

siendo  $M_\odot$  la masa del Sol,  $m_p$  la de un planeta,  $\omega_p$  la velocidad angular media del movimiento relativo Sol-planeta, y  $a_p$  el semieje mayor de la elipse descrita por  $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_\odot$ . La influencia de los otros planetas y satélites se supone despreciable. Como  $m_p \ll M_\odot$ , la ley “1-2-3” da origen a la tercera ley de Kepler, y a la obtención inmediata de la masa del Sol.

Ya sobraban los ángeles que empujaran a los planetas en torno al Sol. Los PRINCIPIA fueron, según Kline, epitafio a la explicación física: *hypotheses non fingo*, escribe Newton. No le interesa la naturaleza del posible agente, material o no, causante de la gravitación, y lo deja “a la consideración de sus lectores”. Leibniz y uno de los Bernoulli le atacaron duramente. Pero la física newtoniana rigió, soberana, hasta principios del siglo XX, cosechando los éxitos más rotundos en cuanto a eficacia y precisión predictiva ( $\sim 10^{-8}$ ). Bástenos citar la predicción por Clairault del regreso del cometa Halley, así como la del planeta Neptuno por Adams y Le Verrier en 1841 (analizando sus perturbaciones sobre Urano, descubierto por Herschell en 1781) y su localización en 1846 por Galle a solamente  $52''$  de arco de la dirección prevista. Sólo una pequeña anomalía (avance del perihelio de Mercurio), detectada por Le Verrier en 1859, nublaba ligeramente el horizonte.

La universalidad de la gravitación newtoniana se extiende al dominio estelar con la observación por Herschell de sistemas binarios de estrellas. El descubrimiento por Newton de la descomposiciónpectral de la luz al atravesar un prisma óptico conducirá años más tarde a conocer la composición de los astros. Finalmente, para asegurar una vida perdurable al Universo, Newton, que creía inmóviles las estrellas en

el espacio absoluto, concluyó que dicho Universo debía ser infinito, totalmente rociado por doquier de estrellas con sus cortejos de planetas; de este modo las distintas fuerzas gravitacionales sobre cada estrella se compensarían entre sí evitando el colapso total o parcial.<sup>6</sup>

Del cosmos griego llegamos, tras todos estos pioneros, a un cosmos, por supuesto ordenado, dotado de una ley universal que rige la atracción gravitacional, e infinito y estacionario.

## 1. La ley de áreas

En el Libro Primero de los PRINCIPIA de Newton, como Teorema I figura la ley de áreas para todo campo de fuerzas centrales, seguida de una bella demostración geométrica.<sup>7</sup> Dice así el enunciado del teorema: *Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.*<sup>8</sup>

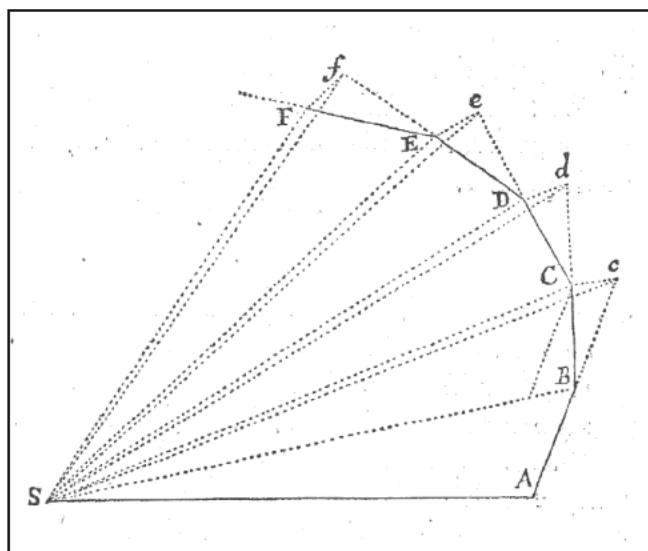


Figura 1. Dibujo original de los PRINCIPIA.

<sup>6</sup> Como bien señala Hawking (1987), el que la fuerza ¡infinita! que las estrellas en un hemisferio de tal Universo ejercerían sobre otra con creta se cancelara exactamente con la debida al hemisferio opuesto no pasa de ser un piadoso deseo, por cuanto la diferencia entre dos infinitos es algo a definir.

<sup>7</sup> Parece ser que fue Robert Hooke quien enseñó a Newton cómo la ley de áreas se cumple para toda fuerza central. Ver, por ejemplo, *The Errors & Animadversions of Honest Isaac Newton*, por Sheldon Lee Glashow, en [http://www.iecat.net/bulleti/pdf/90\\_butlleti\\_sheldon.pdf](http://www.iecat.net/bulleti/pdf/90_butlleti_sheldon.pdf).

<sup>8</sup> Las áreas descritas por los radios que unen a un centro de fuerzas inmóvil los cuerpos en giro, yacen en un mismo plano y son proporcionales a los tiempos.

La demostración es muy simple (ver Fig.1): sea  $S$  el centro de fuerzas, y una posición inicial del móvil en  $A$ . En un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$  pasará a la posición  $B$ ; si no hubiera fuerzas, seguiría hasta  $c$  en el siguiente  $\Delta t$ , de modo que el segmentos  $AB$  y  $Bc$  serían de igual longitud, y por tanto los triángulos  $ASB$  y  $BSc$  de igual área. Pero el efecto de la fuerza centrípeta hacia  $S$ , cuando se halla en  $B$ , hace que el móvil se desvíe a una dirección  $BC$ , coplanaria con el triángulo  $ASB$  (la nueva velocidad debe estar en el plano de la anterior velocidad y de la aceleración que cambia a ésta). Por otro lado, el cambio de velocidad experimentado debe ser proporcional a la aceleración, esto es, debe estar en la dirección  $BS$ , y por tanto, la posición  $C$  del móvil en el instante  $2\Delta t$  es tal que  $cC$  y  $BS$  han de ser paralelos. En consecuencia, los triángulos  $BSC$  y  $BSc$  son de igual área, y por tanto también los triángulos  $BSC$  y  $ASB$ . Etc. QED.

Hay que remarcar, sin embargo, que, igual que en el argumento precedente, el espíritu del cálculo de flujoines, del análisis en suma, de la disección en “infinitésimos”, permea, disfrazado de geometría, aunque no en fórmulas, la obra de Newton.

## 2. La ley $1/r^2$

*¿Qué hace girar a los planetas alrededor del Sol? En tiempos de Kepler la respuesta de algunos a este problema era decir que había ángeles tras ellos batiendo sus alas y empujando a los planetas en torno a su órbita. Como veréis, esta respuesta no se aleja mucho de la verdad. La única diferencia es que los ángeles se asientan en dirección distinta y sus alas empujan hacia adentro.*

(Feynman)

En el Libro III, Proposición VII, Teorema VII, afirma Newton en sus PRINCIPIA: *Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiae in singulis.* (La gravedad se produce universalmente en todos los cuerpos, y es proporcional a la cantidad de materia de cada uno de ellos.)

Y un poco más abajo, añade: *Gravitatio in singulas corporis particulas aequales est reciprocè ut quadratum distantiae locorum à particulis.* (La gravitación sobre partículas iguales es inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias.)

En el Libro III, en el Escolio General tras el Problema XXII sobre la Proposición XLII, afirma Newton (edición segunda de sus PRINCIPIA) que la gravedad actúa *según la cantidad de materia que [el Sol y los planetas] contienen, y propaga su virtud doquiera a inmensas distancias, decreciendo siempre como el inverso del cuadrado de las distancias.*

Ya Escoto Erígena (siglo IX) observó que el peso varía con la altura, y Bullialdo (1605-1694) parece haber sugerido la ley  $1/r^2$ .

Veamos, primero, cómo de órbitas circulares y de la tercera ley de Kepler llegamos a la ley  $1/r^2$ , y luego pasaremos al argumento seguido por Newton para llegar a la universalidad.

La ley básica de la gravitación está “impresa” o codificada en la ley armónica o tercera ley de Kepler:

$$a^3/T^2 = \text{const.}$$

Con órbitas circulares de radio  $R$ , se tiene  $T = 2\pi R/v$ , y por tanto podemos reescribirla como

$$v^2/R = \text{const}'/R^2$$

por lo que la fuerza atractiva responsable de la aceleración centrípeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Este es esencialmente el argumento ideado por Newton en 1665/66 durante su retiro en Lincolnshire huyendo de la peste declarada en Londres. Parece ser que Hooke le había ya comentado previamente a Newton que podía llegarse a dicha conclusión.

De la universalidad de esta ley tanto para los fenómenos terrestres como los astronómicos se percató Newton comparando la aceleración  $a_{\text{Luna}}$  con que la Luna gira en torno a la Tierra, con la aceleración de caída de los graves sobre ésta (que, recordemos, es independiente del grave). En cada segundo la Luna cae hacia la Tierra una distancia

$$0.136 \text{ cm} = (1/2)a_{\text{Luna}} (1 \text{ s})^2$$

y en cada segundo, un grave, por ejemplo una manzana, cae hacia la Tierra

$$4.90 \text{ m} = (1/2)a_{\text{manzana}} (1 \text{ s})^2.$$

Luego

$$1/3603 = a_{\text{Luna}} / a_{\text{manzana}}.$$

Por otro lado

$$(r_{\text{Tierra}} / d_{\text{Tierra-Luna}})^2 \approx (1/60)^2$$

por lo que, efectivamente, las aceleraciones gravitacionales son  $\propto r^{-2}$ .<sup>9</sup>

### 3. Las cónicas como órbitas de los graves

La primera ley de Kepler fue demostrada por Newton en los PRINCIPIA, como consecuencia de la ley  $1/r^2$  de la atracción gravitatoria. En la Proposición XI del Primer Libro se propone como Problema VI probar que si un móvil  $P$  recorre una elipse cumpliendo la ley de las áreas con relación a un foco  $S$  de la misma, entonces su aceleración centrípeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $PF$  de  $P$  a  $F$ : *Revolvatur corpus in ellipsi; requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.* Nótese que este resultado no prueba que las órbitas de los planetas sean elipses, sino el *recíproco*: si las órbitas son elipses, entonces la fuerza es del tipo  $1/r^2$ . Tras las proposiciones XII y XIII en las que extiende la solución al problema VI de la elipse a los casos de la hipérbola y la parábola, Newton, ya en la primera edición, añade un Corolario I que dice: *Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis  $P$  secundum lineam quamvis rectam  $PR$  quacunque cum velocitate exeat de loco  $P$ , & vi centripeta, quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra.*

Así quedó en la primera edición de los Principia, y hasta 23 años después no se dejaron oír críticas sobre

la incompletitud del resultado de Newton (particularmente por parte de Johann Bernoulli en 1710). Por eso Newton se adelantó mandando una carta en 1709 a su editor para que completara el corolario anterior añadiéndole estas frases aclaratorias, que aparecen en la segunda edición (1713): *Nam datis umbilico, & puncto contactus, & positione tangentis, describi potest Sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: et Orbes duo se mutuo tangentes eadem vi describi non possunt.*

En la tercera edición (1726) completará ligeramente este comentario, reemplazando su última frase por: *Datur autem curvatura ex data vi centripeta, & velocitate corporis: & orbes duo se mutuo tangentes eadem vi centripeta eademque velocitate describi non possunt.*

En resumen, el Cor. I queda así: *De las tres últimas proposiciones se deduce que si un cuerpo  $P$  se dirige desde el lugar  $P$  a lo largo de una recta arbitraria  $PR$  con velocidad cualquiera, y al mismo tiempo actúa sobre él una fuerza centrípeta inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias de sus lugares a un centro, este cuerpo se moverá en una de las secciones cónicas con foco en el centro de fuerzas; y reciprocamiente. Pues dados el foco, el punto de contacto, y la posición de la tangente, se puede trazar una cónica que tenga una curvatura dada en ese punto. Pero la curvatura se conoce sabiendo la fuerza centrípeta y la velocidad: y no puede haber dos órbitas tangentes [distintas] con igual fuerza centrífuga e igual velocidad.*

Y así quedó para la posteridad. Hoy veríamos este remate newtoniano como consecuencia de un teorema de unicidad de ecuaciones diferenciales:<sup>10</sup> Sea  $\mathbf{r}_1(t)$  un movimiento con aceleración centrípeta  $k_1/r_1^2$  hacia el origen de coordenadas  $O$ . Sea  $\mathbf{r}_2(t)$  un movimiento sobre una elipse, satisfaciendo la ley de áreas respecto

<sup>9</sup> Newton es más cuidadoso, y tiene presente la influencia del Sol, cuyo efecto estima en un aumento de la aceleración centrípeta media de la Luna en un factor del orden de  $1 + 1/(177 + 29/40)$ . Parte de los siguientes datos:  $d_{T-L} = 60r_T$ ,  $2\pi r_T = 123249600$  pies parisinos (medida hecha por los franceses),  $T_L = 27^{\text{d}}7^{\text{h}}43^{\text{m}}$ , por lo que Newton deduce que cada minuto la Luna cae hacia la Tierra una distancia igual a  $15\frac{1}{12}$  pies parisinos, o más exactamente, 15 pies parisinos, 1 pulgada y  $1\frac{4}{9}$  líneas. Si la ley  $1/r^2$  es válida, esta longitud es lo que debe caer un cuerpo sobre la superficie de la Tierra en 1 segundo (pues  $d_{T-L} = 60r_T$ ); y efectivamente, Newton recuerda que Huygens ha medido que la longitud de un péndulo que bate segundos ( $T/2 = 1$  s) a la latitud de París es de 3 pies parisinos y  $8\frac{1}{2}$  líneas, y que lo que un grave cae en 1 s sobre la superficie de la Tierra es la semilongitud de tal péndulo por  $\pi^2$ , es decir, 15 pies, 1 pulgada y  $1\frac{7}{9}$  líneas, compatible con lo anterior.

<sup>10</sup> B. Pourciau, *Reading the Master: Newton and the Birth of Celestial Mechanics*, The American Mathematical Monthly 104, 1 19 (1997).

de uno de sus focos coincidente con el origen  $O$ . Sabemos, por la Proposición XI, que la aceleración centrípeta de este movimiento elíptico es de la forma  $k_2/r_2^2$ . Supongamos que ambos caminos se tocan tangencialmente en un instante  $t_0$ , con igual curvatura en ese punto:  $\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(t_0)$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_1(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_2(t_0)$ , y  $\kappa_1(t_0) = \kappa_2(t_0)$ . Entonces  $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t)$ ,  $\forall t$ , pues ambas órbitas tienen, por un lado, aceleraciones centrípetas inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias, y comparten las mismas condiciones iniciales (no solo en posición y velocidad, sino también en curvatura, lo que obliga a que  $k_2 = k_1$ ).<sup>11</sup>

Bueno, vamos a dar la solución newtoniana, *more geometrico*, al problema VI en la Proposición XI (antes presentado en latín): *Si un cuerpo gira en una ellipse, hallar la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de la ellipse.*

Sean  $C, A, B$  el centro y los extremos positivos de los ejes de la ellipse, y  $S, H$  sus focos (Fig. 2). Sea un punto  $P$  en esa ellipse, y un punto  $R$  en la tangente a la ellipse en  $P$  al que iría  $P$  en su movimiento tras un breve lapso de tiempo  $\Delta t$ , de no ser por la aceleración centrípeta, dirigida desde  $P$  al foco  $S$ , que lo hace caer en esta dirección pasando al punto  $Q$  sobre la ellipse. Sean  $x, T$  los puntos sobre  $SP$  intersección con la para-

lela a  $PR$  desde  $Q$  y con la perpendicular a  $SP$  desde  $Q$ , respectivamente. Sea  $v$  el punto sobre  $CP$  intersección con la recta  $Qx$ . Sea  $I$  el punto de intersección de  $SP$  con la paralela a la tangente  $PR$  desde el foco  $H$ . Sea  $DK$  el diámetro conjugado al diámetro  $GP$ , y sean  $E, F$  las intersecciones de este diámetro con  $SP$  y con la normal al mismo desde  $P$ .

Se sabe, por las propiedades de las cónicas, que los ángulos  $RPS$  y  $HPZ$  son iguales, por lo que el triángulo  $HPI$  es isósceles en el vértice  $P$  y en consecuencia  $PI=PH$ . Por otro lado, por ser  $SC=CH$ , también  $SE=EI$ ; luego  $EP=CA$ .

La aceleración centrípeta  $a_p$  en  $P$  es causante de la caída del móvil desde  $R$  hasta  $Q$ ; luego  $QR = \frac{1}{2} a_p (\Delta t)^2$ . Según la ley de áreas,  $\Delta t$  es proporcional al área del sector elíptico  $PSQ$ , esto es, proporcional (salvo infinitésimos superiores) al área del triángulo  $PSQ$ :  $\Delta t \propto \frac{1}{2} SP \times QT$ . Luego

$$a_p \propto \frac{QR}{QT^2} \frac{1}{SP^2}.$$

Bastará demostrar que el límite de  $QR/QT^2$ , cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , es independiente de la elección del punto  $P$  sobre la ellipse, para concluir que la aceleración centrípeta en el movimiento elíptico con ley de áreas varía como el inverso de la distancia al cuadrado.

Necesitamos para ello un par de resultados de la teoría de las secciones cónicas, y que Newton usa sin más: L1/ Todos los paralelogramos circunscritos a una ellipse con puntos de tangencia en los vértices de un par de diámetros conjugados tienen igual área.<sup>12</sup> En particular,  $CD.PF = CA.CB$ . L2/  $Pv.vG/Qv^2 = CP^2/CD^2$ .<sup>13</sup>

Prosigamos. Se tiene, por semejanza de triángulos, y el uso de  $EP=AC$ ,

$$\frac{QR}{Pv} = \frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC}.$$

Asimismo, y usando L1:

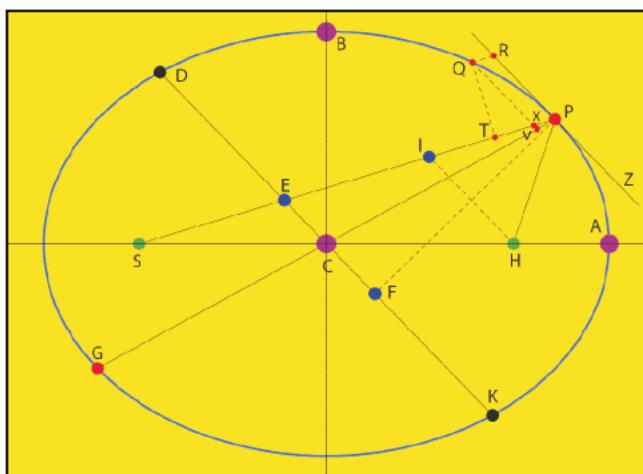


Figura 2. Gráfico adaptado del original de Newton.

<sup>11</sup> Utilizando las Proposiciones XII y XIII de los PRINCIPIA puede extenderse este argumento a cónicas arbitrarias, no necesariamente elípticas.

<sup>12</sup> Basta reducir el problema, mediante una transformación afín, al caso trivial de un círculo.

<sup>13</sup> Es muy fácil de probar cuando las rectas  $Qv$  y  $CP$  son ortogonales. Los demás casos son reductibles a éste recurriendo a una transformación afín adecuada.

$$\frac{QT}{Qx} = \frac{PF}{PE} = \frac{PF}{AC} = \frac{BC}{DC}.$$

Luego

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{AC.Pv}{PC} \frac{DC^2}{BC^2.Qx^2} \approx \frac{AC.Pv}{PC} \frac{DC^2}{BC^2.Qv^2}.$$

Echando mano ahora de L2 para reexpresar  $Pv/Qu^2$ , y haciendo tender  $Q$  hacia  $P$ , resulta:

$$\frac{QR}{QT^2} \approx \frac{AC}{BC^2} \frac{PC}{vG},$$

por lo que cuando  $Q \rightarrow P$  obtenemos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{QR}{QT^2} = \frac{AC}{2BC^2}.$$

Este límite no depende del punto  $P$  de partida, como deseábamos probar, y es simplemente  $1/L$ , donde  $L := 2BC^2/AC$  es el *latus rectum* de la elipse. QED.

¿Podía haber otra de comparable elegancia? La verdad es que el sello de Newton se deja sentir en cada página de su magna obra.

#### 4. La ley de armonías según Newton

Finalmente, veamos cómo en los PRINCIPIA se presenta la tercera ley de Kepler. Lo hace Newton en la Proposición XIV, Teorema VI: *Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distanciæ locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicata ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.*<sup>14</sup>

La demostración es ahora muy fácil. Sabemos que  $QT^2/QR \rightarrow L$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Por otro lado el límite de  $2QR/(\Delta t)^2$  es la aceleración centrípeta  $a$ , y el límite de  $\frac{1}{2}QT.SP/\Delta t$  es la velocidad areolar  $v_{\text{área}}$ . De

todo esto, y del supuesto  $a \propto 1/SP^2$ , resulta inmediatamente

$$L/v_{\text{área}}^2 = \text{const.}$$

como se quería probar.

Aquí está la ley armónica en una versión local que no exige órbitas completas.

Y en la Proposición XV, Teorema VII, nos encontramos con la tercera ley de Kepler: *Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata majorum axium.*<sup>15</sup> (Edición 1726).

En efecto, para cada elipse  $v_{\text{área}} = \pi CA.CB/T$ , siendo  $T$  el periodo. Luego del teorema anterior  $L \propto v_{\text{área}}^2$  deducimos que  $2CB^2/CA \propto \pi^2 CA^2.CB^2/T^2$ , y por tanto  $1/CA \propto CA^2/T^2$ , esto es,  $T \propto CA^{3/2}$ . QED.

#### 5. Límites de la dinámica newtoniana

Como “absurda” fué tildada la teoría newtoniana de la gravitación (TNG) por Huygens, pues su acción a través del espacio vacío impedía cualquier mecanismo de transmisión.

De “nauseabunda a las mentes acostumbradas a no aceptar ningún principio físico que no sea incontestable y evidente” fue denunciada por uno de los Bernoulli.

Todo ello porque con su *hypotheses non fingo* Newton renunció a discutir sobre la naturaleza, material o inmaterial, del agente causante de la gravitación; pues para Newton las hipótesis, metafísicas o físicas, de cualidades ocultas o mecánicas, las afirmaciones que no son deducibles de los fenómenos, no caben en la filosofía experimental.

El propio Newton, al estudiar las perturbaciones de unos planetas sobre otros, observa que las órbitas de

<sup>14</sup> Si varios cuerpos orbitan en torno a un mismo centro, y la fuerza centrípeta es inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias de los cuerpos al centro, sostengo que los lados rectos principales de las órbitas son proporcionales a los cuadrados de las áreas descritas en el mismo tiempo por los radios que van desde los cuerpos al centro.

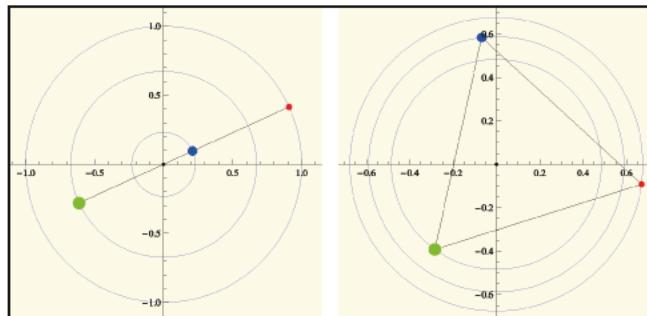
<sup>15</sup> Con los mismos supuestos, mantengo que los períodos en las elipses con proporcionales a los semiejes mayores elevados a 3/2.

Júpiter y Saturno se alejan cada vez más de sus elipses keplerianas. ¿Acaso es inestable el sistema solar? ¿O será incorrecta la TNG? Discute a fondo ésto en correspondencia con su discípulo Clarke y con Leibniz, y se ve obligado a echar mano de Dios como temporero cósmico para arreglar de vez en cuando el sistema solar. Leibniz rechaza esta idea, que supondría una creación imperfecta, aunque Clarke le rebate diciendo que tales arreglos bien podían formar parte del plan original del Creador. ¡La teología seguía influyendo en los conflictos científicos!

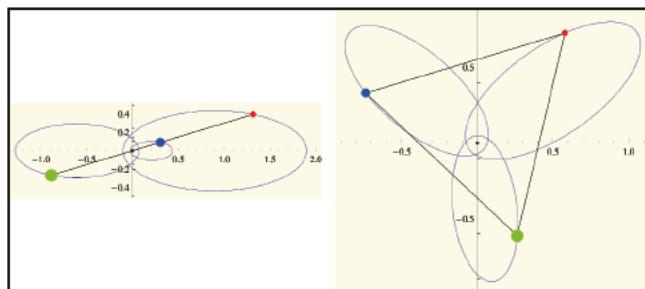
Este problema ocupó durante un siglo a las mentes más preclaras, hasta que en 1799 Laplace dió solución a la gran anomalía de estos planetas, probando que de hecho sus variaciones son periódicas, aunque, eso sí, con un período muy largo  $T \sim 900$  años. [La razón de tal longitud temporal y del gran tamaño de esas perturbaciones estriba en que los períodos orbitales de Saturno y Júpiter están aproximadamente en una simple relación aritmética  $2T_{\text{Saturno}} \approx 5T_{\text{Júpiter}}$ , lo que propicia una acción resonante (denominadores pequeños en teoría de perturbaciones celestes).]

## 6. Paso a la complejidad

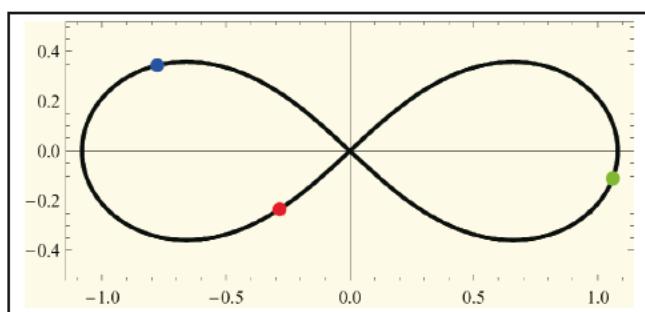
Las órbitas de los planetas no son exactamente elípticas. En primer lugar, están perturbadas por las inter-



**Figura 3.** Configuraciones centrales de Euler y de Lagrange, para masas  $m_1=2$ ,  $m_2=3$ ,  $m_3=4$ . La recta y el triángulo equilátero giran uniformemente con sendas frecuencias angulares que son funciones de las masas. Con las masas dadas, y tomando  $G_N=1$ , se tiene  $\omega=2.55036$  en el caso colineal, y  $\omega=3$  en el caso del triángulo equilátero.



**Figura 4.** Configuraciones homográficas de Euler y de Lagrange, para masas  $m_1=2$ ,  $m_2=3$ ,  $m_3=4$ , y elipses con  $a=1$ ,  $e=0.9$ . La recta y el triángulo equilátero giran cambiando de escala mientras las masas siguen movimientos keplerianos con igual frecuencia media a lo largo de elipses homotéticas con un foco en el origen (centro de masas). Estas frecuencias escalan con  $a^{-3/2}$ , y para  $a=1$  coinciden con las dadas en la figura anterior.



**Figura 5.** Coreografía con 3 masas.

acciones con los otros planetas y con los satélites; pero aunque no estuvieran estos, en el sistema de dos cuerpos más simple imaginable formado por el Sol  $S$  y un único planeta  $P$  la órbita de éste no es una elipse, pues en la interacción, aparte del término dominante dado por Newton, existe un término correctivo que proviene de la modificación einsteiniana de la gravitación, y que en nuestro sistema solar produce efectos relativos del orden de  $10^{-8}$ .<sup>16</sup>

Cuando se consideran tres o más cuerpos en interacción gravitatoria mutua, el problema matemático se hace enormemente complejo. Brillantes matemáticos de los siglos XVIII y XIX (Euler, Lagrange, Laplace, Jacobi, Hamilton, Poincaré,...) se ocuparon del llamado problema de los  $N$  cuerpos, obteniendo algunos resultados sobresalientes que voy a comentar.

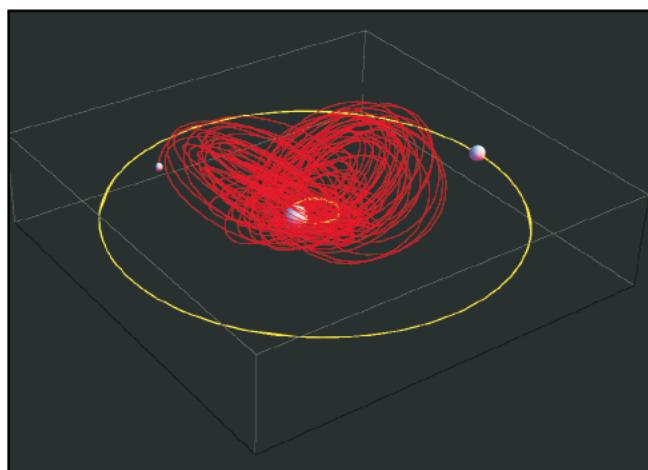
<sup>16</sup> Incluso sin esta corrección, una descripción física completa debería incluir, por ejemplo, la disipación de energía debida a causas múltiples.

En 1887 Ernst Heinrich Bruns demostró que el problema de los tres cuerpos no admite ninguna constante del movimiento que sea una función algebraica de las posiciones, velocidades, y del tiempo, y que sea algebraicamente independiente de las 10 constantes del movimiento clásicas esperadas por la invariancia galileana del sistema (posición inicial del centro de masas, conservación de momento lineal, conservación de momento angular, y conservación de energía).<sup>17</sup> Este teorema fue generalizado por Paul Painlevé al caso de  $N$  cuerpos, aunque su demostración es errónea, y ha tenido que esperar a Emmanuelle Julliard-Tosel para su demostración incluso en el caso general: para el problema de  $N$  cuerpos en dimensión  $d$ , con  $1 \leq d \leq N$ , toda constante del movimiento algebraica en posiciones, velocidades y tiempo es algebraicamente dependiente de las  $(d+2)(d+1)/2$  constantes clásicas).<sup>18</sup>

Euler (1763) fue el primero en encontrar algunas soluciones periódicas al problema de los tres cuerpos (la configuración colineal, en la que los tres cuerpos yacen siempre en todo instante sobre una recta móvil, que pasa por el CM del sistema y gira uniformemente en un plano).<sup>19</sup>

A Lagrange (1772) debemos la configuración triangular, con los tres cuerpos situados en los vértices de un triángulo equilátero que gira uniformemente en torno a su baricentro.<sup>20</sup>

Estas soluciones “centrales” de Euler y de Lagrange (Fig. 3) admiten una generalización “homográfica” en la que la evolución dinámica mantiene la



**Figura 6.** Órbita (en rojo) de un planetesimal con los datos dados en el texto.

forma de la configuración (salvo rotaciones) pero su tamaño varía. Los puntos se mueven en cónicas homofocales, con un foco en el centro de masas, de igual excentricidad (Fig. 4).

Más tarde Hill obtuvo otras parecidas a un sistema Sol-Tierra-Luna, que son estables, y en el año 2000 Chenciner y Montgomery probaron la existencia de una nueva configuración en la que tres cuerpos de igual masa se persiguen a lo largo de una órbita plana en forma de “ocho” (Fig. 5).<sup>21</sup> Esta solución es (numéricamente) estable.<sup>22</sup>

Fuera de estas soluciones particulares y de otras configuraciones muy académicas conocidas como “coreografías”, en las que una colección de  $N$  particu-

<sup>17</sup> E. H. Bruns, *Ueber die Integrale der Vielkörper Problems*, Ber. Königl. Sächs. Ges. der Wiss., pp. 1 39, 55 82 (1887); Acta Math. **11**, 25 96 (1887).

<sup>18</sup> P. Painlevé, *OEUVRES DE PAUL PAINLEVÉ*, Tome III, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1975, Équations différentielles du second ordre, Mécanique, Quelques documents.

<sup>19</sup> Y. Hagihara, *CELESTIAL MECHANICS*, The MIT Press (Vols. 1 and 2), Japan Society for the Promotion of Science (Vols. 3 and 4), Cambridge, Mass. London (Vols. 1 and 2), Tokyo (Vols 3 and 4), 1970 (Vol. 1), 1971 (Vol. 2a), 1972 (Vol. 2b), 1974 (Vol. 3), 1975 (Vol. 4), Volume IV, Part 2: Periodic and quasi periodic solutions.

<sup>20</sup> E. Julliard Tosel, *Brun's theorem: The proof and some generalizations*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **76**, no. 4, 241 281 (2000).

<sup>21</sup> L. Euler, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. **11**, 144 151 (1767).

<sup>22</sup> J. L. Lagrange, *Essay sur le problème des trois corps*, en *OEUVRES*, vol. 6, pp. 229 331, Gauthier Villars, Paris, 1873; Prix de l'Académie, vol. IX, Ch. II, Panekoucke, Paris, 1777 (1772), p. 61.

<sup>21</sup> A. Chenciner, R. Montgomery, *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses*, Annals of Mathematics **152**, 881 901 (2000).

<sup>22</sup> C. Simó, *Dynamical properties of the figure eight solution of the three body problem*, Celestial Mechanics (Evanston, IL, 1999), Contemp. Math. 292, 209 228 (2002). T. Kapela, C. Simó, *Computer assisted proofs for non symmetric planar choreographies and for stability of the Eight*, Nonlinearity **20** 1241 1255 (2007).

las de igual masa se mueven todas a la vez sobre una misma órbita, con pasos sucesivos por el mismo punto desplazados en un intervalo de tiempo  $T/N$ , las soluciones al problema general solo son abordables numéricamente, y las órbitas adquieren por lo general una complicación extraordinaria. Pequeñas variaciones en los datos iniciales pueden llevar a resultados con enormes diferencias, por lo que el caos es omnipresente en los sistemas gravitatorios. Como ejemplo, en la Fig. 6 mostramos una órbita de un planetesimal (masa despreciable) en el campo gravitatorio formado por dos masas  $m_1 = 0.9$ ,  $m_2 = 0.1$  en unidades  $G_N = 1$ , en movimiento relativo circular. Inicialmente, estas masas están en los puntos  $(-0.1, 0, 0)$ ,  $(0.9, 0, 0)$ , y el planetesimal se halla en  $(0, 0, 0.5)$ , con velocidad  $(0.5, 0, 0)$ .

La armonía de las elipses keplerianas tiende a ocularse en la maraña de la complejidad. Si tardó el hombre dos mil años en reconocer las cónicas en un entorno astronómico apacible y diáfano como es nuestro sistema solar, ¿cuánto tiempo le hubiera costado entresacar la ley  $1/r^2$  de la gravitación de ser la Tierra el planetesimal en un entorno dominado por un sistema binario o ternario, compacto, de estrellas?

Finalmente, queda otra sorpresa. Se ha demostrado que en un problema con 5 o más cuerpos gravitatorios, puede darse la circunstancia de que alguno de ellos, digamos  $F$ , sea arrojado por los demás al *infinito* en un tiempo ¡*infinito!* Ahora bien, para que esto ocurra, los restantes cuerpos no pueden permanecer en una región acotada, pues entonces la aceleración de  $F$  tendería cero en su huída, su velocidad se estancaría por ello, y no podría llegar al infinito en un tiempo finito. Luego en su escape  $F$  deberá ser visitado muy de cerca e infinitas veces por alguno de los otros cuerpos, para que le proporcione buenos “empujones”.<sup>23</sup>

## 7. ¿Es estable nuestro sistema solar?

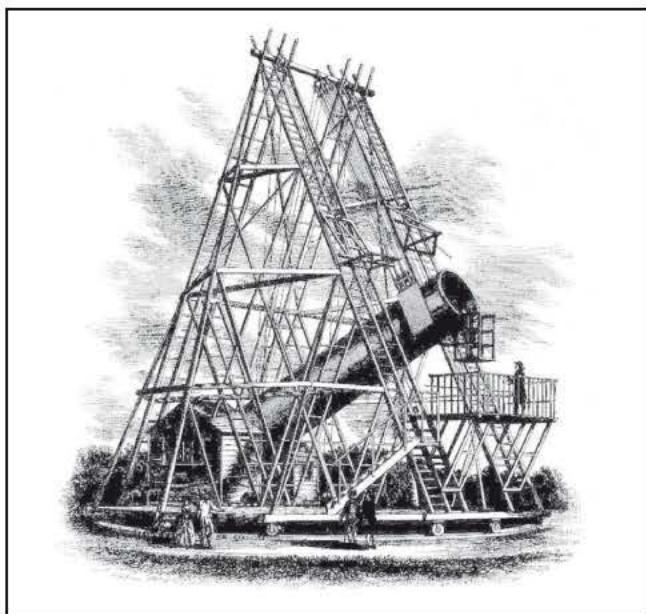
Como ya dijimos antes, la cuestión de la estabilidad del sistema solar preocupó tanto a Newton que llegó a

dejar en manos del Todopoderoso aquellos arreglos necesarios que no pudiera remediar la gravitación. En pleno siglo XXI sigue el problema sin cerrarse del todo.

Se sabe que el sistema solar es caótico. Nuestra Tierra presenta una órbita caótica, con un tiempo de Liapounov  $t_L$  de unos 20 Ma,<sup>24</sup> de modo que resulta imposible predecir en qué lugar de la misma se hallará el planeta dentro de 200 Ma, digamos.

## B. Herschel, el astrónomo músico

Friedrich Wilhelm Herschel (1738-1822), músico compositor de muchas sinfonías y conciertos, ganó sin embargo su puesto en la historia como primer astrónomo en sentido moderno. No solo amplió los confines clásicos del sistema solar con su feliz descubrimiento del planeta Urano (1781),<sup>25</sup> sino que su meticulosa observación astronómica le permitió ampliar, asistido por su hermana Carolina, el rico catálogo de las nebulosas, así como descubrir varias lunas de Saturno y del propio Urano.

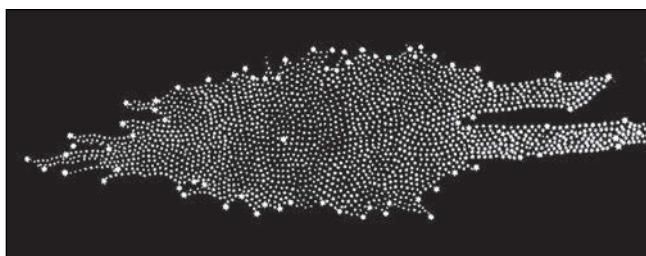


**Figura 7.** El telescopio de Herschel de 12 m.

<sup>23</sup> D. G. Saari, Z. Xia: *Off to infinity in finite time*, AMS Notices 42, 538-546 (1995).

<sup>24</sup> Un error posicional de  $\Delta d_0$  hoy se habrá convertido en  $\Delta d_t \sim \Delta d_0 e^{t/t_L}$  dentro de un tiempo  $t$ .

<sup>25</sup> Herschel lo bautizó como *Georgium sidus*, en reconocimiento al apoyo recibido del rey Jorge III de Inglaterra.



**Figura 8.** Nuestra Galaxia según Herschel. El Sol, según el mapa de Herschel, se halla en una posición bastante central.

Diestro instrumentista óptico, se sirvió de los telescopios que él mismo diseñó y construyó (en número superior a cuatrocientos) para alejar las fronteras del universo. Famoso entre ellos es su gigantesco telescopio reflector de 12 m de tubo (distancia focal) y 1.26 m de apertura (1787), que dominó entre todos los telescopios, a la sazón existentes, durante medio siglo (Fig. 7).

Fue el primero en observar estrellas dobles, constatando así en particular la vigencia de la ley de la gravedad más allá del sistema solar. Infirió que las estrellas presentan movimientos propios, y en particular, que se mueve nuestro Sol, y con él todo su cortejo planetario, hacia la estrella Lambda Herculis. A través del conteo de estrellas en diferentes direcciones coligió una distribución estelar estadística para nuestra Vía Láctea, y propuso una estructura de esta en forma de disco (Fig. 8).

Especuló sobre la naturaleza de las nebulosas, cuyo catálogo amplió en más de 2500 nuevas entradas, e in-



**Figura 9.** Satélite espacial Herschel (ESA).

tuyó que muchas de ellas podían ser verdaderos “universos isla” (lo que hoy reconocemos como galaxias), tal como había imaginado Kant.

Finalmente, su agudo sentido en la observación le llevó a descubrir la zona infrarroja del espectro electromagnético, una banda de radiación que tan importante papel habría de jugar en el futuro de la astrofísica. En recuerdo a esta importante aportación científica de este célebre astrónomo lleva el nombre de Herschel una de las dos sondas espaciales puestas en órbita, en la zona L2 del sistema Sol-Tierra (a 1.5 Gm de la Tierra), por la Agencia Espacial Europea en mayo de 2009. La nave Herschel (Fig. 9) es el primer observatorio espacial en el infrarrojo lejano (55 to 672  $\mu\text{m}$ ). Su misión es observar el universo en esta banda de longitudes de onda, apropiadas, por ejemplo, tanto para el estudio de exoplanetas cercanos como de las primeras estrellas y galaxias del universo más remoto.

### III. EL UNIVERSO EN EXPANSIÓN

En los comienzos del siglo XX el universo observado se reducía a nuestra galaxia, y se creía en su inmutabilidad a gran escala. Tal visión iba a cambiar radicalmente.

#### A. Hubble, el astrónomo togado

Edwin Powell Hubble (1889-1953) se distinguió tempranamente en el deporte (sobre todo en salto de altura); tras estudiar ciencias (matemáticas y astronomía), y cursar derecho y español, ejerció de profesor de física y de español en un instituto y se colegió como abogado (aunque parece ser que nunca llegó a ejercer). Sirvió en las filas del ejército de los EEUU en Francia durante la primera guerra mundial, ascendiendo hasta el grado de comandante, y al acabar ésta, pudo ya dedicarse a su verdadera vocación, la astronomía (“*I knew that even if I were second or third rate, it was astronomy that mattered*”, escribió recordando su juventud).

#### 1. Existencia de un universo extragaláctico

Pronto pudo utilizar el telescopio Hooker (Fig. 10), en Monte Wilson, de 100 pulgadas (2.5 m), y entre



**Figura 10.** Telescopio Hooker de 100 pulgadas (Observatorio de Monte Wilson, California).

1922 y 1923 descubrió con su auxilio la existencia de Cefeidas en algunas nebulosas espirales, entre ellas Andrómeda.

(Recordemos que las Cefeidas son unas estrellas de luminosidad periódicamente variable, conocidas desde 1784; su tamaño es pulsante, y con él la luminosidad, que crece al expandirse la estrella, y disminuye en la fase de contracción. En el año 1908 y siguientes la astrónoma Henrietta Swan Leavitt observó que para estas estrellas, de las que llegó a tratar un colectivo de casi 1800 ejemplares entre nuestra Galaxia y las Nubes de Magallanes, existe una estrecha relación lineal entre su luminosidad y período; este descubrimiento, hecho público en 1912, resultaría básico más tarde para el trabajo de Hubble.

En 1913 el astrónomo danés Hertzsprung consiguió medir por paraje estadístico la distancia a varias Cefeidas de nuestra Galaxia, y de ese modo logró calibrar la relación hallada por Leavitt y así convertir a las Cefeidas en candelas estándar para inferir las distancias astronómicas a las mismas simplemente midiendo el período de su luminosidad.<sup>26)</sup>

El hallazgo de Cefeidas en esas nebulosas espirales permitió a Hubble inferir que nuestra distancia a dichas nebulosas superaba con creces el tamaño de nuestra Vía Láctea y por tanto que existía un universo extragaláctico, con multitud de “universos isla” similares a nuestra Galaxia.

La distancia estimada por Hubble a esas nebulosas con Cefeidas arrastró los errores de calibración y confusión entre los dos tipos de variables Cefeidas, y así atribuyó a Andrómeda una distancia de unos 900 kal. Hoy sabemos que esta distancia es de  $2.54 \pm 0.06$  Mal.

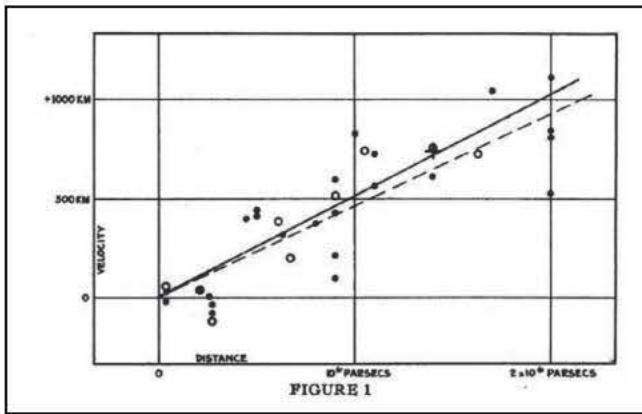
## 2. Expansión del universo

Vesto Melvin Slipher, así como otros astrónomos americanos, habían detectado con anterioridad a 1918 el desplazamiento hacia el rojo de la luz proveniente de las nebulosas espirales (hoy conocidas simplemente como galaxias). Tras la observación de Cefeidas en las nebulosas espirales, Hubble, con el inapreciable auxilio de su ayudante Milton Lasell Humason,<sup>27)</sup> pudo comparar las distancias a 46 galaxias próximas con los desplazamientos al rojo de la luz que nos llega de ellas e inferir, a pesar de su notable dispersión, la existencia de una relación lineal entre desplazamientos al rojo y distancias (Fig. 11). Esta proporcionalidad (que había sido ya propuesta por George Lemaître con dos años de anterioridad) se conoce como ley de Hubble (más propiamente, ley de Lemaître-Hubble), y se escribe como

$$cz = H_0 d, \quad (2)$$

<sup>26</sup> Un par de advertencias: 1/ Hay dos clases de Cefeidas, unas jóvenes y ricas en metales (Cefeidas de Población I o Cefeidas clásicas), y otras viejas y bajas en metalicidad (Cefeidas de Población II), cada clase con su relación lineal. Ordinariamente nos referiremos a las clásicas, por ser las más luminosas para igual período y por tanto las más fáciles de divisar. Hasta el año 2008 no se ha dispuesto de una calibración precisa al 1%. 2/ Hertzsprung cometió en un error de cálculo en su calibración, acercando las estrellas a nosotros en un orden de magnitud.

<sup>27</sup> Primero, arriero de mulas para el transporte de material desde Sierra Madre hasta Monte Wilson durante la construcción del observatorio, luego portero empleado en éste, y después mozo ayudante, su natural talento y enorme vocación para la observación astronómica fueron muy pronto reconocidos con su nombramiento como miembro de la plantilla científica, a pesar de carecer de estudios incluso a nivel medio.



**Figura 11.** Gráfico original del trabajo histórico de Hubble.

donde  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $z$  es el desplazamiento relativo al rojo

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}, \quad (3)$$

siendo  $\lambda, \lambda'$  las longitudes de onda de un fotón en la emisión y la longitud de onda de ese fotón en la recepción,  $d$  es la distancia a la galaxia considerada, y  $H_0$  una constante de proporcionalidad, conocida como constante de Hubble. El subíndice 0 indica que el factor  $H$  se refiere a la época actual.<sup>28</sup>

Slipher había asociado al desplazamiento al rojo una velocidad de recesión ( $v = cz$ ), como si de un efecto Doppler no relativista se tratase. Siguiendo a Slipher, Hubble reformula la anterior proporcionalidad como

$$v = H_0 d, \quad (4)$$

es decir, las galaxias huyen de la nuestra con una velocidad de recesión proporcional a su distancia.<sup>29</sup>

La lectura actual es similar, pero se sabe que esta última fórmula es válida solo si  $0.01 \lesssim z \lesssim 0.1$  (no se aplica a las galaxias de nuestro Grupo Local ni a las muy lejanas). Asimismo, podemos puntualizar diciendo que no se trata de un efecto Doppler, sino que es la expansión métrica del propio espacio la responsable de

ese desplazamiento al rojo. Más que de una fuga de galaxias debemos pensar en una inflación o estiramiento del espacio a gran escala; a escala galáctica (o a escala de un cúmulo galáctico) el espacio interestelar (o intergaláctico) no se expande; la atracción gravitacional mutua entre las estrellas de una galaxia o entre las galaxias de un cúmulo supera en mucho la repulsión que dinamiza la expansión.

El valor obtenido por Hubble para  $H_0$  fue de unos 500 km/s/Mpc, que es un orden de magnitud mayor que el hoy aceptado,<sup>30</sup> a saber,

$$H_0 = 70.1 \pm 1.3 \text{ km/s/Mpc}. \quad (5)$$

## B. Einstein, el cosmólogo arrepentido

En 1917 Albert Awrohom Einstein desarrollaba el primer modelo cosmológico basado en su relatividad general. Convencido de la inmutabilidad de los cielos, se ve obligado a introducir una nuevo término en sus famosas ecuaciones que simula una repulsión cósmica necesaria para impedir el colapso de su universo estático. Las ecuaciones corregidas son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (6)$$

donde  $\kappa := 8\pi G_N/c^4$ . El término añadido  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , llamado término cosmológico, es interpretable como asociado a un nuevo término de energía-tensiones  $T_{\mu\nu}^{\text{vac}} := (\Lambda/\kappa)g_{\mu\nu}$  típico del vacío, con densidad y presión dadas por

$$\rho^{\text{vac}} = \Lambda/\kappa, \quad p^{\text{vac}} = -\Lambda/\kappa. \quad (7)$$

En particular, el vacío satisface la ecuación de estado

$$\rho^{\text{vac}} + p^{\text{vac}} = 0. \quad (8)$$

La constante  $\Lambda$  es conocida como constante cosmológica, y su valor, que comentaremos más adelante, es uno de los grandes misterios con que se enfrentan aún los físicos.

<sup>28</sup> Para una discusión más detallada de esta ley, ver, por ejemplo, el texto de una conferencia pasada sobre cosmología: A. Galindo, *La nueva cosmología*.

<sup>29</sup> G. Lemaître, *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra galactiques*, Ann. Soc. Sci. Brux. A 47, 49–59 (1927). E. P. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci. 15, 168–173 (1929).

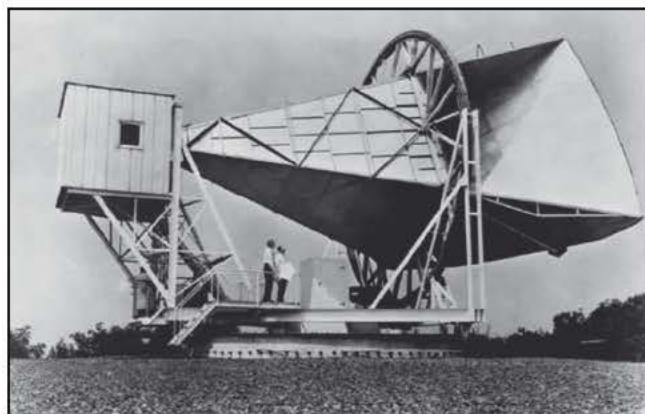
<sup>30</sup> [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr3/parameters\\_summary.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr3/parameters_summary.cfm)

## C. Penzias y Wilson, los astrofísicos que descubrieron el fulgor de las ascuas del Big Bang

El físico Arno Allan Penzias (de origen alemán, y nacionalizado en EEUU) y el astrónomo Robert Woodrow Wilson descubrieron fortuitamente en 1964 la radiación más importante de toda la historia del universo. Estaban trabajando con un radiómetro tipo Dicke, con antena de cuerno de gran sensibilidad, que ellos mismos habían montado para la Bell Telephone cerca de Holmdel Township (New Jersey) para las comunicaciones por satélite (Fig. 12). Se encontraron con un inesperado exceso de 3.5 K de temperatura de antena que no sabían cómo justificar. Llegaron a pensar que podía estar originado por los excrementos que depositaban las palomas en la antena; mas, una vez limpiados, el ruido persistía. Además, esta señal no cambiaba al variar la dirección de observación. Venía de todas las partes del cielo, y en cualquier época del año, con similar intensidad.

Ignoraban Penzias y Wilson que algunos astrofísicos (Gamow, Dicke, Peebles, ...) habían pensado en algún fondo de radiación de microondas, con temperatura del orden de 5-10 K, que, procedente del BB, permearía el universo. Tal radiación sería necesaria para que tras el BB, supuesto éste enormemente caliente y denso (como sugería la expansión del universo vista extrapolada hacia el pasado remoto), el enfriamiento progresivo debido a la expansión llegase a un momento en que la nucleosíntesis de protones y neutrones crease los núcleos más ligeros con las cosmoabundancias observadas.

Alguien les aconsejó que hablasen con el grupo de Dicke en Princeton.<sup>31</sup> Lo hicieron. Peebles cuenta que Dicke, tras recibir esa llamada, exclamó: *Well, boys, we've been scooped.*<sup>32</sup> Porque el grupo de Dicke (en el que se hallaban Peebles, Wilkinson y Roll) estaba construyendo también un radiómetro para buscar esa radiación de fondo. Acordaron que Penzias y Wilson publicarían sus resultados, refiriendo para su interpre-

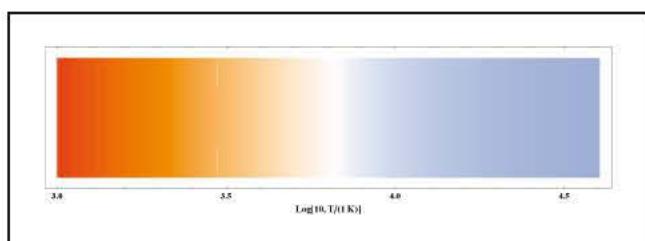


**Figura 12.** Histórica antena usada por Penzias y Wilson (NASA).

tación teórica al artículo que Dicke et al. publicarían al lado analizando el hallazgo de Penzias y Wilson como testigo fehaciente de la existencia del BB.<sup>33,34</sup> Lo que habían encontrado Penzias y Wilson no era sino el tenue resplandor de los resoldos de la Gran Explosión, la luz más vieja que hay en el universo, el descubrimiento más importante en cosmología de todos los tiempos.

### 1. Los fotones fósiles del BB

El universo fue inicialmente opaco a la radiación. Consistía en una “sopa” espesísima de luz y materia, de fotones y de quarks, leptones, gluones, y partículas  $W^\pm$  y  $Z$ ; luego el color se confinó, y los quarks y gluones dieron paso a los protones y neutrones; cuando las



**Figura 13.** Color de un cuerpo negro a temperatura entre 1000 K y 40000 K. En abscisas,  $\log_{10}(T/1 \text{ K})$ . La línea blanca indica la temperatura de recombinación del universo.

<sup>31</sup> Ese alguien fue Bernard Burke, del MIT.

<sup>32</sup> Bien, amigos, se nos han adelantado.

<sup>33</sup> Penzias, A.A., Wilson, R.W., *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, *Astrophys. J.* **142**, 419-421 (1965).

<sup>34</sup> Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., Roll, P. G., Wilkinson, D. T., *Cosmic Black Body Radiation*, *Astrophys. J.* **142**, 414-419 (1965).

temperaturas lo permitieron (transcurrido un minuto tras el BB) el universo se convirtió durante un par de minutos en un gigantesco horno termonuclear, en el que protones y neutrones se fusionaron para dar los primeros núcleos ligeros (D, He, Li). Tuvieron que seguir descendiendo las temperaturas hasta unos 3 kK (a los 380 ka tras el BB) para que aquel plasma primigenio totalmente ionizado, que dificultaba extraordinariamente el movimiento de los fotones, iniciara su neutralización formándose los primeros átomos. Tras esta recombinação, el universo se hizo transparente a la luz, que por fin pudo ya comenzar a atravesarlo a sus anchas. Sus fotones son los que integran la radiación cósmica de fondo (RCF). Constituyen la luz fósil de aquel inmenso horno, luz que se ha ido enfriando tras los 13.5 Ga que ha tardado en llegar a nosotros. Su temperatura actual de unos 3 K indica que las dimensiones del universo han crecido desde entonces en un factor  $10^3$  aproximadamente.

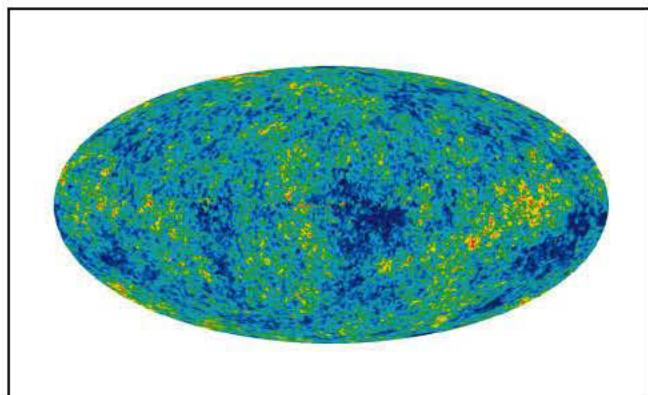
Esta radiación que hoy nos llega no está en la parte visible del espectro electromagnético, sino en la zona de microondas, siendo más intensa para longitudes de onda en torno a los 2 mm; se la conoce también como fondo cósmico de microondas (FCM). Aproximadamente un 1% de la “nieve” que aparece en las pantallas de TV tras el cierre de emisión se debe a esta radiación de fondo.

El universo presentaba un color naranja brillante en esa época de liberación de la luz (Fig. 13), en que la temperatura de los fotones era de 0.256 eV, es decir, 2975 K, y por tanto la radiación caía en el infrarrojo cercano (intensidad espectral por unidad de frecuencias (longitudes de onda) máxima para  $\lambda'_{\text{máx}} = 1.719 \mu\text{m}$  ( $\lambda_{\text{máx}} = 1.063 \mu\text{m}$ )).<sup>35</sup>

#### IV. LA NUEVA COSMOLOGÍA COMO CIENCIA DE PRECISIÓN

##### A. Mather y Smoot, y el baño cósmico de fotones

Cuando la sonda espacial COBE (*Cosmic Background Explorer*) fue puesta en órbita en diciem-

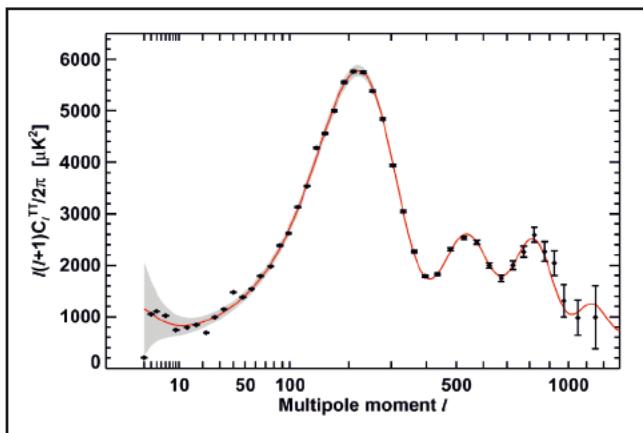


**Figura 14.** Mapa de anisotropías con los datos WMAP7y.

bre de 1989, en sus primeros nueve minutos de funcionamiento registró ya datos sobre el espectro de frecuencias del FCM que se ajustaban extraordinariamente bien a la curva planckiana de la radiación de un cuerpo negro. El satélite COBE estuvo operativo hasta diciembre de 1993, y en ese período de cuatro años suministró información tan valiosa para la cosmología moderna que sus dos responsables científicos, John C. Mather y George F. Smoot, serían muy pronto galardonados con el Nobel de Física 2006.

La sensibilidad del COBE era de unos cuantos  $10^{-5}$  (equivalente a apreciar ondas centimétricas sobre la superficie del océano, vistas desde unos km de altitud), y su resolución angular de hasta  $7^\circ$  (unas 14 veces el diámetro angular de la Luna llena). El equipo COBE anunció en 1992 la detección de anisotropías en la distribución de la temperatura del FCM sobre el esfera celeste; dichas anisotropías eran los ecos electromagnéticos de las ligeras irregularidades en la distribución de materia/energía en el universo primitivo que actuaron como semillas para las grandes estructuras astrofísicas que se formarían más tarde por acúmulo gravitacional. Este importante hallazgo cosmológico supuso un fuerte respaldo a los modelos inflacionarios. Stephen Hawking alabó el descubrimiento como “*the greatest scientific discovery of the century.*” Las fluctuaciones primigenias se cree que se produjeron a los  $10^{-35}$  s del BB, y su estudio permite testar la física fundamental a energías muchos órdenes de magnitud mayores que las que se logran con los aceleradores del presente y del futuro.

<sup>35</sup> Provenía de un blanco brillante, y este a su vez de un blanco azulado que a temperaturas enormes se asemejaría a un azul pálido; e iba a pasar a ser un rojo brillante y luego un rojo apagado, antes de desaparecer de la vista.



**Figura 15.** Picos acústicos con los datos WMAP7y.

## V. DOS MISIONES EXCEPCIONALES EN LOS COMIENZOS DEL SIGLO XXI

### A. WMAP

En junio del año 2001 la NASA mandaba al espacio el satélite MAP (*Microwave Anisotropy Probe*) para medir anisotropías con  $\theta \gtrsim 15'$  y sensibilidad similar a la de COBE, colocándolo en una órbita a 1.5 millones de km de la Tierra, en el punto de Lagrange L2 del sistema Sol-Tierra.

Fue rebautizada con el nombre WMAP, en recuerdo al eminente astrofísico David Todd Wilkinson (Princeton), miembro del equipo científico de la misión, fallecido en el 2002. Esta sonda ha suministrado hasta la fecha valiosos datos sobre las anisotropías del FCM (Figs. 14, 15). El día 11 de febrero de 2003 la NASA hacía públicos los resultados extraídos de los datos enviados por WMAP tras su primer año de operación. Fueron sensacionales, pues mejoraban notablemente en precisión a los anteriormente conocidos.

A medida que se recibían y analizaban más datos, NASA ha ido haciéndolos públicos en sucesivas entregas (2005, 2007, y 2009). De acuerdo con el análisis más reciente (WMAP7yr) de enero de 2010, que combina los datos del WMAP a lo largo de 7 años, con los suministrados por otros proyectos, tenemos estos valo-

res para algunos de los parámetros cosmológicos de interés:<sup>36</sup>

1. Edad del Universo desde el BB:  $t_0 = 13.75 \pm 0.11$  Ga.

2. Composición:

$$\begin{aligned}\Omega_{\Lambda 0} &= 0.728^{+0.015}_{-0.016}, \\ \Omega_{cm0} &= 0.227 \pm 0.014, \\ \Omega_{b0} &= 0.0456 \pm 0.0016.\end{aligned}\quad (9)$$

donde  $\Omega_{\Lambda 0}$  es la fracción  $\rho_{\Lambda 0}/\rho_{c0}$  de la densidad de energía oscura respecto de la densidad crítica  $\rho_{c0} := 3H_0^2/(8\pi G_N)$  del Universo en el momento actual  $t = t_0$ ,  $\Omega_{cm0}$  es la fracción  $\rho_{cm0}/\rho_{c0}$  de la densidad de materia oscura fría respecto de la densidad crítica del Universo, y  $\Omega_{b0}$  es la fracción  $\rho_{b0}/\rho_{c0}$  de la densidad de materia bariónica respecto de dicha densidad crítica, todo ello referido al momento actual.

3. Parámetro de Hubble:  $H_0 = 70.4^{+1.3}_{-1.4}$  km/s/Mpc.

4. Temperatura del FCM:  $T_0 = 2.72548 \pm 0.00057$  K.

Obsérvese que  $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{cm0} + \Omega_{b0} = 1.001 \pm 0.032$ , por lo que, dada la pequeña relevancia cuantitativa actual de la radiación electromagnética ( $\Omega_{\gamma 0} = 5 \times 10^{-5}$ ) y de los neutrinos ( $\Omega_{\nu\bar{\nu}0} \leq 0.015$ ) en el cómputo energético a gran escala, se deduce la planitud global, en muy buena aproximación, de las secciones espaciales en nuestro Universo.

Añadamos, por último, que la última entrega de WMAP ha conseguido perfilar completamente el tercer pico acústico, como se aprecia en la Fig. 15, así como comprobar que las direcciones de polarización del FCM en torno a las manchas frías y calientes son las esperadas.

### B. Planck

El objetivo de la misión europea Planck de la AEE es conseguir el mapa de temperaturas del FCM con una sensibilidad de unos microkelvin, más precisa-

<sup>36</sup> E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. R. Nolta, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright, SEVEN YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL INTERPRETATION, eprint arXiv10014538 (2010). D. J. Fixsen, THE TEMPERATURE OF THE COSMIC MICROWAVE BACKGROUND, The Astrophysical Journal 707, 916 920 (2009).

mente, de  $2 \times 10^{-6}$  K, una resolución angular de hasta 5' de arco en las frecuencias más altas, y nueve rangos de frecuencia (con frecuencias centrales entre 30 y 857 GHz). Con los datos que se obtengan se espera determinar los parámetros cosmológicos fundamentales con precisión del orden de un 1 %.

Se lanzó el 14 de mayo de 2009 junto con la sonda Herschel, y ambas están en distintas órbitas alrededor del punto L2 de Lagrange del sistema Sol-Tierra.

Planck puede medir la polarización lineal del FCM (no la circular, pero esto no importa, pues se estima que el FCM carece de ella).

Planck recorre una órbita Lissajous en torno al punto L2, y gira sobre su eje a 1 rpm. Su eje se dirige siempre en dirección opuesta al Sol, de modo que el panel solar de la sonda y esta misma sirven de apantallamiento de la radiación solar, impidiendo que su carga útil reciba iluminación del Sol, de la Tierra y de la Luna. Su órbita en torno al L2 subtende un ángulo de unos 15° vista desde la Tierra. Sus instrumentos barren el cielo en círculos que a su vez precesionan a razón de 1°/día, por lo que en 6 meses registran datos de todas las zonas del cielo. Esto lo harán dos veces, a lo largo del tiempo de duración de la misión (15 meses).

## Los sonidos del BB

Silencio inicial.<sup>37</sup> Luego un alarido decreciente que da paso a un estruendo profundo y termina en un silbido ensordecedor. Así suena la música del universo a lo largo de su primer millón de años, comprimidos en 10 s, y desplazados al rango de frecuencias que nuestros oídos pueden detectar. Todo hay que ponerlo a un nivel de 110 db (como en un concierto rock) para que la simulación sea fiel, y como en los conciertos de rock, al final un estallido luminoso, durante el cual las frecuencias altas se diluirán en las primeras estrellas del universo, y las más bajas en las primeras galaxias.

Pero, ¿realmente se produjeron esos sonidos?

Veamos. En vacío no hay sonidos. Pero el universo nunca ha estado vacío. En su época primera, joven, las partículas existentes formaban como una "atmósfera cósmica" que llenaba el universo, un gas muy caliente y que con el tiempo llegó a ser muy tenue. (Pensemos, por ejemplo, que cuando la recombinación, la temperatura era de unos 3000 K, la densidad de materia bariónica de unos 130 átomos/cm<sup>3</sup>, y la presión de unos 10 femtobar.) Y en este fluido, se generó sonido.

La velocidad del sonido en materia oscura es nula, pues esa materia no ejerce presión, por lo que  $c_s^2 = \partial p / \partial \rho = 0$ . Pero para el plasma bariónico (protoones, electrones y fotones) antes de la recombinación la presión estaba dominada por los fotones, mucho más numerosos ( $n_\gamma / n_p \sim 10^9$ ), y por tanto era proporcionalmente más alta que la de las partículas cargadas (p.e.  $p \approx p_\gamma = 20 \mu\text{bar}$ ). El gas de fotones es un gas relativista, con ecuación de estado  $p_\gamma = \frac{1}{3} \rho_\gamma$ , y por tanto en él la velocidad del sonido es muy alta:  $c_s = c / \sqrt{3} \approx 173000 \text{ km/s}$ . La presencia de los barioenes modifica ligeramente  $c_s$ , que pasa a ser

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_b}{\rho_\gamma}} \right)^{1/2} \approx \frac{c}{\sqrt{3[1 + 680/(1+z)]}} \quad (10)$$

donde todos los parámetros deben corresponder al mismo instante para el que calculemos la velocidad del sonido.

¿Lo hubiéramos podido oír de haber existido entonces? No. Dejando aparte que el calor nos hubiera sofocado, pensemos que la nota LA musical de afinar tiene 440 Hz, mientras que la frecuencia del sonido del universo era típicamente de entre 1/(20 ka) y 1/(200 ka), digamos 1/(50 ka), esto es, entre  $10^{-12}$ - $10^{-13}$  Hz, o lo que es lo mismo, unas 50 octavas por debajo del LA musical, una voz realmente baja (equivale a poner siete pianos, de 7 octavas cada uno, empalmados en frecuencias).<sup>38</sup> ¿Por qué? Porque la longitud de onda

<sup>37</sup> El contenido de esta sección se basa en la magnífica exposición de Whittle sobre la acústica del Universo primitivo, en Mark Whittle Homepage, <http://www.astro.virginia.edu/~dmw8f>.

<sup>38</sup> La velocidad  $c_s$  del sonido en ese gas cósmico es comparable a la de la luz en vacío (concretamente del orden de  $c/\sqrt{3}$ ), dada la importancia predominante de los fotones, por su numerosidad que excede a la de los bariones en un factor  $10^9$  en ese fluido bariónico fotónico muy acoplado antes de la liberación de la luz. Por tanto la longitud de onda de ese sonido estuvo limitada por  $\lesssim c_s t_{rec} \sim 200$  kal.

sonora viene a ser del orden del tamaño del objeto que la produce, y el universo del que estamos hablando (aunque pudiera ser infinito de tamaño) había nacido hacia poco tiempo, y la caja resonante era a lo sumo del tamaño recorrido por la luz desde el BB.

El oído humano percibe en el rango de frecuencias entre 30 Hz y 15 kHz, y en rango de intensidades entre 0 y 130 dB.

El silencio inicial es claro: en la expansión inicial las partículas no se alcanzaban unas a otras, era una pura y libre expansión, sin compresiones. Pero la distribución de partículas no era uniforme, y pronto se formaron agregaciones de materia oscura que produjeron pozos de potencial en los que cayó el gas bariónico cósmico. Esas caídas generaron compresiones y por rebote rarefacciones, es decir, movimiento oscilante del gas, y con ello, sonido. Al ir pasando el tiempo, los pozos se hicieron más grandes, aumentando el tiempo de oscilación, y con ello disminuyendo la frecuencia del sonido, y creciendo en amplitud. Cuando  $t \sim 0.5$  Ma, la longitud de onda era de unos 200 kal, y la variación relativa de presión entre la parte alta de los pozos y sus fondos era de  $\sim 10^{-4}$ , esto es, de unos 110 db.

#### ¿Fue un acorde armonioso?

Casi, diríamos. El espectro de frecuencias presenta picos como si se tratara de un acorde musical. Un armónico fundamental y varios secundarios. Como instrumento musical, el universo dejaba bastante que desear. Pero no era su misión el producir un sonido placentero que se tardaría en escuchar miles de millones de años. Si se limpia el espectro en torno a las frecuencias centrales de sus picos, suena mejor, pero tampoco es Mozart. Empieza siendo una tercera mayor (4 semitonos, como de DO a MI), majestática, para terminar en una tercera menor (3 semitonos, como de DO a MI<sup>b</sup>), un tanto melancólica.

#### ¿Por qué el silbido final?

Empieza este cuando la edad del universo es de unos 380 ka. En ese momento la materia bariónica se neutraliza, y la niebla en que estaba sumido el universo

se levanta, liberándose la luz. Los fotones, cuyo número superaba en un factor  $10^9$  al de protones y electrones, eran los principales encargados de suministrar la presión que hacía rebotar al gas cuando caía al fondo de los pozos. Mas al liberarse, dejaron de hacerlo, y con ello desaparece las oscilaciones del gas y el verdadero sonido. El silbido es simplemente algo artificial incorporado a la música para sugerir que ahora el gas se concentra cada vez más en los pozos de materia oscura.

#### ¿Cómo sabemos todo esto?

Por el FCM. Al principio, el universo estuvo lleno de una niebla resplandeciente, con la que nuestros ojos deben toparse mirando suficientemente lejos, y no importa en qué dirección. No la vemos, porque está desplazado, por la expansión, hacia el rojo, situándose su luz en la zona de microondas. Detectamos con radiómetros sus fotones. Nos llegan tantos como fotones luminosos recibimos de la Luna llena (unos  $10^{16-17}$  por  $m^2/s$ ). Si nuestros ojos fueran sensibles a esos fotones, podríamos ver de noche nuestra sombra "cósmica" a la luz de la creación. Fantástico, ¿no?

Los sonidos que presentamos han sido sintetizados por Mark Whittle. Para ello ha tomado el espectro angular de las anisotropías del FCM, ha tomado el momento angular como frecuencia (identificando el primer pico a  $\ell = 220$  con el LA de 220 Hz), y limpiando el espectro de corrupciones astrofísicas locales. Los momentos angulares juegan en este asunto el papel de las frecuencias. El espectro angular de anisotropías del FCM se extiende entre  $\ell = 2$  y  $\ell \approx 2000$ . El momento angular está relacionado con los ángulos (medidos en grados) como  $\theta \approx 180^\circ/\ell$ .

#### ¿Y el sonido de la era cuántica?

Ah, elemental. Ruido puro. El universo fue sabiamente igualitario. Todas las frecuencias estuvieron igualmente representadas en su inicio. Todas las escalas estuvieron presentes, desde las que habrían de convertirse en cúmulos de galaxias hasta las modestas estrellas.