Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 105, Nº. 2, pp 197-216, 2012
XIV Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

LA FÍSICA CLÁSICA Y RELATIVISTA Y LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS EN EL SISTEMA SOLAR Y EN EL UNIVERSO. LA MATERIA FRACTAL

DARÍO MARAVALL CASESNOVES *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid.

Hacemos un largo recorrido desde los griegos a nuestros días en que comienza el empleo de la Teoría de la Relatividad y de la Mecánica Cuántica en el estudio del sistema solar y del universo. El hombre desde sus comienzos ha obtenido el conocimiento del universo en el que estamos inmersos mediante la observación y el cálculo basado en las Matemáticas y en la Física.

En el siglo XX nacen los nuevos modelos del universo estático de Einstein y de De Sitter primero, y de los universos dinámicos que comienzan en Lemaitre y Friedmann o universos en expansión. Aparecen los misteriosos agujeros negros con Schwarzschild, la fuga de las galaxias y el efecto Hubble del corrimiento hacia el rojo de la luz procedente de las galaxias.

Ya son las geometrías no euclídeas las que rigen en el universo y no la vieja geometría euclídea.

El gran progreso matemático y físico por una parte y las modernas exploraciones por la radioastronomía y los muy potentes telescopios modernos y los satélites artificiales, los viajes a la luna y mucho más lejos, bien sea del hombre o de los aparatos, han sido los factores que han creado las modernas Cosmología, Cosmogonía y Astronomía.

El espacio, el tiempo, la materia y el movimiento son los cuatro pilares sobre los que descansa la Física. Si falla uno de ellos, la Física se desploma. Analizaremos estos cuatro conceptos.

El espacio es como una caja que contiene a la materia. El tiempo es como un río en el que se mueve la materia. De aquí los nombres de espacio-caja y tiempo-río.

La moderna teoría de los fractales quizá pueda explicarnos las que hemos llamado materia y energía obscuras tan misteriosas.

Esta conferencia es la continuación de cuatro conferencias que ya hemos dado y que han sido publicadas. Son éstas “Los métodos matemáticos de la Astronomía y de la Cosmología” en la Real Academia de Ciencias en 2008-2009 y otras tres publicadas por los Amigos de la Cultura Científica en los años 1992, 1993 y 1994 que llevan por títulos “El universo de Einstein”, “El legado de Galileo en la evolución de la Física hasta hoy” y “El sistema solar”. La penúltima de éstas ha sido digitalizada por el Museo de Historia de la Ciencia de Florencia.

Existen probabilidades muy pequeñas de descomposición de un protón en un neutrón y un positón, y también de un neutrón en un protón y un electrón; esta última probabilidad es más pequeña.

Existen también probabilidades muy pequeñas de creación de un fotón por aniquilación de un electrón y un positón. Todo ello da origen al planteamiento y resolución de procesos estocásticos muy curiosos, utilizando ecuaciones en derivadas parciales que condicionan las funciones características de las variables aleatorias que representan a estas partículas. Se pone así de manifiesto que estos procesos estocásticos son los mismos que surgen en una Ciencia tan lejana de la que ahora nos ocupa como en la Sociología en el problema que hemos denominado doble emigración de individuos entre dos poblaciones distintas.

Así mismo las funciones de Bessel y otras funciones trascendentes desempeñan un papel muy importante en las Ciencias que ahora nos ocupan.

Nos ocupamos también de los Universos tanto estático como dinámicos introducidos por la Relatividad General a que antes hicimos referencia.

Desde los tiempos más remotos el hombre se ha preocupado por el origen del Universo (objeto de la Cosmogonía) y sobre la forma del Universo (objeto de la Cosmología), y con problemas íntimamente emparentados con los anteriores, que son objeto de la Astronomía, ciencia ya cultivada en la antigüedad y la Mecánica celeste que se desarrolló con profundidad en el siglo XIX, y la Astrofísica que prácticamente es iniciada en nuestros días.

Weyl, un gran físico matemático alemán, escribió un libro extraordinario sobre la Teoría de la Relatividad titulado “Tiempo Espacio Materia” que tuvo una primera edición en 1917, seguido muy rápidamente de una segunda y una tercera la escribió en 1918 y se publicó en 1919. En el prólogo de la misma, al principio del mismo dice “El espacio y el tiempo son las formas de existencia del mundo real. Un fragmento determinado de materia ocupa en un instante dado una parte determinada de espacio, de allí nace la noción de movimiento que une últimamente estas tres representaciones”. En aquella época no se conocían los fractales, y por tanto la posibilidad de la existencia de materia fractal. Por tanto me parece que el anterior párrafo de Weyl debe modificarse en el sentido de que la materia fractal puede existir en el espacio sin necesidad de ocuparlo, como explico en la nota 1ª y he explicado en otras publicaciones y conferencias.

De la Cosmogonía se ocupan todas o casi todas las mitologías, después varios filósofos, y por último los físicos y los matemáticos, y hoy día no se puede decir que existan una Cosmogonía y una Cosmología universalmente aceptadas, al igual que existen una Mecánica, una Termodinámica o un Electromagnetismo casi universales, por no decir enteramente universales.

Antes de Copérnico ya la Astronomía estaba muy avanzada, y con él se da un gran paso hacia adelante, al sustituir el geocentrismo por el heliocentrismo para la explicación de los movimientos de planetas, satélites y cometas.

Hasta Galileo se puede decir que existen dos Físicas, una válida para lo que sucede en la superficie terrestre, es la Física sublunar aplicable a un mundo corruptible y cambiante, y la Física celeste aplicable a un mundo incorruptible e inmutable. Sus importantes descubrimientos astronómicos, debidos a su genio, a su capacidad de trabajo y a su habilidad industrial en obtener o fabricarse un anteojo mucho mejor que los restantes, acabaron con esta idea de dos Físicas, y prepararon el camino para la unificación de las dos Físicas en una sola ciencia válida para la tierra, el sol o las estrellas fijas. Esta tarea queda ultimada con el descubrimiento de la gravitación universal por Newton, en virtud de la cual son las mismas fuerzas las que hacen caer un grave sobre la superficie de la tierra, que las que hacen girar los planetas alrededor del sol, cumpliendo las leyes de Kepler. Pero Newton hace algo más, aplica el cálculo infinitesimal descubierto por él y por Leibniz a la Mecánica, establece las ecuaciones diferenciales que dan la aceleración en función de las fuerzas, que permiten resolver el problema abierto de hallar el movimiento de un punto material, conocidas las fuerzas que actúan sobre él, y el problema inverso de determinar cual es la fuerza o cuales son las fuerzas que actuando sobre un punto material le obligan a seguir un movimiento conocido de antemano.

El siglo XVIII después de Newton, conoce un desarrollo impresionante de lo que llamamos mecánica clásica, se determinan los movimientos de sistemas materiales, formados por la reunión de un número finito y hasta infinito de puntos materiales, y en especial de los sólidos, que son aquellos sistemas para los que la distancia entre dos puntos cualesquiera permanece invariable, y se separa el estudio de estos movimientos en dos, que son el del centro de gravedad del sistema, y el movimiento relativo de un sistema alrededor de su centro de gravedad. Se hacen dos clasificaciones de las fuerzas, unas de ellas las interiores y las otras las exteriores, de modo que las primeras son las que se ejercen entre dos puntos cualesquiera del sistema, la cual está dirigida según la recta soporte que une dichos puntos, de modo que la que ejerce un punto sobre el otro es igual y opuesta a la que ejerce este último sobre el primero (principio de la igualdad de acción y de la reacción); fuerzas exteriores son aquellas que no son interiores. Esta distinción de las fuerzas en interiores y exteriores es importante, porque en el movimiento del centro de gravedad se puede prescindir de las fuerzas interiores. Además en el caso del sólido, que aunque es un caso particular, es un caso muy importante, las fuerzas interiores no producen trabajo.

Se aprende en esa época que imponer enlaces de naturaleza geométrica entre los puntos materiales de un sistema, e incluso a un punto material solo, por ejemplo obligarle a moverse sobre una curva o superficie, equivale de hecho a ejercer una fuerza sobre el sistema o el punto material, sometido a enlaces, lo cual no tiene nada de intuitivo, y es consecuencia de la aplicación de las ecuaciones matemáticas a los problemas mecánicos. A esta clase de fuerzas se las llama de enlace y tienen la propiedad de que no producen trabajo durante el movimiento, a las restantes fuerzas se las llama directamente aplicadas. Se aprende que sistemas o puntos materiales sobre los que no actúa ninguna fuerza, pero están sometidas a enlaces, pueden adquirir movimientos únicamente aplicados, diríamos que sofisticados. Un ejemplo sencillo es el del movimiento de un punto material sobre el que no actúa ninguna fuerza y que es obligado a moverse sobre una superficie, se mueve entonces con velocidad constante y describe como trayectoria lo que se llama una geodésica de la superficie, que es la mínima distancia entre dos puntos de la superficie, equivale a las “rectas” sobre la superficie, se trata de una generalización de la ley de inercia descubierta por Galileo, según la cual un punto que se mueve libremente en el espacio o sobre un plano, sin que actúe sobre el mismo ninguna fuerza, lo hace con movimiento rectilíneo y uniforme.

Este hecho tan simple de la ley de inercia, tiene una cierta trascendencia en la filosofía, es una creencia muy extendida y que ha sido afirmada por importantes filósofos y científicos, que todo cambio requiere una explicación, o lo que es lo mismo que todo cambio es el efecto de una causa. Esto no es así, en el caso de la ley de inercia, el movimiento rectilíneo y uniforme, que es un cambio de posición en el tiempo del móvil, no requiere causa ni explicación, lo que requiere una causa no es el cambio de posición, sino el cambio de velocidad, es decir la aceleración; es la aceleración la que es causada por una fuerza. En toda la Mecánica clásica son dos cambios de velocidad (las aceleraciones) lo que hay que explicar y no los cambios de posición, y la explicación viene de las ecuaciones de Newton que igualan el producto de la masa por la aceleración a la fuerza.

Hacia fines del XVIII, Lagrange revoluciona la mecánica newtoniana y creó lo que se llama Mecánica analítica, por el empleo de unas ecuaciones fundamentales que llevan su nombre, consigue resolver “mecánica” o automáticamente los problemas mecánicos. Todo problema mecánico para su resolución requiere un planteamiento geométrico, que es lo que los franceses llaman “la puerta en ecuaciones” del problema, pero lo que Lagrange consigue es reducir al mínimo el empleo de la geometría y del dibujo, este solamente necesario para poder escribir sus ecuaciones, y una vez escritas éstas, ya no hacen falta los dibujos, éstos se pueden tirar ya, todo lo que viene a continuación es puro cálculo y análisis matemático, de ahí el nombre de analítica que lleva esta Mecánica. Al describir Lagrange un sistema material por un número finito de coordenadas generalizadas (igual al número de grados del sistema) nos vamos aproximando al concepto de “espacio abstracto”.

Contemporáneo de Lagrange es Laplace, el cual da una gran importancia a la aplicación de la Mecánica clásica a la Astronomía, estableciendo una nueva ciencia que lleva el nombre de Mecánica celeste. Resulta que los movimientos de los planetas alrededor del sol, no son tan simples como suponen las elipses keplerianas, sino que existen unas anomalías explicables, porque no están el sol y un planeta solos atrayéndose según la ley de la gravitación universal de Newton, sino que están en compañía de otros muchos planetas y satélites de modo que cada uno de ellos atrae a los demás, y es a su vez atraído por éstos, es lo que se llama el problema de los n cuerpos (la teoría más elemental de las elipses keplerianas, es el problema de los dos cuerpos). Este problema de los n cuerpos todavía no ha sido resuelto en nuestros días, en toda su espantosa generalidad, ya solo el problema de los tres cuerpos es sumamente difícil y a él hizo aportaciones valiosísimas Poincaré. Con la Mecánica celeste laplaciana, los astrónomos están en posesión del instrumento científico necesario para construir una Astronomía matemática de precisión. Pero también existen otros tipos de complicaciones, ni el sol ni los planetas son puntos materiales, si no que son masas especiales de distribución espacial no despreciable, que además no son esferas perfectas y entonces la atracción de una de estas masas no es igual a la que ejercía un solo punto material y ello es la base de otra importante teoría fisicomatemática de gran importancia en la teoría del potencial newtoniano, básico para la Astronomía, la Geodesia y las teorías de las figuras planetarias. Como curiosidad hemos de señalar que las fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia no son exclusivas de la gravitación universal, sino que se presentan en otros fenómenos físicos, como por ejemplo las atracciones y repulsiones electrostáticas que se rigen por la ley de Coulomb, de aquí que las teorías matemáticas del potencial electrostático y del potencial newtoniano son prácticamente equivalentes. La Mecánica celeste es muy útil para ampliar nuestro conocimiento sobre el universo más próximo que nos rodea, el del sistema solar, pero todavía no está en condiciones de llegar a pretender un conocimiento a escala cósmica.

Hoy día uno de los fenómenos cósmicos más interesantes y curiosos es los "agujeros negros" que son zonas del espacio donde reina un campo gravitatorio tan intenso que es imposible que ni la materia ni la radiación escapen del mismo, de aquí el nombre de negro, porque no nos pueden llegar de los mismos ni la luz ni ninguna otra radiación de más alta frecuencia. Pues bien, Laplace señaló la posible existencia de éstos, partiendo de la hipótesis de que la luz estuviera compuesta de corpúsculos (teoría de Newton) si éstos son atraídos por una gran masa situada a corta distancia de ellos, la fuerza de atracción puede llegar a ser tan grande, que los corpúsculos no tienen velocidad inicial para poder escapar del campo gravitatorio de la antedicha masa. Esta masa se comportaría como un auténtico agujero negro.

Las ecuaciones de Lagrange suponen un importante avance dentro del marco de la Mecánica newtoniana, el segundo avance lo constituye la teoría de Hamilton y la ecuación de Jacobi, mediante la primera en virtud de un tipo especial de transformaciones de variables, se transforman las ecuaciones de Lagrange que son diferenciales de segundo orden, en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con un número doble de variables dependientes, las nuevamente introducidas son los llamados momentos generalizados. La ecuación de Jacobi es un "refinamiento matemático" que constituye prácticamente el método más potente de resolución de los problemas de la Mecánica clásica. Después de la ecuación de Jacobi, la Mecánica clásica se transforma en una rama del análisis matemático (paréntesis de Lagrange y de Poisson, transformaciones canónicas, multiplicadores de Jacobi, invariantes integrales, etc.). La Mecánica es determinista y ello significa que conocidas las fuerzas que actúan sobre un sistema material, así como las posiciones y velocidades iniciales de todos los puntos materiales en un instante cualesquiera, quedan automáticamente determinados en cualquier otro instante anterior o posterior, las posiciones y velocidades que tendrán o habían tenido, todos los puntos materiales. El determinismo es consecuencia del teorema de Cauchy de la existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, de los que son un caso particular los de la Mecánica. A él se debe por ejemplo que se pueda saber que un cometa que se ve en fechas muy lejanas en el tiempo es el mismo que se ve después (caso del cometa Haley) o la predicción de un planeta antes de ser descubierto.

Paralelamente a este enfoque de la Mecánica se desarrolla otro, que concluye llevando al mismo instrumento matemático de las ecuaciones diferenciales, que su punto de partida es muy distinto, es el basado en los principios variacionales o de mínimo, según los cuales el movimiento tiene lugar, de modo que se haga mínima (estacionaria) la integral de una magnitud mecánica que tiene las dimensiones de una acción (energía por tiempo o lo que es lo mismo cantidad de movimiento por longitud). Le da la sensación de que los fenómenos mecánicos tienen una finalidad, que el movimiento se cumple siguiendo unas direcciones marcadas a priori, que tienden a alcanzar un fin predeterminado. Se introducen así por primera vez los espacios abstractos en la Mecánica clásica.

Se entiende por espacio abstracto, un espacio distinto a aquel que nos rodea, en el que nos sentimos inmersos y que no es accesible directamente por la percepción sensible. Un espacio abstracto es algo que nos es inteligible, sobre el que podemos razonar, y que incluso nos puede llegar a ser familiar, a fuerza de estudio y de pensar sobre el mismo, pero que es siempre inimaginable e inabordable por los sentidos.

Los científicos tardaron mucho tiempo en estudiar desde un punto de vista científico puro, y más aún en introducir su aplicación en la Física los espacios abstractos. Y cuando los introdujeron, hasta la aparición de la Teoría de la Relatividad a principios del siglo XX, los consideraron como un artificio matemático muy útil para el progreso de la Física, pero sin que realmente tuvieran una existencia real, algo parecido es cuando los ingenieros electricistas en el manejo de las corrientes eléctricas alternas y polifásicas utilizaron números imaginarios.

Los griegos llevaron a un nivel muy alto la Geometría (ciencia del espacio) por métodos que llamamos sintéticos y en el siglo XVII Descartes inventó la Geometría Analítica que aplica el Álgebra y el Análisis Matemáticos a la Geometría, representa un punto en un plano por dos números reales que son coordenadas (abscisa y ordenada) y en el espacio por tres números reales (coordenadas cartesianas); una superficie vienen dada por una ecuación, y una curva si está en un plano por una ecuación , y si está en el espacio (curva alabeada) por dos ecuaciones. Pero Descartes y los científicos que le sucedieron hasta el siglo XIX solamente utilizaron la Geometría Analítica para el estudio del espacio ordinario, que llamamos euclídeo, que nos es familiar y perceptible y que tiene tres dimensiones. Pero en realidad con el descubrimiento de la Geometría Analítica cartesiana estaba abierto el camino para la concepción del primer tipo de espacios abstractos más sencillos, que son los espacios euclídeos de más de tres dimensiones que representamos por n ($n>3$), en los que un punto está representado por n coordenadas que son números reales. La distancia entre dos puntos del espacio viene dada por una simple generalización del teorema de Pitágoras que para el plano dice que "el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos" y para el espacio que "el cuadrado de la diagonal de un paralelepípedo es igual a la suma de los cuadrados de las tres aristas". Además como ya los geómetras tenían dos modelos de espacios euclídeos que eran el plano (dos dimensiones) y el espacio nuestro (tres dimensiones) e incluso la recta (una dimensión), sabían ya el modo de pasar de la Geometría analítica de un espacio de menor número de dimensiones a otro de mayor número, y por tanto tenían ya el medio de pasar de un espacio de tres dimensiones a uno de cuatro (que sería el primer espacio abstracto), de uno de cuatro a uno de cinco y así sucesivamente, y el segundo escalón era ya el de construir en forma más abstracta la teoría de los espacios euclídeos de n dimensiones, usando como instrumento la Geometría analítica cartesiana. Además se sabía por el paso del plano al espacio ordinario, que al aumentar el número de dimensiones aumenta la riqueza de problemas nuevos que puedan plantearse. Pero como he dicho antes, los científicos tardaron mucho tiempo en darse cuenta de la enorme posibilidad que encerraba la Geometría analítica.

Existe otro hecho geométricamente importante también susceptible de elaborar nuevos espacios abstractos y es que el espacio se puede suponer engendrado por un punto, o en otras palabras que los puntos son los elementos básicos y genéricos del espacio (pudiéramos llamarlos los átomos) mientras que todas las otras figuras son conjuntos de puntos; entonces los puntos son representados por coordenadas (números reales) y cualquier otra figura geométrica se puede representar por ecuaciones (relaciones entre números reales), pero por la misma razón se puede considerar que los elementos genéricos del espacio ordinario de tres dimensiones son los planos, que entonces serían representados por tres números reales (coordenadas pluckerianas también llamadas tangenciales) y los puntos como las restantes figuras geométricas vienen representados por ecuaciones, de modo que con esta nueva concepción de la geometría, no es el plano un conjunto de puntos (los contenidos en él), sino que es el punto el que es un conjunto de planos (los que pasan por él. Esta nueva óptica de la Geometría, estableció en la Geometría en el siglo XIX una de las más importantes leyes geométricas que es el principio de dualidad, pero sobre ser importante esta ley, existen todavía otras posibilidades de mayor riqueza matemática aún, y es que el espacio puede ser considerado engendrado no por puntos ni por planos sino por rectas, éstas serían sus elementos genéricos, pero la recta en vez de tres coordenadas tiene cuatro coordenadas, y se tiene así una representación cuadridimensional del espacio ordinario tridimensional, surge así la Geometría reglada; pero no se crea que se trata de una elucubración matemática interesante teóricamente pero desprovista de utilidad práctica, porque en plena fiebre del maquinismo y de la revolución industrial la Geometría reglada se mostró como el instrumento ideal para el estudio de la Cinemática, Estática y Dinámica de máquinas, como un arma muy apreciada por los ingenieros mecánicos. Abierta por esta vía la creación de espacios abstractos nos encontramos con que otras figuras geométricas (circunferencias, esferas, etc.) puede ser representada por coordenadas así, así por ejemplo la circunferencia en el plano por tres coordenadas, las dos cartesianas de su centro y el radio, con lo que se tiene una representación tridimensional en el plano bidimensional, etc., etc.

Independiente de este camino para ampliar las Geometrías posibles, a principios del XIX Lobatchewski y Bolyé independientemente el uno del otro por métodos sintéticos (no analíticos) no admitiendo el quinto postulado de Euclides (que afirma que por un punto solo se puede trazar una paralela a una recta) desarrollaron un modelo muy completo de espacio abstracto, en el cual se conservan palabras del lenguaje corriente pero que ya no tienen el mismo sentido, y así cuando se habla de plano euclídeo no se trata ya de un plano sino de algo que no tiene nada que ver, que es esencialmente distinto, es decir aquí la palabra “no euclídeo” no es un adjetivo calificativo que se aplica al sustantivo “plano” para distinguirlo de otros planos, sino que las palabras “plano” y “no euclídeo” van como soldadas, forman juntas un solo sustantivo que ya no es un plano. Muy avanzado el siglo XIX (hacia mediados) Beltrami obtuvo una teoría geométrica sobre una superficie ordinaria (la pseudoesfera) inmersa en nuestro espacio euclídeo tridimensional que ofrece una representación (equivalencia matemática) del plano no euclídeo de Lobatchewski, demostró por tanto que un espacio abstracto de dos dimensiones era equivalente a otro espacio abstracto de dos dimensiones. De todos modos la Geometría no euclídea de Lobatchewski no encontró aplicación física hasta la aparición de la Teoría de la Relatividad.

Otro camino independiente para la concepción de espacios abstractos es el iniciado por Riemann hacia mediados del siglo XIX. Cuando a finales del XVIII y principios del XIX se inició el estudio analítico (Geometría Diferencial) de las superficies inmersas en el espacio euclídeo ordinario, y en particular a estudiar sus propiedades en entornos infinitesimales de las masas, se encontró que la distancia entre dos puntos infinitamente próximos de la superficie (ds) se podía expresar en cuadrado como una forma cuadrática homogénea de dos diferenciales de las coordenadas, y esto mismo se encontró para el plano, cuando se utilizaban sistemas de coordenadas distintas de las cartesianas. Se puede decir que se habían obtenido a modo de una generalización del teorema de Pitágoras, pero válido solamente para lo infinitesimal. Pues bien, de esta manera quedaba abierto el camino para concebir nuevos espacios abstractos, aumentando el número de coordenadas de Riemann, en los que el ds^2 viene dado por una forma cuadrática homogénea de las diferenciales de las n coordenadas. Estos espacios aparte de su interés grande en lo teórico, han sido de una utilidad práctica inmensa tanto en la Física clásica como en la relativista. Después se han ideado otros muchos tipos de espacios abstractos, más sofisticados, entre los que solamente citaremos los de Finsler por tener aplicación en las modernas teorías unitarias de la gravitación y del electromagnetismo, es decir las teorías del campo unitario, para explicar las trayectorias de partículas eléctricas en un campo gravitatorio. En los espacios de Finsler el ds de mayor aplicación es aquél que es suma de la raíz cuadrada de una forma cuadrática homogénea de los diferenciales de las coordenadas y de una forma lineal de las mismas.

Los espacios abstractos como realidad existente han empezado a utilizarse en la teoría de la Relatividad, porque en la Física clásica se han utilizado como un simple artificio matemático, como un método auxiliar para la resolución de los problemas. Los físicos clásicos admitían sin ninguna duda sobre los mismos, que el espacio que nos rodea es el euclídeo tridimensional, es decir el que nos es familiar, el que vemos o creemos ver, y en el que nos movemos en nuestra vida cotidiana. Sin embargo se dieron cuenta de lo muy útiles que podían ser para sus investigaciones el uso de espacios abstractos, y esta utilidad se basa en los siguientes hechos: en la Mecánica clásica existe una magnitud que es la fuerza viva T, que es igual a la suma de los productos de las masas de todos los puntos materiales por los cuadrados de sus velocidades respectivas. Si el sistema es holónomo lo que significa que los enlaces geométricos entre sus puntos se expresan por funciones de sus coordenadas igualadas a cero, y no por relaciones diferenciales no integrables igualadas a cero, entonces T es igual a la suma de tres sumando T_2, T_1 y T_0, que son una forma cuadrática en las velocidades de las coordenadas generalizadas del sistema la T_2, una forma lineal de las mismas T_1 y un término independiente de ellas T_0. En el caso muy importante de sistemas holónomos de enlaces independientes del tiempo es $T = T_2$, $T_1 = 0$, $T_0 = 0$. En uno y otro caso de sistemas holónomos, si existe una función de fuerzas V , es decir las fuerzas generalizadas son las derivadas de V respecto a la coordenada generalizada correspondiente, entonces el movimiento obedece a un principio de mínimo o variacional, en que se hace estacionaria (mínima) una integral, cuya función subintegral es la suma de T y V, siendo la variable independiente el tiempo. Pero es importante señalar que cuando $T = T_2$ (T_1 y T_0 son cero) y existe un potencial (función de fuerzas cambiada de signo, independiente del tiempo) entonces el punto figurativo del sistema en el espacio de coordenadas generalizadas q_i, que es un espacio de Riemann (espacio abstracto) describe una geodésica, que son las mínimas distancias entre dos puntos de dicho espacio de Riemann; desempeñan las geodésicas un papel parecido al de las rectas en el plano y en el espacio ordinarios. El uso del lenguaje geométrico en los problemas de la Mecánica clásica, daba mayor intuición a los problemas, es sumamente útil para una mejor resolución y comprensión de los mismos, pero en ningún caso pensaron los físicos que es que los hechos físicos estaban teniendo lugar en un espacio abstracto. Se puede pensar que en problemas muy sofisticados estos es obvio, pero incluso en un problema muy sencillo pasa también lo mismo, por ejemplo la caída de los graves sobre la tierra, matemáticamente se puede considerar como una parábola en un plano vertical, pero también como una geodésica de una cierta superficie inmersa en el espacio ordinario, pero a ningún Físico se le ocurriría pensar que esta última interpretación pudiera tener una base real, nadie pensaba que por efecto de la gravedad el plano vertical en el que cae un grave se deforma y transforma en una superficie y la parábola del plano se transforma en la geodésica de dicha superficie.

En el caso de la óptica geométrica sabían los físicos que la luz cuando el índice de refracción no es constante pero sí independiente del tiempo, no sigue la distancia más corta entre dos puntos, sino una trayectoria más complicada, que responde al camino óptico mínimo, o lo que es lo mismo, lo que es mínimo es el tiempo invertido en pasar de un punto a otro. Es el principio de Fermat que afirma que los rayos luminosos hacen mínima la integral

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2; \quad \int \frac{ds}{c} \tag{1}$$

en donde en este caso particular c no es la velocidad de la luz en el vacío, sino en el medio refringente. Tampoco a los físicos se les ocurría pensar que esto significaba que la luz seguía las geodésicas de un espacio de Riemann, cuyo ds era ds/c, el mismo que figura en la fórmula (1), es decir que como consecuencia de existir un índice de refracción variable; aunque independiente del tiempo (medio estacionario) nuestro espacio ordinario se transformaba hasta transformarse en un espacio de Riemann, sino que lo que pasaba es que el espacio seguía siendo el de siempre, y la luz en vez de seguir una línea recta, seguía una curva muy complicada que era lo que hacía mínima la integral (1).

Es curioso señalar que este problema de óptica es equivalente, entendiendo por equivalente que tiene las mismas ecuaciones matemáticas, que otros dos problemas de Mecánica, uno de ellos es el movimiento de un punto material libremente en el espacio, cuando existe un potencial que vale $-1/c^2$ y la constante de la integral de las fuerzas vivas vale cero.

Si el índice de refracción no sólo es variable, sino que depende del tiempo, en mi opinión los rayos luminosos, son las curvas que en el espacio ordinario hacen mínima la expresión cuadrática

$$\int \left[c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right] d\tau \tag{2}$$

cumpliéndose la integral primera del movimiento:

$$c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 = 0 \tag{3}$$

En la (1) los rayos luminosos son permanentes en el tiempo y en la (2) se desplazan y deforman en el tiempo.

Se puede demostrar que (1) es un caso particular de (2) cuando *c* es independiente del tiempo.

Nos encontramos pues que algunas partes de la Física clásica, como por ejemplo la Mecánica clásica y la óptica, acostumbraron a los Físicos a utilizar y pensar en espacios abstractos, aunque nunca llegaron a caer en la tentación de que ello significase que realmente el espacio ordinario dejara de ser el que nos es familiar y se transformase en un espacio de Riemann, que eran los únicos espacios más complicados que el euclídeo que parecían tener una aplicación práctica en la Física.

Anteriores investigaciones (véase bibliografía) me llevaron a la posibilidad de transformar todo problema de Mecánica clásica en otro problema de Mecánica relativista; para sistemas materiales holónomos de semifuerza viva como la utilizada antes:

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \tag{4}$$

cuando existe una función de fuerzas *V*, con el mismo significado que en páginas anteriores, el movimiento se obtiene haciendo mínima la integral

$$\int_0 \left[\overline{T_2} - \frac{Mc^2}{2} t'^2 + \overline{T_1} + \left(T_0 + V\right) t' \right] d\tau \tag{5}$$

en donde τ es el tiempo propio, y *t* el tiempo ordinario, *M* es la masa total del sistema, *c* la velocidad de la luz en el vacío. Se cumple que

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{2T_2}{Mc^2}}} \tag{6}$$

que liga entre sí los dos tiempos *t* y τ . En las *T* con barra encima la derivación de las velocidades generalizadas es respecto a τ , y en las que no tienen barra la derivación es respecto a *t*.

También demostramos que el movimiento se puede obtener haciendo mínima la integral:

$$\int \left(T_1 + T_0 + V - Mc^2 \sqrt{1 - \frac{2T_2}{Mc^2}} \right) dt \tag{7}$$

Ambos métodos son ejemplos de empleo de espacios abstractos, pero en ellos se observan dos diferencias, en el de la integral (5) se obtienen las coordenadas q_i y el tiempo *t* en función del tiempo τ , y en el segundo se elimina el tiempo τ, y se obtienen las coordenadas q_i en función del tiempo *t*, con consecuencia de (6) se obtiene *t* en función de τ . Las coordenadas q_i son las variables que entran dentro de las *T*.

Hay casos particulares en que el movimiento se puede obtener en otros espacios abstractos, tal es el caso en que existe un potencial y los enlaces son independientes del tiempo, el problema equivale a encontrar las líneas geodésicas en un espacio de Riemann, y si existe un potencial y los enlaces dependen del tiempo, pero éste no figura explícitamente en *T*, entonces el movimiento equivale a encontrar las geodésicas de un espacio no riemanniano, en un espacio de Finsler, de los que he hecho referencia antes.

En mi opinión la dinámica relativista de los sistemas materiales, a la que hemos contribuido, junto con la teoría relativista de las percusiones, plantea una nueva serie de problemas, como puede ser el de la integración y desintegración de sistemas. Un ejemplo de los primeros es el choque inelástico de dos esferas que después de chocar permanecen constantemente en contacto, antes tienen $dt/d\tau$ ambas y después un mismo $dt/d\tau$. En la desintegración tomando esta palabra en un sentido muy general, sucede todo lo contrario, antes tienen el mismo $dt/d\tau$ y después cada uno de los dos sistemas resultantes (ya sistemas independientes) tienen propio $dt/d\tau$ distinto.

Es curioso señalar que mientras la dinámica relativista de los sistemas holónomos de enlaces independientes del tiempo se puede desarrollar, en mi opinión, a partir de un principio modificado del clásico de D'Alembert, cuando los enlaces dependen del tiempo, la Mecánica relativista a diferencia de la clásica no es dalembertiana.

Hay muchas distinciones que implican principios de Filosofía natural, y por no citar más que uno, en el problema de los dos cuerpos en la relatividad restringida, tal como lo he resuelto, se sigue de las ecuaciones matemáticas, la inmovilidad del centro de gravedad.

La relación (6) entre *dt* y $d\tau$, depende de las coordenadas a través de T_2 (de las velocidades) sin embargo si los enlaces son independientes del tiempo ($T = T_2$) y existe un potencial U, la (6) es equivalente a

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{W - U}{Mc^2} \tag{8}$$

en donde W que es una constante, es la energía total asociada al sistema, en este caso la relación entre dt y $d\tau$ depende exclusivamente de las coordenadas (se puede hacer explícitamente independiente de las velocidades).

La Relatividad general, que es el segundo paso (el primero es la restringida) supone un importante cambio en la forma de concebir el espacio y el tiempo, dejan de ser lo que eran para la Física clásica, y se funden en un ente único el espacio-tiempo, que se dice tiene una estructura de espacio de Riemann o mejor dicho de pseudoespacio. Estos espacios poseen una magnitud muy característica de ellos, que se llama curvatura, y se demuestra que su valor depende de la distribución de la materia en el espacio, que si el espacio estuviera vacío no sería curvo. Se admite también que las partículas materiales y los rayos luminosos siguen líneas geodésicas del mismo (los últimos son además líneas de longitud nula). El grado de abstracción de este espacio es muy grande, porque además se han fundido en un continuo cuadridimensional el espacio y el tiempo, tienen además naturaleza hiperbólica, lo que significa que las líneas de longitud nula son reales a diferencia de nuestro espacio ordinario que es de naturaleza elíptica, lo que significa que las líneas de longitud nula son imaginarias.

Una de las aplicaciones más importantes de la Relatividad general fue a la Astronomía, concretamente al sistema solar, y explica tres fenómenos no explicables por la teoría newtoniana que son: a) el corrimiento del perihelio de Mercurio, b) la desviación hacia el rojo de la luz solar, c) la desviación de los rayos luminosos al pasar cerca del sol. Fue Schwarzschild quien resolvió el problema del cuerpo único en la Relatividad general, halló el elemento lineal del espacio-tiempo que rige para el sistema solar, que es:

$$\mu = \frac{fM}{c^2}; \quad ds^2 = -\left[\frac{1}{1-\frac{2\mu}{r}} dr^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right] + \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 dt^2 \tag{9}$$

El cuerpo único significa que existe una partícula pesada situada en el centro y rodeada de un espacio vacío, M es una masa, c la velocidad de la luz y f la constante de la gravitación universal de Newton.

De acuerdo con la Relatividad general se admite ahora que los planetas siguen las geodésicas del espacio riemanniano, cuyo ds es (9), y los rayos luminosos las geodésicas de longitud nula, y ello se basa en que las características físicas, lo que se llama el tensor energía-momento, determina la curvatura del espacio métrico (9).

Ahora bien, en mi opinión, se pueden conservar el espacio y el tiempo clásico sin necesidad de modificación porque los movimientos anteriores se pueden obtener también como tales geodésicas del espacio-tiempo (9) sino como curvas de nuestro espacio ordinario, según ley horaria de nuestro tiempo ordinario, de tal modo que la trayectoria y la ley horaria hagan mínima la integral

$$\int \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 d\tau \tag{10}$$

donde ds es el (9) cumpliéndose además la integral primera:

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \begin{cases} c^2 \\ 0 \end{cases} \tag{11}$$

el caso superior para la materia y el inferior para la luz. Existe además de la (11) otra integral primera que es

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = W \tag{12}$$

donde W está relacionada con la energía propia de una partícula de masa m por la relación

$$\text{energía} = Wmc^2 \tag{13}$$

W es por tanto el factor por el que multiplicar la energía de la partícula en reposo en el espacio sin campos gravitatorios. Se puede eliminar τ entre la superior (11) y (12) y se obtiene:

$$W = \frac{1 - \frac{2\mu}{r}}{\sqrt{1 - \frac{2\mu}{r} - \frac{1}{c^2}[\ldots]}} \tag{14}$$

donde el paréntesis vacío es el primer paréntesis de (9) dividido por dt^2.

En el caso de la luz no se puede eliminar τ entre (12) que sigue siendo válido, y la inferior (11)por el segundo miembro de ésta cero, pero dado el significado de W (12) se le puede extender a los fotones, cuya energía es $h\nu$, siendo h la constante de Planck y ν la frecuencia de modo que se cumple

$$\nu(\text{Schwarzschild}) = W\nu(\text{vacío}) \tag{15}$$

que muestra que la luz emitida en el universo de Schwarzschild luce de distinto color que la luz debida al mismo fenómeno físico, emitida en el universo euclídeo vacío. Un caso particular de (15) es el corrimiento hacia el rojo de la luz emitida por el sol.

Llevado el estudio de estos movimientos, desde el enfoque ordinario de los tratados de la Teoría de la Relatividad, a este nuevo, basado en el estudio del mínimo de la integral (10), cumpliéndose las dos integrales primeras (11) y (12) se puede conservar el espacio y el tiempo clásicos. Las ecuaciones gravitatorias de Einstein y Schwarzschild son imprescindibles para determinar la forma cuadrática (9), pero en modo alguno exigen como conclusión terminante el abandono del espacio y el tiempo clásicos. Este enfoque que damos al problema equivale a estudiar los movimientos de un sistema material clásico de cuatro grados de libertad o coordenadas lagrangianas generalizadas que son τ, θ, φ, t y donde el tiempo es τ (t es una "coordenada") pero con una particularidad distinta, y es que "la fuerza viva" se descompone (a diferencia del clásico) en dos sumandos uno positivo y el otro negativo, pero los métodos matemáticos de la Mecánica clásica (ecuaciones de Lagrange, canónicas de Hamilton, ecuación de Jacobi, principios de mínima acción, invariantes integrales, etc.) se conservan, pero si se hace un uso correcto de los mismos, y no se comete el error de no darse cuenta de que ahora (en la Relatividad general) el tiempo es τ y el tiempo ordinario t no recibe el tratamiento de un tiempo, sino el de una coordenada.

En los tratados ordinarios de Teoría de la Relatividad, se admite el abandono del espacio euclídeo, pero se siguen utilizando unas coordenadas τ, θ, φ con el mismo significado que tienen para el espacio euclídeo, es decir son las coordenadas esféricas o polares de uso muy corriente. No estoy de acuerdo con esta mezcla de conceptos clásicos y nuevos a la vez, si se admite la curvatura del espacio, es decir el abandono del espacio clásico, entonces τ no significa la distancia del origen (punto en que se halla el centro gravitatorio único) al móvil (del sol al planeta en la interpretación astronómica) porque esta distancia carece de sentido, no existe. En un espacio de Riemann, que ha sido definido en términos infinitesimales por su ds^2 y no en términos finitos, ni τ , ni θ, ni φ, significan distancias y ángulos tal como se entienden estos conceptos geométricos euclidianamente (ordinariamente).

No obstante considero que igual que existe la posibilidad anterior que hemos señalado de conservar el espacio y el tiempo clásicos, y modificar la integral que ha de ser mínima, para establecer la distancia entre Mecánica clásica del sistema solar y Mecánica relativista también del sistema solar; existe también otra posibilidad de interpretación física de las ecuaciones matemáticas, de dotar de una base operacional fenomenológica a la estructura matemática de las ecuaciones de Einstein y Schwarzschild, que consiste en lo que pasamos a exponer.

Vamos a averiguar si existe la posibilidad de que en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones, de coordenadas cartesianas x_1, x_2, x_3, x_4 se puede encontrar una hipersuperficie (tridimensional) tal que un ds sea el primer sumando de (9). De la forma de dicho ds, se sigue que si el problema tiene solución, la tal hipersuperficie tiene que ser de revolución, y un sistema de coordenadas hiperbólicas en cuatro dimensiones que son:

$$\begin{gathered} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi\,;\; x_2 = r\sin\theta\sin\varphi\,; \\ x_3 = r\cos\theta\,;\; x_4 = x_4 \end{gathered} \tag{16}$$

donde ahora r, θ, φ son las coordenadas esféricas de un espacio euclídeo tridimensional. Por ser la hipersuperficie de resolución alrededor de OX_4, su ecuación es:

$$x_4 = x_4(r) \tag{17}$$

y su ds:

$$ds^2 = \left(1 + x_4'^2(r)\right)d\tau^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{18}$$

que identificando con el primer paréntesis de (9) da:

$$1+x_4'^2=\frac{1}{1-\frac{2\mu}{r}} \qquad (19)$$

que integrada da la ecuación de la hipersuperficie que es:

$$x_4=\sqrt{8\mu(r-2\mu)}\Rightarrow$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(2\mu+\frac{x_4^2}{8\mu}\right)^2 \qquad (20)$$

Si se admite la deformación del espacio por la materia, en este caso por la existencia de un cuerpo gravitatorio único, entonces el espacio (el del sistema solar) es un espacio tridimensional, que se puede sumergir en un espacio de cuatro dimensiones, y que dentro de él es una superficie de revolución, cuya ecuación es la (20). Esta hipersuperficie tiene las siguientes propiedades: a) sus secciones planas por plano que contienen a OX_4, son parábolas, cuya ecuación se obtiene haciendo $x_2=0$, $x_3=0$, en la segunda (20) sus secciones por hiperplanos son las superficies que en el espacio euclídeo tridimensional tiene por ecuación la que resulta de hacer $x_3=0$ en la segunda (20), sus secciones por hiperplanos son las superficies que en el espacio euclídeo tridimensional tienen por ecuación la que resulta de hacer $x_3=0$ en la segunda (20), son por tanto las superficies engendradas en el espacio ordinario por la rotación de una parábola alrededor de un eje que no la corta y es perpendicular al eje de la parábola. Por el interés de esta superficie del espacio ordinario, ponemos su ecuación en la forma habitual de escribir las coordenadas cartesianas corrientes y es haciendo en la segunda (20):

$$x_1=x;\quad x_2=y;\quad x_3=0;\quad x_4=z \qquad (21)$$

con lo que la segunda (20) se escribe

$$x^2+y^2=\left(2\mu+\frac{z^2}{8\mu}\right) \qquad (22)$$

a la que propongo llamarla toro parabólico o más abreviadamente paratoroide.

Resulta pues que el r de (9) no es la distancia del móvil al origen (del planeta al sol) sino que es la distancia del móvil al antedicho eje OX_4. El centro de gravedad único no existe, ni está en el origen de coordenadas, sino que lo que sucede es que el espacio se ha deformado por la existencia de un campo gravitatorio de esta naturaleza, y los que vivimos en el sistema solar como no podemos escapar de la hipersuperficie (20) al espacio cuadridimensional (x_1, x_2, x_3, x_4) no podemos efectuar mediciones directamente de estas cuatro coordenadas ni de r, θ, φ, sino que solamente podemos efectuar medidas sobre la hipersuperficie, y conocer algunas de las coordenadas anteriores indirectamente; a través de las antedichas medidas. La zona de la hipersuperficie más próxima al origen de coordenadas, se obtiene haciendo $x_4=0$ en (20) y es la esfera de garganta de radio $r=2\mu$.

He demostrado que este problema de Mecánica relativista, es equivalente a un problema de Mecánica clásica, que es el del movimiento de un punto material, de masa la unidad, obligado a moverse sobre la superficie (22) bajo la acción del potencial paramétrico, dependiente de los valores iniciales del movimiento:

$$-\frac{1}{2}\frac{W^2}{1-\frac{2\mu}{r}} \qquad (23)$$

donde W es el mismo de (12) y (14) y el papel del tiempo lo desempeña τ (y no t), siendo la constante de la integral de las fuerzas vivas $-c^2/2$. La particularidad que introduce la Relatividad respecto a la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales, es que mientras en la primera la constante de la integral de las fuerzas vivas es siempre la misma, mientras que el potencial es paramétrico, por el contrario en la teoría clásica, la constante antecitada es la que depende de los valores iniciales, mientras que el potencial es independiente de los valores iniciales de coordenadas y velocidades (no paramétrico).

Análogamente he demostrado que los rayos luminosos se obtienen de la misma manera que las trayectorias de la materia, tal como se ha explicado en el párrafo anterior, con solo hacer el cambio de $-c^2/2$ por cero en la constante de la integral de las fuerzas vivas.

Si del sistema solar pasamos al cosmos, la teoría de la Relatividad general ha elaborado varios modelos de espacios abstractos, para tratar de resolver los problemas cosmológicos. Entre estos modelos quizás el más sencillo es el universo estático de Einstein. Según este modelo el universo es la superficie de una hiperesfera de R de tres dimensiones, inmersa en un espacio cuadridimensional euclídeo, y el índice de refracción en el mismo es la unidad. Su ds es

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2 \tag{24}$$

donde $d\sigma$ es el correspondiente a dicha esfera.

Como se cumplen las siguientes integrales primeras:

$$\frac{dt}{d\tau} = W; \quad c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = c^2 \tag{25}$$

eliminando $d\tau$ entre ambas, se obtiene:

$$W = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad \upsilon = \frac{d\sigma}{dr} \tag{26}$$

que es el factor por el que multiplicar mc^2 para obtener la energía asociada a una partícula material de masa m, como en (13) y al igual que (15) y por la misma razón que allí es:

$$W = (26)\nu \text{ (movimiento)} = W\nu \text{ (reposo)} \tag{27}$$

La (13) con este valor particular de W (13) coincide con la misma fórmula que la de la Relatividad restringida y por la manera como la hemos obtenido, se sigue que es independiente de la forma partiendo de $d\sigma$, es válida siempre que se cumplan las dos siguientes condiciones: a) $d\sigma$ es independiente del tiempo, b) el coeficiente de dt^2 es constante.

Las partículas materiales y los fotones describen circunferencias máximas con velocidad constante υ, las primeras y c las últimas. Se pueden acometer pues los problemas de este universo con los métodos de la Mecánica clásica.

El universo de De Sitter, se distingue del de Einstein por el coeficiente no constante de dE^2; su ds es:

$$ds^2 = c^2 \cos^2 \chi dt^2 - d\sigma^2 \tag{28}$$

siendo el mismo que para el universo de Einstein.

Se cumplen las dos integrales primeras:

$$\cos^2\chi \frac{dt}{d\tau} = W; \quad c^2 \cos^2\chi\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\sigma}{dr}\right)^2 = c^2 \tag{29}$$

y eliminando $d\tau$ entre ambas, se obtiene para W el valor:

$$W = \frac{|\cos\chi|}{\sqrt{\cos^2\chi - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{30}$$

χ es el arco de meridiano sobre el universo esférico, contado a partir del observador, tomando como polo de la esfera (origen de coordenadas esféricas) y $R\chi$ es la distancia sobre dicha esfera del polo a los puntos de las mismas coordenadas χ.

Pero mientras en el espacio de Einstein las trayectorias de las partículas materiales y los rayos luminosos, son circunferencias máximas (líneas geodésicas), porque por la primera (25) el potencial paramétrico es constante, por el contrario para el universo de De Sitter estas curvas son mucho más complicadas, porque se obtienen como las trayectorias de un punto material de suma la unidad, que se mueve sobre la esfera tridimensional, bajo la acción del potencial paramétrico

$$-\frac{1}{2}\frac{W^2c^2}{\cos^2\chi} \tag{31}$$

siendo la constante de la integral de las fuerzas vivas $-c^2/2$ o cero según se trate de la materia o de la luz.

En un sentido geométrico estricto, supuesto el espacio vacío (desprovisto de materia) o con materia en reposo y distribuido uniformemente en el mismo, los espacios euclídeos, también llamados "planos" y los esféricos (no euclídeos) son los únicos que gozan de la propiedad de que cualquiera que sea de posición del observador en el espacio, cualquiera que sea la dirección en que se mire ve lo mismo, propiedad que se puede denominar ausencia de posiciones privilegiadas para el observador y ausencia de direcciones privilegiadas para la observación. Para el universo euclídeo y para el espacio de Einstein, esta propiedad se conserva, en el caso en que la materia se mueva con movimientos uniformes (velocidad constante) y siguiendo las geodésicas del espacio (rectas para el euclídeo, circunferencias máximas sobre la esfera). Ahora tienen el universo de De Sitter, las trayectorias de la materia y de los rayos luminosos, son curvas muy complicadas y el potencial no es constante sino que vale (31), cualquiera que sea la posición del observador y cuando se toma su posición como polo de la esfera u origen de las coordenadas esféricas. Resulta entonces que dos observadores cualesquiera situados en posiciones distintas A y B, les parece igual el universo, porque ven lo mismo en posiciones C y D, cuyas coordenadas respecto a A el primero y a B el segundo, sean iguales, pero no ven lo mismo en una misma posición E, cuyas coordenadas sean distintas a A y B. Se puede decir que se introduce "una torre de Babel" entre observadores, el universo globalmente como un todo, les parece lo mismo a todos ellos, pero localmente, cada cosa particular que sucede en cualquier lugar del universo les parece distinta. Esto como digo sucede en el universo de De Sitter, pero no en el de Einstein, ni en el euclídeo, para el que todos los observadores ven igual el universo tanto globalmente como localmente, los observadores hablarían el mismo lenguaje, existiría una total comunicabilidad de observaciones (principio del consenso cosmológico).

Los cosmólogos han enunciado dos principios, que denominan el principio cosmológico y el principio cosmológico perfecto, el primero afirma "a gran escala el universo presenta la misma apariencia a cualquier observador esté donde esté" y el segundo añade aún más "el universo presenta la misma apariencia e cualquier observador esté donde esté y en cualquier momento". Ambos principios cosmológicos los cumplen los tres universos el euclídeo, el einsteiniano y el de sitteriano. Pero en mi opinión se debe introducir un tercer principio, que cumplen los dos primeros, pero no el tercero, que es el que propongo denominar principio del consenso cosmológico que se puede enunciar así: "cualquier parte del universo a gran escala presenta la misma apariencia esté donde esté", y así mismo habría mi cuarto principio del consenso cosmológico perfecto si al enunciado anterior añadimos "... y en cualquier momento". Estos tercer y cuarto principios resumen lo dicho en el párrafo anterior, que también podemos resumir diciendo que "la igualdad de apariencias no se reduce a la visión total del universo; sino también a la visión parcial del mismo".

La fórmula (27) está asociada a un fenómeno físico de relojes y de focos luminosos. Como en este caso es $W > 1$, se sigue que ν (movimiento) es mayor que ν (reposo), ambas magnitudes allí definidas, o lo que es lo mismo que de dos focos luminosos iguales, uno en movimiento y el otro en reposo, emite luz más roja el foco en reposo (o lo que es lo mismo más azul el foco en movimiento). Pero esto significa también que al ser la frecuencia de un fenómeno vibratorio físico en reposo menor que la del mismo foco en movimiento, entonces el periodo de una vibración es mayor en reposo que en movimiento, pero el periodo es una duración en el tiempo (un intervalo de tiempo) por tanto:

$$W > 1;\ \Delta t\ (\text{reposo}) = W \Delta t\ (\text{movimiento}) \qquad (32)$$

es decir los relojes en movimiento van más lentos que los relojes en reposo. Se sigue que el corrimiento hacia el rojo (o el azul) de las rayas espectrales y la marcha de relojes (rapidez o lentitud en el flujo del tiempo) son fenómenos físicos íntimamente emparentados entre sí, y su existencia se traduce matemáticamente en la existencia de un W. Cuando hablamos de relojes y de focos luminosos, nos referimos que están invariablemente ligados a observadores en reposo o en movimiento.

Lo dicho aquí se puede decir de la fórmula (15).

Existe una diferencia muy notable entre los espacios euclídeos (planos) y los esféricos (no euclídeos) y es que en los primeros si un observador M se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme sobre una recta S con velocidad v, respecto a un observador P en reposo o más precisamente dicho si a P le parece que esto es lo que sucede, entonces también a M puede parecerle que P se mueve sobre una recta paralela a S con velocidad -v. Esta propiedad de la fenomenología euclídea y también de la geometría euclídea, no tiene equivalente en la del universo de Einstein antes descrito, ni tampoco en la geometría sobre la superficie de la esfera. De aquí la importancia de esta propiedad de lo euclídeo que se conserva en la Relatividad restringida pero no en la Relatividad general. En la Relatividad restringida dejando el mismo valor W en (15) y en (27) se pueden intercambiar entre sí las dos palabras "reposo" y "movimiento" y las fórmulas conservan su valor, lo que no sucede en el universo de Einstein (antes descrito) en el que no existe esta reciprocidad entre observadores en reposo o en movimiento y en el que no se pueden permutar entre sí las dos palabras anteriores "reposo" y "movimiento".

Propongo llamar principio de la reciprocidad al que se puede enunciar así: "es correcto permutar las palabras reposo y movimiento en el movimiento rectilíneo y uniforme". Obsérvese que aunque se parezca este principio, no es el de inercia de Galileo, porque este último afecta solamente a los fenómenos mecánicos y no a los ópticos, y lo que afirma este último es "por medios mecánicos no se puede detectar el movimiento rectilíneo y uniforme". Este principio que llamamos de reciprocidad es válido en la Física clásica y en la Teoría de la Relatividad restringida pero no en la Relatividad general.

Volviendo a los principios cosmológicos, antes citados, el perfecto es más fuerte que el simple, es decir que lo arrastra e implica, y cada uno de ellos por separado es más fuerte que los que he denominado principios del consenso cosmológico y del consenso cosmológico perfecto.

Los cosmólogos han elaborado modelos más complicados de universos, que los antecitados, universo en expansión (Lemaitre y Friedmann), cosmología cinemática (Milne), cosmología newtonianas, etc.; yo mismo he desarrollado un modelo cuántico-relativista de universo en expansión, con creación permanente (continua) de materia. Vamos a analizar lo que sucede con la expansión del universo, que comenzaron a considerar los físicos teóricos para explicar el efecto Hubble o del corrimiento hacia el rojo de los rayos espectrales de la luz procedente de las galaxias. A estos universos se les denomina también "dinámicos" para distinguirlos de los anteriores llamados "estáticos".

Un ejemplo de universo es aquel cuyo *ds* es:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) dw^2 \qquad (33)$$

donde *dw* es el *ds* de una superficie esférica de tres dimensiones. Es el (24) sustituyendo el radio constante *R* de allí por un radio variable con el tiempo *R*(*t*).

He demostrado utilizando el método de las ecuaciones de Lagrange para determinar el mínimo de la integral, cuya función subintegral es el ds^2, siendo τ la variable independiente, y también utilizando la ecuación de Jacobi, que existe la integral primera:

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \begin{cases} c^2 \\ 0 \end{cases} \qquad (34)$$

el caso superior para la materia y el inferior para la luz y también existe la relación

$$W = \frac{dt}{d\tau} = \begin{cases} \sqrt{1 + \dfrac{h}{R^2(t)}}; & h > 0 \\ \dfrac{\sqrt{h}}{R(t)} \end{cases} \qquad (35)$$

De la (33) y las superiores (34) y (35) he obtenido

$$v = \frac{dw}{dt} = \frac{c\sqrt{h}}{R(t)\sqrt{R^2(t) + h}} \qquad (36)$$

donde v tiene dimensiones del cociente de una velocidad por una longitud, es la velocidad con que recorre la esfera de radio la unidad, la imagen de la partícula material en la representación esférica sobre esta esfera unitaria del universo en expansión se obtiene que:

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{c\sqrt{h}}{R^2(t)} \qquad (37)$$

Para el caso de la luz es mucho más inmediato de la inferior (34) obtener:

$$v = \frac{c}{R(t)} \qquad (38)$$

y utilizando la inferior (35) se tiene que también para la luz se cumple.

Estas propiedades son independientes de la forma particular de *dw*, con tal de que sea independiente del tiempo, en particular son válidas para el espacio plano dinámico que es el de *ds* (33) cuando en él se sustituye el *dw* por el *ds* de (1). Estas velocidades (36) y (37) dependen exclusivamente del tiempo.

Es obvio que todo universo dinámico o en expansión, al ser magnitudes geométricas dependientes del tiempo no cumplen el principio cosmológico perfecto, pero tanto el espacio esférico de radio variable, como el espacio plano en expansión de *ds*:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \qquad (39)$$

cumple el principio cosmológico. Pero en este caso mientras que el esférico cumple el principio del consenso cosmológico, en el plano no es necesario, porque (39) adopta esta forma cualquiera que sea el origen de coordenadas. Los espacios en expansión son más difícilmente imaginables que los estáticos, porque en el esférico por ejemplo, los observadores (nosotros) estamos siempre sobre la superficie esférica tridimensional, que nunca permanece idéntica a sí misma, que está constantemente cambiando con el tiempo, dentro de un espacio plano (euclídeo) cuadridimensional que nos es accesible, del que solamente podemos conocer algunas cosas, a través de cálculos indirectos, realizados sobre un universo real, que nunca es igual a sí mismo, que nunca está en su sitio. Existe una velocidad radial $dR(t)$ del universo que está fuera del universo real, y en cualquier instante aparte del movimiento de la materia que tiene lugar en el universo esférico, está teniendo lugar un desplazamiento en el sentido radial, que escapa del universo. Esta dificultad propia de todo espacio no euclídeo en expansión, no se presenta en el espacio euclídeo en expansión (39) porque en él, el espacio permanece siempre idéntico a sí mismo, todo el movimiento de la materia tiene lugar dentro del universo real, no hay ningún espacio fuera del universo.

En (35) hemos obtenido distintos valores para W en el caso de la materia y de la radiación (la luz), mientras que en los universos estáticos de Schwarzschild, Einstein, y De Sitter anteriores, únicamente podíamos calcular el W para la materia, y este mismo valor que es incalculable para la luz, lo tomábamos para la luz igual que para la materia, con objeto de que la aniquilación de la materia y la materialización de la radiación (transformación de la masa en energía y viceversa) tenga los mismos efectos en los espacios relativistas estáticos, que en los ordinarios.

Obsérvese la analogía que repetidas veces hemos señalado entre variación en el color de la luz y aceleración o frenado de un reloj, se puede sustituir el viejo sofisma convertido en adagio popular de “todo es del color del cristal con que se mira” por el de “todo es del color con que se mueve el observador”.

Voy a relatar un suceso curioso que es el siguiente: en octubre de 1983 la prensa española publica la siguiente noticia: “La longitud recorrida en el vacío por un rayo de luz en 1/299,792,458 segundos equivaldría, de ahora en adelante, a un metro, según ha decidido la Conferencia General de Pesos y Medidas”.

He de hacer las siguientes puntualizaciones: en una conferencia mía en la Real Academia de Ciencias en mayo de 1979 titulada “el espacio y el tiempo en la teoría de la Relatividad y los principios de mínimo” publicadas por dicha Corporación en el curso conmemorativo del centenario de Einstein (páginas 111 a 133) expuse entre otras cosas una revisión de los fundamentos de la relatividad restringida relacionada con la sustitución de las antiguas unidades de longitud y tiempo vigentes en 1905 y proponía introducir como unidad fundamental la de la velocidad, basada en la velocidad de la luz en el vacío, conservar como fundamental la del tiempo, basada en la definición actual en aquel momento o cambiarla por otra definición como podía ser la constante de semidesintegración de alguna sustancia radiactiva, y que la unidad de longitud pasase a ser derivada en vez de fundamental (véase concretamente las páginas 121 y 122 de dicha publicación). En mi libro “Introducción a la Investigación en Física y Matemáticas”, editado por Empeño 14 en 1981, insistía sobre lo mismo.

La adopción de la nueva unidad de longitud, según la noticia periodística antecitada, está en la línea de lo que propuse en 1979.

Para más detalles, véanse mis antedichas publicaciones.

En el año 2011 tuvo lugar en centenario de la Real Sociedad Matemática Española con tal motivo pronuncié dos conferencias en el Ateneo de Madrid y en la Real Academia de Cultura Valenciana, una de las cuales va a ser publicada. En ellas recordé a un gran hombre y a una gran institución. El primero era Rey Pastor que realizó una gran labor en España y en la Argentina tan importante que se puede hablar de las Matemáticas en estos dos países antes y después de Rey Pastor. La institución fue el Instituto Jorge Juan del CSIC que en los años cuarenta a sesenta desempeñó un papel importantísimo en el desarrollo de la Matemática. Tuvo como directores a Navarro Borrás, Bachiller y Abellanas, allí actuaron catedráticos como Ricardo San Juan, Sixto Ríos quien después pasó a dirigir el Instituto de Estadística. por allí pasaron como becarios los que después fueron catedráticos Gaeta, Plans, Baltasar Rodríguez Salinas, Etayo, Antonio Castro y otros muchos.

Yo publiqué en aquellos años (últimos de los cuarenta y primeros de los sesenta) 22 artículos en su revista Matemática Hispanoamericana y 12 en Gaceta

Matemática, revistas que editaba el Instituto Jorge Juan. Fui becario allí durante dos años como licenciado en Ciencias Matemáticas y lo abandoné cuando terminé la carrera de ingeniero agrónomo y fui destinado a Salamanca, pero siempre mantuve un fuerte contacto con este Instituto hasta su desaparición.

Voy a concluir esta conferencia con unas notas extraídas de mis propias investigaciones. Estas notas están dirigidas a especialistas.

Nota 1ª La materia ordinaria visible y la materia fractal invisible

En mi conferencia en la Real Academia de Ciencias del 2010-2011 que va a ser publicada por la misma he expuesto una nota (la número 11) que lleva por título “la materia fractal no ocupa volumen”. Hoy voy a recordar dicha nota, y la voy a ampliar y también voy a exponer a continuación de esta nota, la nota 2ª que es un ejemplo muy rentable y más fácil de entender.

Existen dos clases de materia que son la materia ordinaria, que es visible, la cual ocupa una parte del espacio, que puede ser una longitud, una superficie (área), o un volumen; en el caso de una longitud está formada por un conjunto infinito de puntos que tienen la potencia del continuo. Por otra parte existe la materia fractal invisible que puede estar sobre una recta o una curva, pero en un número infinito numerable de puntos y que por tanto no ocupa longitud alguna. O también puede estar sobre un número infinito de puntos del interior de una superficie cerrada distribuidos sobre un conjunto infinito numerable de curvas semejantes a la curva envolvente.

En el primero de los dos casos anteriores ni siquiera tienen densidad longitudinal. En el segundo caso no existe densidad espacial, el fractal no ocupa espacio, aunque ocupa infinitas superficies semejantes, las cuales forman un conjunto infinito numerable.

Nota 2ª La fractalización de círculos, esferas e hiperesferas mediante la fractalización del diámetro

La fractalización del diámetro consiste en dividir éste en tres partes iguales (o en más también) y suprimir la central (o suprimir las alturas entre las dos partes extremas que siempre se conservan). Se repite indefinidamente este proceso y el límite cuando el número de divisiones y supresiones de las partes centrales de los segmentos tiende a infinito. La figura geométrica así obtenida se transforma en un conjunto de infinitos puntos en pares (o números pares) de puntos simétricos respecto al centro. Es en el caso más sencillo

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \tag{1}$$

que es un fractal.

Una variable aleatoria repartida uniformemente al azar sobre este fractal si R es el valor del radio, tiene por función característica, como hemos calculado en otras publicaciones el valor:

$$\varphi(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2Rt}{3^n} \tag{2}$$

Lo anterior es consecuencia de fractalizar el diámetro.

Pues bien, fractalizado el diámetro queda automáticamente fractalizado su círculo, que queda transformado en un conjunto de circunferencias concéntricas de radio $2R/3^n$ con n variando de uno a infinito.

Un punto repartido uniformemente al azar sobre este fractal tiene una probabilidad de estar sobre una circunferencia cualquiera proporcional a una longitud y dentro de esta circunferencia está repartida uniformemente al azar sobre la misma. Por tanto su función característica es

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos\frac{2Rt}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} \tag{3}$$

lo que nos permite calcular la varianza que se obtiene efectuando en (3) la sustitución

$$\cos\frac{2R}{3^n} \to \frac{4R^2}{3^{2n}} \tag{4}$$

En el caso de una esfera en vez de una circunferencia la (3) se transforma en la

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n}}\cos\frac{2Rt}{3^n}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n}}} \tag{5}$$

Por ser ahora la probabilidad de estar sobre una de las superficies esféricas que forman el fractal proporcional a su área. La cual permite calcular su varianza, es el coeficiente de $t^2/2$ en el desarrollo del coseno (5) en serie de Taylor.

En el caso de una hipersuperficie de m dimensiones la (3) y la (5) se convierten en:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{(m-1)n}}\cos\frac{2Rt}{3^n}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{(m-1)n}}} \tag{6}$$

que da la fórmula general en función del número de dimensiones, $m=2$ para la circunferencia, $m=3$ para la esfera.

Nota 3ª Las páginas 179 a 184 de mi libro Mecánica y Cálculo Tensorial. Las ecuaciones diferenciales e integrales fraccionarias y continuas

A su vez son una ampliación de mi memoria "Nuevos tipos de ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales. Nuevos fenómenos de oscilación" publicado en la Real Academia de Ciencias tomo 1, 1956 páginas 1 a 151. Este libro se publicó en 1965 por la editorial Dossat en segunda edición. En el capítulo VIII de dicho libro que lleva por título "Teoría del Potencial" en los párrafos 10 y 11 que llevan por títulos: "Las ecuaciones diferenciales fraccionarias y la Teoría del potencial" y "La no conmutabilidad de la derivación fraccionaria" páginas 179 a 182 se exponía mis investigaciones sobre esta materia que son de difícil lectura y en los párrafos 12 y 13 que van de la página 183 a 184 se exponen mis investigaciones sobre "Derivación e integración del índice de derivación de una función/pseudofunción" que voy a reproducir aquí.

Definiendo la derivación e integración por medio de la Transformación de Laplace o de Carson, se pueden considerar muchas operaciones como una sola, pero mientras que la primera es una correspondencia unívoca entre función y derivada, en el sentido en que a cada función le corresponde una sola derivada, por el contrario la integración no lo es, porque a cada función le corresponden varias integrales que resultan cada una de los distintos valores de las constantes de integración. Para hacer esta correspondencia biunívoca, es preciso tomar límites fijos en cada integración, y si tomamos estos iguales a t y cero, como se tiene que

$$\int_0^t f(t)dt \supset \frac{1}{p}F(p) \tag{1}$$

se comprende fácilmente que la integración queda reducida a una derivación de índice negativo.

En virtud de la definición de derivación fraccionaria, se puede definir también una única pseudo-función de dos variables $z(\alpha,t)$ tal que:

$$z(\alpha,t)=\frac{d^2y(t)}{dt^{\alpha}}\supset p^{\alpha}Y(p) \tag{2}$$

siendo $F(p)$ la transformada de Carson o de Laplace de $y(t)$.

Como se puede derivar en ambos miembros de la correspondencia simbólica (2) se tiene que

$$\frac{\partial z(\alpha,t)}{\partial\alpha}=\frac{dy^{\alpha}(t)}{d\alpha}\supset p^{\alpha}\log pY(p) \tag{3}$$

y como utilizando la transformación de Carson:

$$\log p < -\log(t+C) \tag{4}$$

en la que C es la constante de Euler, en virtud del teorema de Borel de la transformación de Carson (véanse mis libros Ingeniería de las Oscilaciones y Ecuaciones Diferenciales y Matrices editados por Dosset) es

$$\frac{\partial z(\alpha,t)}{\partial\alpha}=\frac{dy^{\alpha}(t)}{d\alpha}=-\frac{d}{dt}\int_0^t y^{\alpha}\left(C+\log(t-z)\right)dz \tag{5}$$

Análogamente se puede definir como operación inversa de la anterior, la integración entre $-\infty$ y β, respecto al índice de derivación de una función $y(t)$. En efecto integrando entre $-\infty$ y β, en ambos miembros de (2) se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\beta} z(\alpha,t)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\beta} y^{\alpha}(t)\,d\alpha \supset \frac{p^{\alpha} Y(p)}{\log p} \tag{6}$$

y como utilizando la transformación de Carson

$$\frac{1}{\log p} \subset \nu(t) = \int_{0}^{\infty} \frac{t^{s}}{\Gamma(s+1)}\,ds \tag{7}$$

en la que Γ es la función gamma; por la aplicación del antecitado teorema de Borel se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\beta} z(\alpha,t)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\beta} y^{\alpha}(t)\,d\alpha = \frac{d}{dt}\int_{0}^{t} y^{\alpha}(z)\,\nu(t-z)\,dz \tag{8}$$

Como resultado de las anteriores definiciones, se pueden considerar ecuaciones continuas en los índices de derivación, cuya integración puede verse en mis antecitados libros y memoria de la Revista de la Real Academia de Ciencias.

Desde Newton y Leibnitz existen la derivación y la integración enteras. Desde Liouville existen las fraccionarias, ambas son discretas (discontinuas). En mi opinión existe una tercera derivación e integración continua basada en la transformación de Laplace (o de Carson) TL.

Dada una función $f(t)$ que tiene derivadas y transformada de Laplace entonces sus derivadas e integrales tienen unas TL dadas por el producto por p elevado a la potencia igual al orden de la derivada para ésta, y al producto de $1/p$ para la integral sin o con la suma de un polinomio en potencias de p en caso de la derivada.

Se sabe también que sucede algo parecido cuando la derivación o la integración fraccionarias, entonces siempre hay que multiplicar por una potencia fraccionaria de p, positiva si es la derivada y negativa si la integración.

En mi libro y en mi memoria antecitadas expuse mis investigaciones en las que introduzco, creo que por primera vez el Cálculo Fraccionario en la Teoría del Potencial, en especial en lo relativo a ecuaciones diferenciales, integrales e integrodiferenciales, con varias novedades, como son la derivación e integración del índice de derivación de una función y comprobar la existencia de ecuaciones diferenciales e integrales continuas en los órdenes de derivación e integración. Surgiendo así expresiones como

$$\frac{p^{\nu}}{p^{\nu}-a} \tag{9}$$

siendo ν un número real (no fraccionario, ni entero). Se puede integrar o diferenciar la ν en (9). Por tanto junto a las derivaciones e integraciones de orden entero o fraccionario (discontinuas), existen en mi opinión una nueva derivación e integración continuas en la que los índices de derivación o de integración son reales ni enteros ni fraccionarios.

Nota 4ª La composición del universo y los procesos estocásticos asociados

El universo contiene a la materia ordinaria y a la radiación. Es posible que contenga también materia fractal que no ocupa espacio como ya hemos señalado.

La materia está formada por átomos, y éstos a su vez están formados por electrones, protones y neutrones, siendo su carga eléctrica positiva y negativa iguales entre sí, salvo si existen átomos ionizados, en cuyo caso los átomos incompletos tienen carga eléctrica positiva y ha abandonado algunos electrones que quedan libres como resultado de la ionización, pero en este caso los electrones libres son en número muy pequeño, casi insignificante. Lo son en número aleatorio; se expresan mediante una variable aleatoria de Poisson (ley de los sucesos raros). La carga eléctrica de los electrones libres es negativa e igual a la carga positiva de los muchos átomos ionizados. Existe por tanto una disimetría entre la masa eléctrica negativa y la positiva, la primera es decir la positiva es mucho mayor que la negativa.

La radiación está formada por fotones en número muy grande, mientras que la materia está formada por un número muy grande de protones, neutrones y electrones.

Los fotones se pueden descomponer en electrones y positrones en igual número, pero con una probabilidad de descomposición muy pequeña, así es que el número igual de electrones y positrones es muy pequeño, se crean un electrón y un positrón por cada fotón que se descompone. Así mismo un electrón y un positrón se transforman en un fotón con una probabilidad pequeñísima.

En una conferencia anterior dada en la Real Academia de Ciencias titulada "Los métodos matemáticos de la Astronomía y la Cosmología" ya publicada, en mi nota 1a titulada "El proceso estocástico de los positrones en el seno de la materia" demostré que al tender el tiempo a infinito, el número aleatorio de los positrones creados tiende a una variable aleatoria de Poisson (ley de los sucesos raros) y calculado la función característica de esta probabilidad. Esto ha sido explicado con mucho detalle en la antecitada conferencia.

Nota 5ª Los dos procesos estocásticos de la transformación aleatoria de un protón en un neutrón y de un neutrón en un protón

Se sabe que un protón, de los que hay un número grandísimo, tiene una probabilidad pequeñísima de transformarse en un neutrón y un positrón y así mismo un neutrón aún tiene una probabilidad más pequeña de transformarse en un protón y un electrón.

Si llamamos p y q a las probabilidades anteriores, de transformación de un protón en un neutrón y un positrón; y de un neutrón en un protón y un electrón, y si llamamos x e y a los números de protones y de neutrones en un tiempo t, y llamamos x_0 e y_0 a los existentes en el instante inicial se cumple en una teoría determinista que:

$$\frac{dx}{dt} = qy - px; \quad \frac{dy}{dt} = px - qy \tag{1}$$

y de las dos anteriores se sigue que:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = x_0 + y_0 \tag{2}$$

es decir que la suma de los números iniciales de protones y de neutrones se conserva, porque todos los que desaparecen de uno de ellos aumentan el número de los otros.

De (1) y (2) se sigue que:

$$\frac{dx}{dt} = q\left(x_0 + y_0 - x\right) - px \tag{3}$$

que se puede escribir

$$\frac{dx}{dt} + x\left(p+q\right) = q\left(x_0 + y_0\right) \tag{4}$$

y la análoga para y:

$$\frac{dy}{dt} + y\left(p+q\right) = p\left(x_0 + y_0\right) \tag{5}$$

Lo que nos permite calcular los números de protones y de neutrones en la teoría determinista que corresponde a los valores medios en la teoría probabilista, que es la de Poisson, de los sucesos raros.

Las integrales de las dos ecuaciones diferenciales (4) y (5) son si los valores de x y t para $t = 0$ son x_0 e y_0, las dos

$$x = \frac{q\left(x_0 + y_0\right)}{p+q} + \left(x_0 - \frac{q\left(x_0 + y_0\right)}{p+q}\right)e^{-(p+q)t} \tag{6}$$

de la que se sigue la

$$x = \frac{q\left(x_0 + y_0\right)}{p+q} + \frac{x_0 p - y_0 q}{p+q}e^{-(p+q)t} \tag{7}$$

Análogamente la integral de (5) es:

$$y = \frac{p\left(x_0 + y_0\right)}{p+q} + \frac{y_0 p - x_0 q}{p+q}e^{-(p+q)t} \tag{8}$$

Las (7) y (8) para $t = 0$ valen

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0, \quad y = y_0 \tag{9}$$

Sumando (7) y (8) se obtiene

$$x + y = x_0 + y_0 \tag{10}$$

Para $t = \infty$ se tiene para x e y los valores

$$t = \infty \quad \Rightarrow \quad x = \frac{q\left(x_0 + y_0\right)}{p+q}; \quad y = \frac{p\left(x_0 + y_0\right)}{p+q} \tag{11}$$

Y como p es mayor que q se tiene cualquiera que sean x_0, y_0 que:

$$p > q; \quad t = \infty \quad \Rightarrow \quad y > x \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\text{Si } px_0 > qy_0 \text{ se tiene que } y_\infty > y_0, x_\infty < x_0 \\ &\text{Si } px_0 = qy_0 \text{ se tiene que } y_\infty = y_0, x_\infty = x_0 \\ &\text{Si } px_0 < qy_0 \text{ se tiene que } y_\infty < y_0, x_\infty > x_0 \end{aligned} \tag{13}$$

porque siempre se cumple la (10).

Nota 6ª La analogía entre el proceso estocástico físico anterior y el proceso estocástico sociológico de la doble emigración entre dos poblaciones

El proceso anterior es análogo al de cómo varían en el tiempo las poblaciones entre las que se establece una probabilidad muy pequeña de que un individuo de una población emigre a la otra. Tanto en una como en otra la función de distribución de las poblaciones que emigran obedecen a la ley de los sucesos raros de Poisson.

Nota 7ª Mis 27 libros

El primer libro que escribí, lo publicó la editorial brasileña el Globo en portugués para incluirlo en un enciclopedia titulada Manual del Ingeniero. Quiso la editorial que algunos autores fueran extranjeros y pidió al Profesor D. Julio Rey Pastor le diera el nombre de un autor español y les dió mi nombre.

La parte mía la titulé "Teoría de las Oscilaciones y Aplicaciones". Mi parte fué de 234 páginas.

20 libros fueron publicados por las editoriales Dossat, Editorial Nacional, Paraninfo, Ra-Ma, editorial Empeño, Instituto de España, Escuela T. S. de Ingenieros Agrónomos.

2 libros la mitad mía y la otra de otros profesores. Fueron editados por Dossat y por la Universidad Nacional de Distancia.

Los otros cuatro libros aun no se han publicado.

Nota 8ª El desarrollo de la Mecánica de Fractales

La Mecánica clásica trata de sólidos, placas y barras y puntos materiales.

Para desarrollar la Mecánica de los fractales he introducido los conceptos de semisólidos, semiplacas y semibarras, que tienen tres, dos y una dimensión, los cuales resultan de fractalizar un sólido, una placa o una barra.

En la Mecánica clásica son necesarios los momentos de inercia de tres, dos o una dimensión y también los de un punto material. Los cuales surgen como integrales, los cuales surgen como integrales de tres, dos o una dimensión:

$$\int f(x)dx; \quad \iint f(x,y)dxdy \quad \iiint f(x,y,z)dxdydz$$

mientras que en los fractales se resuelven los problemas mediante sumas infinitas simples, dobles o triples:

$$\sum f(x); \quad \sum\sum f(x,y); \quad \sum\sum\sum f(x,y,z)$$

es decir se utilizan series, simples, dobles o triples, en vez de integrales.

Estos libros contienen más de seis mil páginas.

BIBLIOGRAFÍA

Aparte de las cuatro conferencias publicadas citadas al principio de esta conferencia se pueden consultar los siguientes libros míos.

1. Mecánica y Cálculo Tensorial (2ª edición) editorial Dossat 1965.

2. Curso de Mecánica en forma de problemas editado por la Escuela T.S. de Ingenieros Agrónomos de Madrid 1978.

3. Diccionario de Matemática Moderna 3ª edición 1994.