Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 105, Nº. 2, pp 241-258, 2012
XIV Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

LA CUADRATURA DEL CÍRCULO: HISTORIA DE UNA OBSESIÓN

FERNANDO BOMBAL GORDÓN *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. 28040 Madrid.

Dedicado a mi colega y buen amigo Juan Tarrés,
en ocasión de su jubilación.

1. INTRODUCCIÓN

El primer intento conocido de obtener un cuadrado de área igual a la de un círculo dado (lo que se conoce por *cuadrar el círculo*) aparece enunciado en el Papiro Rhind, un documento egipcio descubierto en 1855 y que contiene una serie de problemas matemáticas planteados hace unos 4.000 años. Sin embargo, fueron los antiguos griegos, los que plantearon con precisión el problema en términos matemáticos, a saber: construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, *utilizando sólo la regla y el compás*

La dificultad del problema ha calado en el folclore popular, y la frase *cuadratura del círculo* ha pasado al lenguaje coloquial como sinónimo de algo imposible de realizar. He aquí una muestra de citas tomadas en distintos ámbitos de la sociedad:

> "De alguna manera se trata de *cuadrar un círculo*: las comunidades tienen que acometer duros recortes y eso supone dificultades para reactivar la economía…" (El País, 9-11-2011)

> "El Partido Popular acaba de publicar un vídeo en el plantea la hipotética *cuadratura del círculo* para salir de la crisis" (Blog económico *El blog Salmón,* 18-11-2011).

> "En el debate de investidura celebrado en el Congreso, Mariano Rajoy volvió a poner de manifiesto su principal afición política, consistente en intentar una y otra vez la *cuadratura del círculo…*" (artículo de Anxo Guerreiro, publicado en El País el 21-12-2011).

También hay abundantes muestras en la Literatura, desde los conocidos versos de **Dante** en *La Divida Comedia:*

> "*Qual è'l geomètra che tutto s'affige*
> *per misurar lo cerchio, e non ritrova,*
> *pensando, quel principio ond'elli indige,…*"[1]

en los que el poeta compara la tarea de comprender en términos humanos a Dios, con el vano intento del geómetra para cuadrar el círculo, hasta el título de una obra reciente del escritor y Académico **Álvaro Pombo,** Premio Fastenrath de la RAE 1999 en la que el autor: "narra el imposible propósito de unificar religión y guerra, espiritualidad y política, amor y

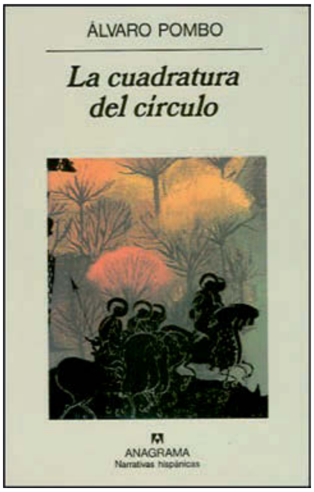


Figura 1

[1] Y como el geómetra que afanado/ en medir el círculo no halla/ en su pensamiento el principio que necesita,…

crueldad. La vida de **Acardo**, el protagonista, está zarandeada por mensajes contradictorios: el atractivo de la guerra, la fascinación por el influyente **San Bernardo de Claraval**, la brillantez de la corte del duque de Aquitania, trovador y tiránico, la excitación de las batallas, el fulgor de la sangre [...]. El corazón humano está siempre pluralmente solicitado. ¿Es acaso posible unificar esa variedad de llamadas, incitaciones, deseos, o sería justamente intentar *cuadrar el círculo*?"

E incluso hay una canción del grupo **Vetusta Morla** con ese título, que contiene estos versos:

Cuadrar el círculo de esta obsesión oh no...
Asumir que rendirse no es una opción no no...

Este paso al acervo popular del enunciado de un problema matemático planteado formalmente hace 2.400 años muestra el profundo impacto que ha tenido a lo largo de los siglos, convirtiéndose en muchos casos en una verdadera obsesión. El problema ha atraído la atención de innumerables matemáticos, tanto profesionales como aficionados, e incluso, como veremos, en 1897 se llegó a discutir un proyecto de ley en el Senado del estado de Indiana (U.S.A.) para legalizar un método de cuadrar el círculo. Hoy en día siguen apareciendo de vez en cuando nuevas "soluciones" al problema, y los aficionados *cuadradores de círculos*, junto con sus compañeros *trisectores de ángulos* y *duplicadores del cubo*, continúan enviando soluciones a Departamentos de Matemáticas de Universidades y Academias en todo el mundo. Y eso a pesar de que desde 1882 se sabe sin ningún género de duda que es imposible construir *con regla y compás solamente*, un cuadrado de la misma área que un círculo dado. Sin embargo, los mismos griegos obtuvieron soluciones para "cuadrar el círculo" por medio de ingeniosos razonamientos, que involucraban siempre el uso de algo más que la regla y el compás, como tendremos ocasión de ver.

A lo largo de este trabajo trataremos de contar someramente la historia del problema, comenzando por su enunciado preciso, así como algunos de los más notables intentos de solución. También veremos cómo el problema impulsó el desarrollo de nuevas técnicas y herramientas matemáticas. Finalmente, terminaremos dando cuenta de algunas variantes curiosas del mismo.

2. LA MEDIDA DE MAGNITUDES

La noción de *magnitud geométrica* (longitud, área o volumen) es muy antigua, ligada como está a situaciones concretas de la vida cotidiana, como son la determinación de la distancia entre dos lugares, la extensión de un terreno o la cuantificación de una determinada cantidad de vino, aceite o cualquier otro líquido. No es extraño, pues, que ya las primeras civilizaciones conocidas desarrollaran métodos y técnicas para su cálculo, al menos en casos sencillos. Así ocurre con las civilizaciones egipcia y babilónica; en ambos casos nos han llegado solamente la resolución de problemas concretos y algunas *recetas,* y no un método sistemático de cálculo.

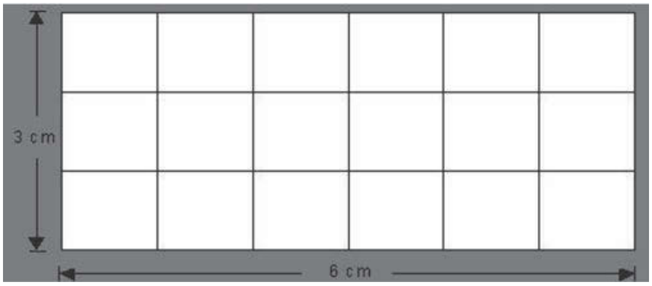


Figura 2

Por ejemplo, en el caso de áreas, partiendo de la *evidencia* de que el área de un rectángulo es el producto de las longitudes de su base y su altura (**Fig. 2**), resulta inmediatamente el área del triángulo, como la mitad de la del rectángulo de su misma base y altura; las áreas de figuras poligonales elementales se calculan por el *método de disección*, consistente en dividir la figura en triángulos, y recombinarlos para obtener un rectángulo (**Fig. 3**).

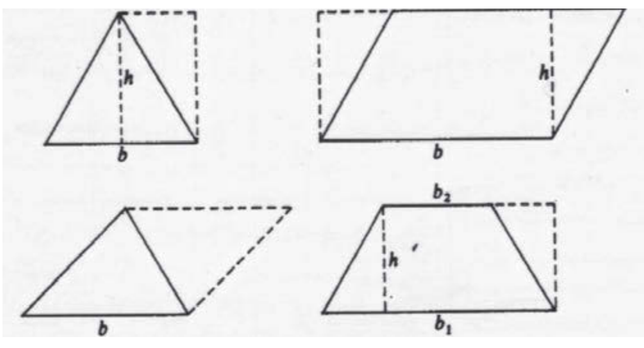


Figura 3

En cuanto a otro tipo de figuras, digamos, por ejemplo, que los egipcios calculaban el área del círculo de radio r por la fórmula $A=\left(\frac{16}{9}r\right)^2$, mientras que los babilonios utilizaban la $A=3r^2$. En ninguno de los casos hay indicios del argumento seguido para llegar a la fórmula usada. Esta situación es típica de la información que nos ha llegado de la Matemática egipcia o mesopotámica: para resolver un problema se enumeran una serie de pasos a seguir, sin ninguna justificación.

El cambio se va a producir en Grecia, origen de una de las civilizaciones más brillantes de la historia. Entre los siglos X y VII antes de Cristo las más importantes *polis* continentales se embarcaron en un ambicioso proyecto de comercio y colonización del Mediterráneo y el Mar Negro, dando origen a una cultura dinámica e independiente, abierta al debate y al análisis y con una gran curiosidad intelectual por todo lo que rodea al hombre.

En particular, los escépticos pensadores griegos no estaban dispuestos a aceptar como única respuesta a sus preguntas sobre la Naturaleza las basadas en la autoridad de una tradición milenaria, y trataron de encontrar sus propias respuestas que no sólo les convenciera, sino que pudieran convencer a los demás. Y así surgen la Filosofía, las Matemáticas y la Ciencia en el sentido moderno del término.

Se suele atribuir a **Tales de Mileto** (640-546 a. d. C.), uno de los S*iete Sabios de Grecia*, la paternidad de la demostración en matemáticas, el primer estudioso en insistir en ello. A partir de él, los griegos fueron desarrollando una serie de técnicas y métodos que, finalmente, condujeron a la creación del método axiomático y el sistema lógico deductivo que ha servido de modelo a todos los matemáticos posteriores: Se trata de, a partir de un reducido número de "verdades evidentes" o *axiomas*, construir todo el edificio matemático a través de una serie de pasos, cada uno deducido de los anteriores siguiendo rigurosamente las leyes de la lógica.

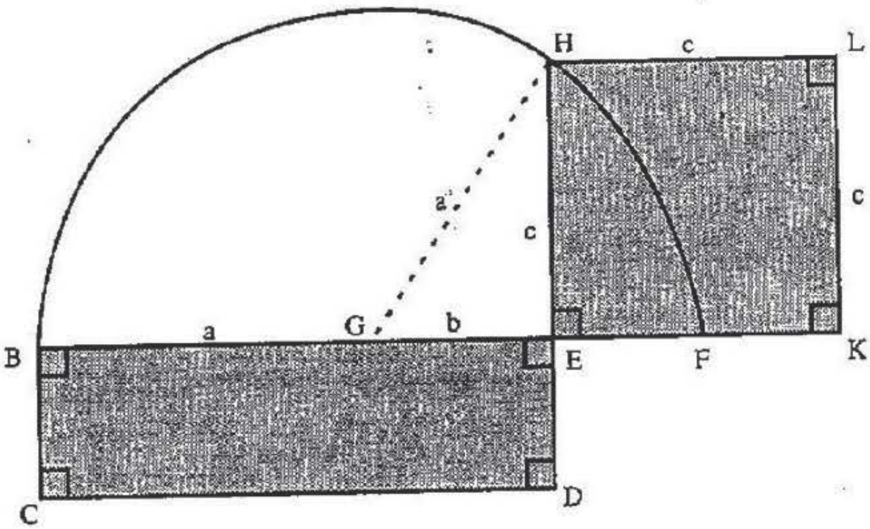
La elección de los axiomas es básica para la solidez del edificio construido. Así, **Aristóteles** señala la importancia de que los conceptos introducidos sean no autocontradictorios, y la manera más clara de comprobar esto es la posibilidad de **construcción** de tales objetos. Y entre los objetos geométricos más simples, visualmente construibles y no contradictorios, están la *línea recta* y la *circunferencia*. Esto, junto con el gusto por el orden, la simplicidad y la belleza, justifica la insistencia de los matemáticos griegos en buscar métodos de demostración *basados exclusivamente en el uso de la regla y el compás*. De esta manera, los resultados así obtenidos tendrían el carácter de *verdad necesaria*, al poseer unos cimientos suficientemente sólidos y rigurosos.

Así pues, la Matemática griega *rigurosa* se vio confinada a la Geometría plana (o, a lo sumo, tridimensional) y especialmente a los objetos construíbles con regla y compás.

El contenido esencial de la matemática griega hasta el 300 a.C., está recogido en *Los Elementos* de **Euclides**, paradigma del método axiomático-deductivo.

Los griegos desarrollaron una completa *teoría de proporciones* para comparar entre sí y manejar las distintas magnitudes geométricas. Tomando como ejemplo el caso del área de figuras planas, en *Los Elementos* se emplea sistemáticamente el método de "aplicación de áreas" para construir figuras geométricas con propiedades prefijadas (p.ej., construir un rectángulo de base dada y área igual a la de un cuadrado dado, etc.) De este modo, se establecen rigurosamente las relaciones usuales entre triángulos y (por subdivisión), figuras poligonales semejantes y su *cuadratura*, es decir, la construcción de un cuadrado con la misma "área". Éste es para los griegos un concepto primitivo, definido a través de lo que hoy llamaríamos una "relación de equivalencia". En efecto, dos figuras poligonales *tienen la misma área* si, por medio de las técnicas de "aplicación de áreas", pueden ambas transformarse en el mismo cuadrado. Veamos algunos ejemplos:

Cuadratura de un rectángulo:

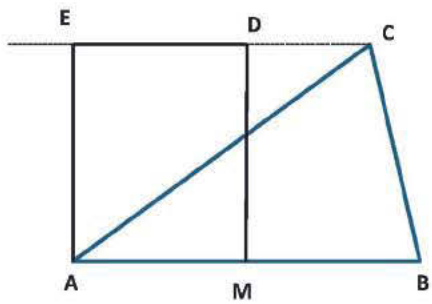


Dado el Rectángulo **BCDE** se prolonga **BE** y se construye **EF = ED** (compás). **G =** punto medio de **BF.** Se traza la circunferencia de centro **G** y radio **a = BG =GF = b+ED.** La perpendicular a **BE** por **E** corta en H a la circunferencia.
Aserto: área del cuadrado de lado **HE (= c)** = área rectángulo **BCDE.** En efecto, área(**BCDE**) = (a+b)**EF** = (a+b)(a-b) = c x c

Figura 4

Cuadratura de un triángulo:

En la Proposición 42 del Libro I de *Los Elementos* se establece un método para construir un paralelogramo de ángulo prefijado α en la base, de área igual a la de un triángulo dado. En particular, tomando α igual a un ángulo recto, se puede construir un rectángulo de área igual a la de un triángulo dado (**Fig. 5**):



Sea **AM = BM.** El triángulo **ABC** es entonces igual al rectángulo **AMDE.**

Figura 5

Las áreas de los cuadrados se pueden sumar fácilmente: Si $\mathbf{C_1}$ es un cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$ y $\mathbf{C_2}$ es un cuadrado de lado $\boldsymbol{b}$, el Teorema de Pitágoras nos dice que en el triángulo rectángulo de catetos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, el cuadrado construido sobre la hipotenusa $\boldsymbol{h}$ tiene área igual a la suma de la de los cuadrados $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$.:

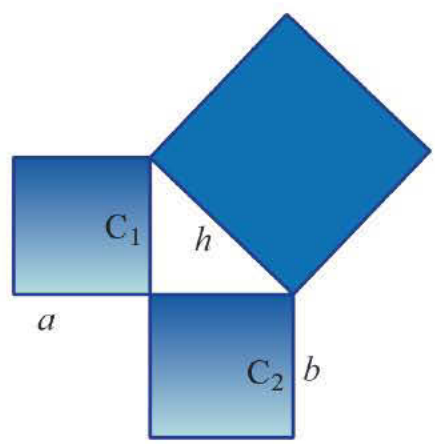


Figura 6

Finalmente, un polígono cualquiera, como el de la **figura 7** se puede subdividir en triángulos trazando diagonales, y aplicar los procesos anteriores para construir un cuadrado del mismo área que el polígono original.

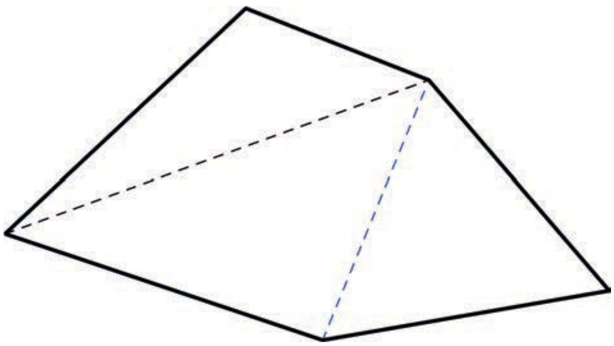


Figura 7

Los griegos asumieron también como evidente que todas las figuras geométricas simples (círculos, elipses, etc., y las obtenidos por uniones e intersecciones de ellas) tenían un "área", que era una magnitud geométrica del mismo tipo que el área de las figuras poligonales, gozando en particular de las propiedades naturales de monotonía y aditividad. Sin embargo, no estaba nada claro que las regiones limitadas por líneas no poligonales pudieran *cuadrarse,* es decir, construir un cuadrado con la misma área.

3. PRIMEROS INTENTOS: CUADRATURA DE LÚNULAS.

Al parecer, las primeras noticias sobre el origen del problema de la cuadratura del círculo en Grecia se encuentran en el libro que escribió **Plutarco** en la primeria centuria de nuestra era sobre el filósofo del siglo V a. de C. **Anaxágoras,** maestro de **Pericles.** Condenado a prisión en Atenas por impiedad, al afirmar, entre otras lindezas, que el Sol no era un dios, sino una enorme piedra calentada al rojo, Plutarco cuenta que, para entretenerse, Anaxágoras intentó cuadrar el círculo. No parece que tuviera mucho éxito.

Debemos insistir en la naturaleza del problema: Nadie dudó a lo largo de los siglos de que, dado un círculo, *existiese* un cuadrado con la misma área (es decir, que el círculo tuviera un área). El problema es si se puede *construir* ese cuadrado con el uso exclusivo de la regla y el compás.

La primera cuadratura rigurosa (con regla y compás) de una figura curvilínea se debe a un contemporáneo de **Anaxágoras,** el matemático **Hipócrates de Chíos,** autor de unos perdidos[2] *Elementos de Geometría*, un siglo antes que los de **Euclides**. Se atribuye a Hipócrates el descubrimiento de que la razón entre las áreas de dos círculos es igual a la razón de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus diámetros, aunque no nos ha llegado ninguna traza de la posible demostración (la demostración que aparece en el libro XII de los *Elementos* de Euclides, se debe a **Eudoxo**).

En todo caso, a partir del teorema sobre los círculos, **Hipócrates** consiguió fácilmente la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la historia: Se trata de la cuadratura de una *lúnula*, es decir, una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia. Concretamente, el caso tratado por **Hipócrates** es el de la lúnula formada por el semicírculo construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles **ABC** y el construido sobre una de sus catetos **AC** (**Fig. 8**):

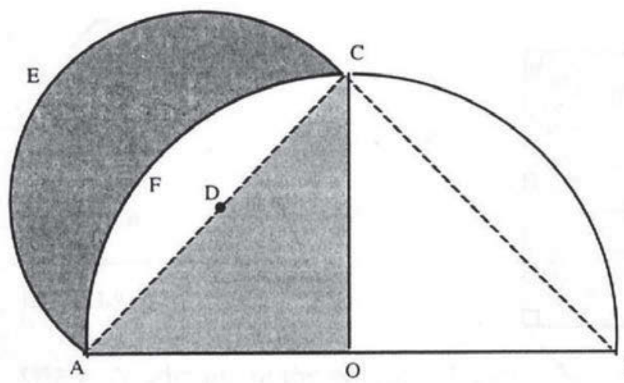


Figura 8

[2] La obra de **Hipócrates** no ha llegado hasta nuestros días. Su trabajo fue descrito por **Eudemo de Rodas** (siglo IV a. de C.), discípulo de **Aristóteles**. También se ha perdido la historia de **Eudemo**, pero la sección que describe el trabajo de **Hipócrates** sobre la cuadratura de lúnulas se reproduce en un comentario a la *Física* de **Aristóteles** realizado por **Simplicio** en el siglo VI de nuestra era. Y así ha llegado a nosotros el conocimiento de estos hechos.

El Teorema de Pitágoras nos dice que $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2AC^2$, luego

$$\frac{\text{Área (semicírulo } AEC)}{\text{Área (semicírculo } ACB)} = \frac{(AC)^2}{(AB)^2} = \frac{(AC)^2}{2(AC)^2} = \frac{1}{2},$$

Por tanto

$$\text{Área (semicírculo } AEC) = \frac{1}{2}\text{Área (semicírculo } ABC) = \text{Área (cuadrante } AFCO),$$

Y, en consecuencia, sustrayendo el área de la región común AFCD, obtenemos

$$\text{Área (lúnula } AECF) = \text{Área (triángulo } ACO).$$

¡Así pues, la lúnula AECF puede cuadrarse con regla y compás!

La cuadratura de la lúnula sin duda llenó de optimismo a **Hipócrates** y sus seguidores, como paso previo a la cuadratura del círculo. De hecho, **Hipócrates** parece ser que consiguió cuadrar otros dos tipos de lúnulas. Muchos de los *cuadradores de círculos* posteriores comenzaron con intentos de cuadrar algún nuevo tipo de lúnula. Sin embargo, no hubo realmente nuevos progresos hasta 1771, cuando el gran **L. Euler** (1707-1783) abordó el problema, encontrando otros dos tipos nuevos de lúnulas cuadrables. Finalmente, en 1947, los matemáticos ucranios **N. Chebotarev** y **A. Dorodvnov** culminaron una serie de resultados que se habían ido obteniendo a partir de los trabajos de **Euler** y probaron que las cinco lúnulas descritas por Euler eran las *únicas* cuadrables con regla y compás (*Cfr.* [13])

4. EL MÉTODO DE EXHAUSCIÓN. ARQUÍMEDES.

Como hemos citado en la introducción, el que el área de un círculo fuera proporcional al cuadrado de su radio es un hecho aceptado por las civilizaciones más antiguas, como las egipcias y mesopotámicas, y básico en el argumento de **Hipócrates** de la cuadrabilidad de la lúnula. Los griegos conocían y aceptaban este hecho (junto con el de que la longitud de una circunferencia era proporcional a su diámetro), pero las primeras demostraciones rigurosas que nos han llegado son las que aparecen en *Los Elementos* de **Euclides**. Estas demostraciones están basadas en el *principio de Eudoxo*, que aparece incluido en la Definición 4 del Libro V de *los Elementos* y es enunciado explícitamente como axioma por **Arquímedes**; Una de sus consecuencias más utilizadas es la siguiente: (Proposición X.1 de *Los Elementos*):

> *Dadas dos magnitudes distintas* $\mathbf{M} > \mathbf{m}$*, si de la mayor* $\mathbf{M}$ *se quita una magnitud mayor que su mitad, y de lo que queda se quita una magnitud mayor que su mitad, y el proceso se repite continuamente, se llegará a obtener una magnitud menor que* $\mathbf{m}$.

Utilizando esta proposición, se puede demostrar rigurosamente la idea intuitiva de que un conjunto dado **A** (p. ej., un círculo, una esfera, un cono de base circular, etc.) se puede *aproximar* todo lo que se quiera por figuras inscritas más sencillas (en los casos mencionados anteriormente serían polígonos regulares, poliedros formados por unión finita de pirámides de vértice el centro de la esfera, pirámides con el mismo vértice que el cono, etc.)

Este es el paso previo para demostrar la mayor parte de los teoremas que aparecen en *los Elementos*, estableciendo una relación entre las magnitudes de dos conjuntos **A** y **B**, de la forma $m(\mathbf{A}) = km(\mathbf{B})$. En efecto, el argumento consiste en construir dos sucesiones de figuras poligonales o poliédricas, $(\mathbf{P_n})$ inscritas en **A** y $(\mathbf{Q}_n)$ inscritas en **B**, tales que $m(\mathbf{Q_n}) = km(\mathbf{P_n})$ para todo n. Por aplicación del principio de Eudoxo se muestra en cada caso que, dado $\epsilon > 0$, se tiene $m(\mathbf{A}) - m(\mathbf{P_n}) < \epsilon$ y $m(\mathbf{B}) - m(\mathbf{Q_n}) < \epsilon$ para n suficientemente grande. En términos modernos, la prueba estaría completa, ya que $m(\mathbf{B}) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n) = \lim_{n\to\infty} km(P_n) = m(\mathbf{A})$. Sin embargo, el "horror al infinito" de los griegos, originado por las discusiones filosóficas y las paradojas a las que daban lugar la aceptación de procesos infinitos, hicieron que el concepto de límite les fuera extraño, por lo que utilizaban en su lugar una doble reducción al absurdo: Si $m(\mathbf{B}) > k\, m(\mathbf{A})$, escribamos $\epsilon = m(\mathbf{B}) - k\, m(\mathbf{A})$. Elijamos figuras inscritas **P** en **A** y **Q** en **B** tales que

$$m(\mathbf{Q}) = k\, m(\mathbf{P}) \text{ y } m(\mathbf{Q}) > m(\mathbf{B}) - \epsilon = k\, m(\mathbf{A}).$$

Pero esto es una contradicción, ya que $\mathbf{P} \subset \mathbf{A}$ y, por tanto, $m(\mathbf{P}) \leq m(\mathbf{A})$. Intercambiando los papeles de **A** y **B** se muestra que el supuesto $k\, m(\mathbf{A}) > m(\mathbf{B})$ conduce también a contradicción, luego debemos concluir que $m(\mathbf{B}) = k\, m(\mathbf{A})$.

Es así como en *Los Elementos* se prueba que si designamos por $\ell(C_r)$ la longitud de la circunferencia de radio r y por $a(C_r)$ el área del círculo de radio r se tiene que (**Fig. 9**)

$$\frac{\ell(C_r)}{\ell(C_R)}=\frac{r}{R} \quad y \quad \frac{a(C_r)}{a(C_R)}=\frac{r^2}{R^2}$$

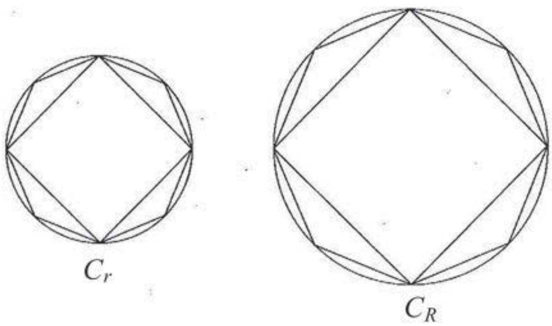


Figura 9

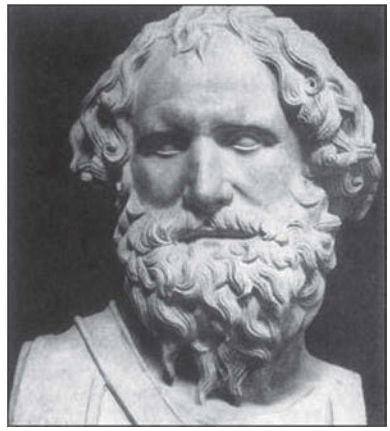
Por supuesto, estas propiedades las enuncian los geómetras griegos en términos de su teoría de proporciones*: las longitudes* (respectivamente *áreas*) *de dos circunferencias* (resp*., círculos*) *guardan la misma razón que sus radios* (resp., *los cuadrados de sus radios*). Pero, aprovechando nuestra notación superior, podemos escribir las relaciones anteriores en la forma:

$$\frac{\ell(C_r)}{r}=\frac{\ell(C_R)}{R}=\pi_1$$

y

$$\frac{a(C_r)}{r^2}=\frac{a(C_R)}{R^2}=\pi_2$$

Pero ¡en ningún lugar de los *Elementos* se encuentra probada la relación entre las dos constantes!, a saber $\boldsymbol{\pi}_1=2\boldsymbol{\pi}_2$.



Arquímedes (287-212 a. de C.)

Debemos al genio inigualable de **Arquímedes** estos hechos fundamentales (por supuesto, no con el enunciado anterior). En efecto, utilizando de manera brillantísima un refinamiento del conocido método de exhausción, (aproximando el círculo por polígonos regulares inscritos y circunscritos) **Arquímedes** probó en *La Medida del Círculo* ([11; pág. 91] que:

Proposición 1. *El área de un círculo es igual a la de un triángulo de base la longitud de su circunferencia y de altura el radio*[3].

En consecuencia, $a(C_r)=\frac{1}{2}r\ell(C_r)$ y, por tanto, $\pi_2 = 1/2\pi_1 := \pi$[4]. La Proposición 1 era probablemente conocida antes de **Arquímedes,** aunque éste proporcionó la primera demostración rigurosa de la misma. Por supuesto, la Proposición 1 implica los resultados ya citados de **Euclides**. La proposición reduce la cuadratura del círculo al problema de rectificación de la circunferencia. Siendo pues consciente de este hecho, **Arquímedes** no se para aquí, sino que establece la siguiente

Proposición 3. *La razón de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro es menor que* $3+\frac{1}{7}$ *y mayor que* $3+\frac{10}{71}$.

[3] Por supuesto, esto no resuelve el problema de la cuadratura del círculo, pues no se da ninguna indicación de cómo *construir* el triángulo en cuestión, conocido solamente el radio del círculo.

[4] Al parecer, el primero en proponer el símbolo π (letra inicial de la palabra griega ***περιφέρεια***=*periferia*) para designar la razón de la circunferencia a su diámetro fue **William Jones** (editor también del *Analysis per aequationes* de **Newton**) en 1706. Como en tantas otras ocasiones, se debe al genio de **L. Euler** la popularización de esta notación. **Euler** usó el símbolo π por primera vez en su *Mechanica* (1736), aunque en otros trabajos empleó la letra *p*. Es a partir de la aparición del símbolo en la *Introductio*, en donde Euler escribe su valor con 127 decimales ([8; Cap. VIII, pág. 126]; el valor está tomado de la *Mémoire sur la quadrature du cercle*, publicado por **T. G. de Lagny** en 1727) cuando su uso se universaliza.

Lo que en notación moderna se puede escribir como $3{,}140845 < \pi < 3{,}142857$. La manera como **Arquímedes** prueba su resultado es una muestra más de su genio: comienza considerando un hexágono regular inscrito en el círculo. Por supuesto, **Arquímedes** sabía bien que el lado de ese hexágono era igual al radio del círculo, *r*. Por tanto:

$$\pi = \frac{\ell(C_r)}{2r} > \frac{\text{perímetro del hexágono}}{2r} = \frac{6r}{2r} = 3,$$

A continuación, **Arquímedes** procede a duplicar el número de lados del polígono inscrito, para obtener una mejor aproximación, considerando también los correspondientes polígonos circunscritos, y continúa de esta forma hasta considerar el polígono regular de 96 lados. Si tenemos en cuenta que no disponía de un sistema de numeración como el nuestro ni de procedimientos algorítmicos para el cálculo aproximado de raíces, sino que todos sus argumentos estaban basados en procedimientos puramente geométricos, podemos imaginar la enorme habilidad de **Arquímedes** para obtener esta primera estimación rigurosa del valor de π. En resumen, obtuvo

$$\pi > \frac{\text{perímetro del polígono inscrito de 96 lados}}{2r} > \frac{6336}{2017 + 1/4} > 3 + \frac{10}{71}$$

y

$$\pi < \frac{\text{perímetro del polígono circunscrito de 96 lados}}{2r} < \frac{14688}{4673 + 1/2} < 3 + \frac{1}{7}$$

A partir del trabajo de **Arquímedes**, gran parte de los esfuerzos de los *cuadradores de círculos* posteriores se dividieron entre la obtención de métodos geométricos para construir un segmento de longitud π a partir de un segmento de longitud unidad, y la obtención de más y más cifras exactas de π. Volveremos más adelante sobre este tema.

Pero **Arquímedes** no se detuvo aquí, sino que con una portentosa habilidad logró obtener de forma absolutamente rigurosa la cuadratura de otras figuras curvilíneas, como son la cuadratura de la elipse y la de un segmento de parábola. Estas curvas (junto con la hipérbola) las introdujeron originalmente los griegos como intersección de un cono recto con distintos planos, de ahí su nombre de *cónicas*. Su descubrimiento y estudio de las primeras propiedades se atribuyen a **Menecmo** (ca. 350 a. de C.), un discípulo de **Eudoxo** y maestro de **Alejandro**, y fueron objeto preferido de estudio por parte de los geómetras de los siguientes 2.200 años.

El caso de la cuadratura de la parábola es de destacar porque en él **Arquímedes** se encuentra con el problema de calcular la suma de una serie (en términos geométricos) que, como es habitual, resolvió con una doble reducción al absurdo. En efecto (**Fig. 10**), se

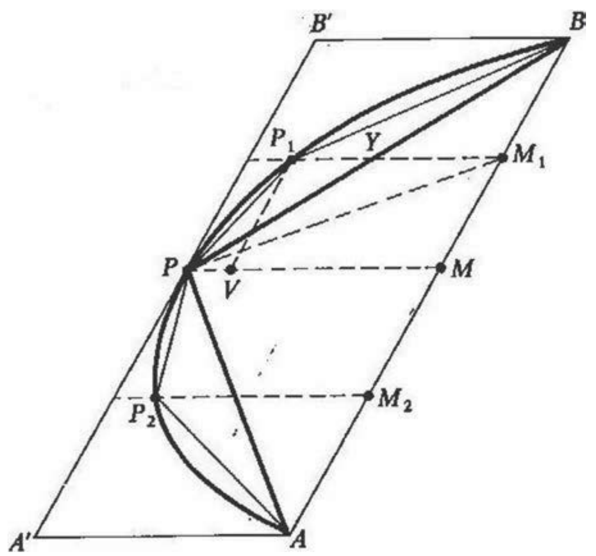


Figura 10

trata de calcular el área del segmento parabólico **APB** "llenándolo" con los triángulos **APB, AP$_2$P, PP$_1$B,** etc. Utilizando las propiedades geométricas de la parábola, **Arquímedes** logró probar que $a(\Delta \mathbf{PP_1B}) = 1/4\, a(\Delta \mathbf{PMB})$ y, análogamente, $a(\Delta \mathbf{AP_2P}) = 1/4\, a(\Delta \mathbf{APM})$, luego, si llamamos $\alpha = a(\Delta \mathbf{APB})$ se tiene $a(\Delta \mathbf{AP_2P}) + a(\Delta \mathbf{PP_1B}) = 1/4\,\alpha$. Si se repite el proceso, añadiendo más y más triángulos por subdivisión de los respectivos arcos parabólicos, al cabo de *n* pasos el polígono inscrito obtenido $\mathcal{P}_\mathbf{n}$ tendrá un área $a(\mathcal{P}_\mathbf{n}) = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + \ldots + \frac{\alpha}{4^n}$. Además, el Principio de Eudoxo permite afirmar que para *n* suficientemente grande, $a(\mathcal{P}_\mathbf{n})$ y el área del segmento parabólico diferirán tan poco como se quiera, Entonces **Arquímedes** obtiene la identidad elemental

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3},$$

de donde deduce

$$a(\wp_n)=(4\alpha/3)-(\alpha/3)\cdot(1/4^n)$$

y, mediante una doble reducción al absurdo, obtiene el resultado deseado:

$$a(\text{segmento parabólico})=\frac{4}{3}\alpha=\frac{4}{3}a(\Delta\mathbf{APB}).$$

Como vemos, en este caso, como en el de las *lúnulas* de **Hipócrates**, se consigue una cuadratura efectiva, ya que el triángulo **APB** puede construirse con la sola ayuda de la regla y el compás, a partir de los datos (el segmento parabólico).

5. CUADRATURAS "MECÁNICAS"

Para la época de **Arquímedes** los griegos tenían prácticamente asumido que el problema de la cuadratura del círculo (junto con los otros dos problemas clásicos: la *duplicación del cubo* y *la trisección de cualquier ángulo*) no podía resolverse solamente con el uso de la regla y el compás. Aunque ningún geómetra griego pudo *probar* esta afirmación, parece claro que pronto llegaron a la conclusión de que era necesario la utilización de curvas más generales o construcciones de carácter más mecánico. Probablemente alrededor del 420 a. de C., **Hipias de Elis** inventó la curva llamada *trisectriz* para resolver el problema de la trisección de un ángulo y, en la primera mitad del siglo IV a. de C., **Arquitas** utilizó la construcción de ciertas superficies de revolución para resolver el problema de la duplicación del cubo. Por la misma razón, el ya citado **Menecmo**, descubrió las *secciones cónicas*, para obtener una serie de curvas que permitieran la obtención de dos medias proporcionales.

Volviendo al problema que nos ocupa, tras el trabajo de **Arquímedes** el problema de la cuadratura del círculo se reducía a la construcción de un segmento de longitud la circunferencia de radio unidad (es decir, 2π). Desde un punto de vista ingenuo, la solución es sencilla: basta construir un disco de radio 1, pintar su borde y hacerlo rodar sobra una hoja de papel. ¡Cuando haya realizado una vuelta completa, aparecerá un trazo sobre el papel de longitud exactamente 2π! Obviamente, esta no es una solución "rigurosa" para un matemático griego.

La primera cuadratura efectiva del círculo la realizó **Dinostrato**, hermano de **Menecmo**, utilizando la curva *trisectriz* de **Hipias** (que a partir de entonces también se conoce como *cuadratriz*). Esta primera curva considerada por los griegos, aparte de la circunferencia o la recta, es una de las llamadas *curvas mecánicas*, pues su construcción se basa en un experimento mental que involucra un movimiento. La construcción es la siguiente (**Fig. 11**): Considérese un cuadrado

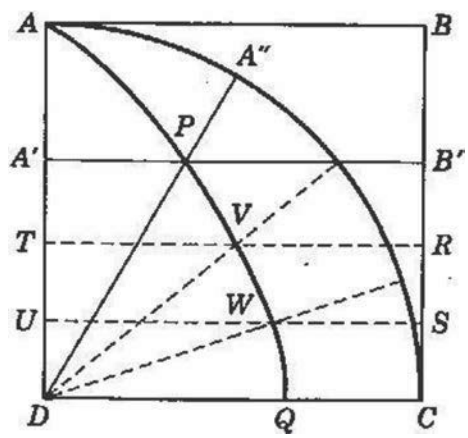


Figura 11

ABCD (véase figura) en el que el lado **AB** se traslada paralelamente a sí mismo y con velocidad uniforme desde su posición inicial a llegar a coincidir con **DC.** Durante el mismo intervalo de tiempo, el lado **DA** gira con velocidad uniforme en el sentido de las agujas del reloj, hasta coincidir también con **DC.** La cuadratriz es precisamente el lugar geométrico de los puntos **P** de intersección de los dos segmentos móviles en cada instante: $\mathbf{P}=\mathbf{A'B'}\cap\mathbf{DA''}$. Pues bien, utilizando sólamente consideraciones geométricas, **Dinostrato** probó que el lado *a* del cuadrado generatriz es media proporcional entre el segmento **DQ** y el arco de circunferencia ***AC***. Por tanto, $AC/AB=AB/DQ$ o, en notación moderna, $\mathbf{DQ}=2a/\pi$. Así pues, conocido el segmento ***DQ*** y ***AB***, mediante una sencilla construcción geométrica se puede construir un segmento del término que falta en la proporción geométrica, es decir, de longitud el arco de circunferencia, ***AC***.

Es claro que el punto más débil de la solución de **Hipias** está en la *construcción* de la propia cuadratriz[5]. Como dice **Papus**, citando a un crítico anterior, *¿Cómo es posible hacer que dos puntos que salgan a la vez de* **A** *se muevan uno sobre una recta hacia* **D** *y el otro a lo largo de una circunferencia hacia* **C** *al mismo tiempo, sin conocer primero la razón del segmento* **DA** *al cuadrante de circunferencia* **AA"C***?*...Más aún, además existe el problema de determinar el punto **Q**, ya que, por el método geométrico de construcción, en la posición final, el lado del cuadrado y el radio *coinciden* y, por tanto, no determinan un punto. La construcción de **Q** puede hacerse rigurosa por el método clásico de exhausción, pero ello equivale a aproximar la longitud de la circunferencia por la de polígonos inscritos de lados sucesivamente crecientes.

Quizá la curva "mecánica" más famosa es la estudiada por **Arquímedes**, motivado probablemente por sus estudios sobre la cuadratura del círculo en su tratado *Sobre las Espirales* ([11: pág 151]). Se trata de la conocida *Espiral de Arquímedes*: la curva descrita por un punto **M** que se mueve sobre una recta a velocidad uniforme, mientras la recta gira, también con velocidad uniforme.

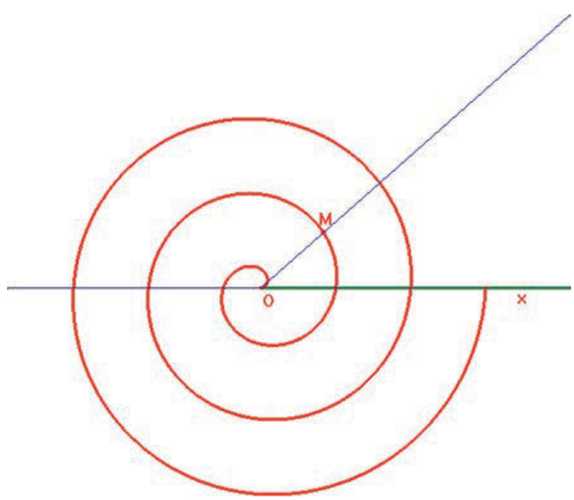


Figura 12

Esta curva permite resolver el problema de la trisección de un ángulo (como se deduce de la Proposición 14 de la obra citada) y también el de la rectificación de la circunferencia (lo que, como sabemos, implica la cuadratura del círculo), debido a una importante propiedad de la tangente a la espiral que demuestra **Arquímedes** en la Proposición 20: *La subtangente **OQ** en un punto **P** de la espiral* (es decir, la intersección de la tangente en **P** con la perpendicular al radio vector **OP** por **O**) *es igual a la longitud del arco **PS** de la circunferencia de centro **O** y radio **OP*** (véase la **figura 13**). En particular, si consideramos el

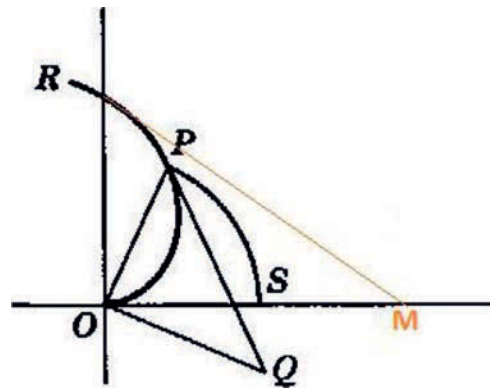


Figura 13

punto **R,** en donde la espiral corta al eje de ordenadas, la subtangente en **R** es el segmento **OM** en donde **M** es la intersección de la tangente con el eje de abscisas y, por lo dicho, la longitud de la circunferencia de radio **OR** es cuatro veces la longitud de ese segmento.

Las últimas 8 proposiciones de *Sobre las Espirales* están dedicadas al cálculo del área de distintas regiones delimitadas por la espiral. Como suele ser habitual, **Arquímedes** hace gala de una extraordinaria habilidad y rigor en sus demostraciones.

Las investigaciones de **Arquímedes** son ejemplos de originalidad y precisión y, a tenor de los medios de

[5] La *cuadratriz* no es construible con regla y compás, pero muchos de sus puntos sí lo son. Por su definición es fácil ver que $\mathbf{AA'} : \mathbf{AD} = \mathbf{AA''} : AC$. Por tanto si, por ejemplo construimos por sucesivas subdivisiones el puntos medio de **AD,** después los puntos medios de los dos segmentos obtenidos, etc., y dibujamos las bisectrices del ángulo recto, después la de los dos ángulos iguales obtenidos, etc. (operaciones realizables con regla y compás), podemos construir por intersección de las paralelas a **AB** por los puntos obtenidos sobre **AD** con los correspondientes radios que pasan por los puntos obtenidos sobre la circunferencia, los puntos sobre la cuadratriz, de ordenadas $m/2^n a$, $0 \le m \le 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, que forman un subconjunto denso.

que disponía (en particular, la falta de un sistema de numeración y una notación simbólica manejable), constituyen uno de los mayores ejemplos de creatividad e inspiración en la historia de la Matemática.

6. UNA BREVE HISTORIA DE π.

A partir de la obra de **Arquímedes**, muchas de las investigaciones sobre el problema de la cuadratura del círculo se centraron en obtener estimaciones más y más precisas de la constante crítica π. Como ya hemos dicho, los egipcios utilizaban la fórmula $\left(\frac{16}{9}r\right)^2$ para calcular el área de un círculo de radio *r*, lo que da un valor de $\pi = 3{,}16$. En el *Libro de Los Reyes* del Antiguo Testamento (ca. 550 a. de C.), se habla de un cierto recipiente de boca circular que tenía un diámetro de 10 codos y cuya circunferencia medía 30 codos, lo que da un valor de $\pi = 3$[6]. Este valor es el usado también por los antiguos chinos, hindúes y babilonios (aunque algunas interpretaciones de ciertas tablillas halladas en Susa asignan a π el valor de $3+1/8$).

La idea más utilizada para el cálculo aproximado de π hasta el siglo XVII es la misma que utilizó **Arquímedes:** aproximar el área del círculo por polígonos regulares inscritos de más y más lados y calcular la razón de su perímetro al diámetro. He aquí algunos hitos destacados:

-Alrededor del año 150 de nuestra era, el astrónomo **Claudio Ptolomeo**, en su obra fundamental conocida como *El Almagesto* generó una tabla de cuerdas subtendidas en un círculo dado por todos los ángulos desde medio grado a 180 grados, con intervalos de medio grado, que fue esencial para los cálculos astronómicos durante los siguientes 1500 años. A partir de la cuerda de un grado resulta que el perímetro del polígono regular de 360 lados inscritos en el círculo es 360 veces mayor, lo que permitió a **Ptolomeo** obtener una aproximación más precisa de π, a saber 3,1416.

-En las civilizaciones orientales también se utilizó el método geométrico para obtener aproximaciones de π, necesarias muchas veces por razones astronómicas. Así, el matemático chino **Liu Hui** (siglo III) probó que la razón del área del círculo al cuadrado de su radio coincide con la de la circunferencia a su diámetro y da para esta razón el valor de $157/50 = 3{,}14$. Dos siglos más tarde, el matemático y experto en calendarios **Tsu Chung Chi** obtuvo como valor de π la asombrosa aproximación de $355/113 = 3{,}141592920$, que no fue mejorada hasta pasados cerca de mil años. Por su parte, en la India el astrónomo **Aryabhata** (ca. 500) tomó como valor de π la fracción $62832/20000 = 3{,}1416$, mientras que su colega **Bramagupta** asignó (alrededor del 630) el valor de $\sqrt{10} = 3{,}1622$ a π.

-Por supuesto, también la matemática árabe, que incorporó la ciencia india y griega, se preocupó por el problema de la cuadratura. Uno de los más famosos matemáticos de esa cultura, **al-Jwarizmi** ($\sim$790-$\sim$850) en su conocidísima obra *Algebra* incluye una sección sobre medición, en donde se puede leer que *el hombre práctico toma* $3+1/7$ *el valor que, multiplicado por el diámetro, da lugar a la circunferencia*, aunque después dice que esta cifra *no es del todo exacta.* Por otro lado, *los geómetras toman* $\sqrt{10}$ *o, si son astrónomos, 62832/20000*, es decir, los valores asignados por los distintos autores anteriores que hemos citado. En los siglos posteriores, los matemáticos islámicos obtuvieron nuevas y mejores estimaciones de π, que sirvieron para mejorar las tablas de senos en las observaciones astronómicas. Entre todos ellos, debemos destacar el trabajo de **Al-Kashi**,(1380-1450) director del observatorio de Samarcanda y uno de los más hábiles calculistas de la historia. Armado con las ventajas del sistema de numeración posicional, calculó los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia de $3 \cdot 2^{28}$ lados, y obtuvo un valor de π con 9 cifras sexagesimales exactas, que después convirtió en fracciones decimales para obtener 14 cifras exactas de π en esta numeración, superando así el resultado de **Tsu Chung Chi**.

-La introducción del sistema de numeración posicional en Occidente, junto con el desarrollo de la escritura simbólica, permitió, utilizando los

[6] Nótese que la fórmula que hemos citado de los egipcios y la referencia en el Libro de los Reyes se refieren, a priori, a conceptos *diferentes*: en el primer caso se obtiene π como la relación del *área del círculo* al cuadrado de su radio, mientras que en el otro se trata de la relación de la *longitud de la circunferencia* a su diámetro. Como ya hemos dicho, probar la coincidencia de ambas constantes no es trivial.

mismos métodos que **Arquímedes**, obtener mejores aproximaciones de π. Así, **Fibonacci** en 1220 da el valor $\pi = 3{,}14181$, y **Vieta** en 1593 obtiene una fórmula general que relaciona el área de un 2*n*-ágono regular con la de un *n*-ágono, y obtiene un valor de π con 9 cifras decimales exactas al considerar un polígono de $6 \cdot 2^{16}$ lados. Entre esta fecha y mediados del siglo XVII son varios los matemáticos que obtienen más y mejores aproximaciones de π mediante la consideración de polígonos regulares de más y más lados y el uso de mejores técnicas de cálculo. He aquí algunos:

Adrianus Romanus (1593)	2^{30} lados	15 cifras correctas de π
Ludolph Van Ceulen (1596)	$60 \cdot 2^{33}$ lados	20 cifras correctas de π
Ludolph Van Ceulen (1615)	2^{62} lados	35 cifras correctas de π

-A mediados del siglo XVII comienzan a desarrollarse las nuevas técnicas del cálculo diferencial y el uso sistemático de desarrollo en series de potencias, lo que va a provocar un cambio de estrategia en la búsqueda de mejores estimaciones para π. Los primeros resultados concretos estaban basados en el desarrollo en serie de la función arco tangente[7], descubierto por **J. Gregory** (1638-1675) en 1668 (con algún error numérico) y redescubierto por **G. W. Leizniz** (1646-1716) en 1673:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad -1 \le x \le 1$$

Tomando *x=1,* resulta la famosa *serie de Leibniz:*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Esta serie converge muy lentamente, pero lo importante es el cambio de perspectiva: la determinación de π pasa de ser un problema *geométrico* a un problema *aritmético*. En todo caso, pronto se descubrieron técnicas para conseguir aproximaciones de π por series mucho más rápidamente convergentes. Así, **A. Sharp** obtuvo 71 cifras decimales correctas de π usando la serie del arco tangente con $x = \sqrt{1/3}$, mientras que **J. Machin** obtuvo 100 decimales exactos en 1706 aplicando la relación

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Variaciones de esta relación se usaron frecuentemente en los años sucesivos para obtener mejores aproximaciones. Citemos la gesta de **W. Shanks**, quien en 1873 y utilizando una variación de la fórmula de **Machin** obtuvo nada menos que ¡707 cifras decimales de π! Desgraciadamente, en 1946 **D. F. Ferguson** descubrió errores en los resultados de **Shanks** a partir del lugar 528, y un año más tarde dio un valor correcto hasta el decimal 710.

-A partir de 1949 se produce un nuevo cambio en la búsqueda de estas aproximaciones con la aparición del ordenador. En este año el computador ENIAC calculó 2037 cifras decimales exactas de π, iniciando una carrera frenética que todavía hoy continúa. El último dato de que dispongo es el record establecido el 17 de octubre de 2011 por el japonés **Shigeru Kondo** quien, tras 371 días de cómputo con un potente ordenador, ha obtenido más de 10^{13} cifras decimales exactas de π.

7. PERO ¿SE PUEDE CUADRAR UN CÍRCULO?

Junto a los enormes esfuerzos dedicados a obtener más y mejores aproximaciones de π (de los que hemos citado algunos en la sección anterior), motivados sobre todo al principio por necesidades astronómicas, también se produjeron numerosos intentos para resolver geométricamente el problema de la cuadratura del círculo con regla y compás. Podemos citar entre otros a **Ibn al-Haytham** (~965-1040), llamado también **Alhazen,** que estudió la cuadratura de lúnulas y prometió escribir un tratado para resolver el problema de la cuadratura del círculo (que nunca apareció). Poco después, en 1050, **Franco de Lièja** escribió un tratado *De quadratura circuli* al respecto. Más adelante, en 1450, **Nicolás de Cusa** trató de resolver el problema interpolando geométricamente polígonos inscritos y circunscritos a un círculo.

[7] En los años 1660 el joven **I.Newton** utilizó su *teorema binomial* y el *cálculo de fluxiones* para obtener 7 cifras decimales exactas de π con solamente nueve términos de un cierto desarrollo en serie. Pueden verse los detalles en [6; Cap. 7].

Nicolás de Cusa (1401-1464)

Leonardo da Vinci (1452-1519)

El mismo **Leonardo da Vinci** se sintió atraído por el problema y concibió varias "*cuadraturas mecánicas"* Como en otras facetas de su vida, también aquí su trabajo está envuelto en el misterio. En efecto, en el *Códice Atlántico*, folio 112 recto, en el margen de una página figuran tres líneas escritas verticalmente que podríamos traducir así: *La noche de San Andrés encontré el final de la cuadratura del círculo; terminaba la candela, la noche y el papel donde escribía cuando, la hora cumplida, llegué a la conclusión.* ¿tenemos aquí una nueva versión del "caso Fermat"?

También el astrónomo danés **Logomontanus** (1562-1647) pretendió haber conseguido la tan deseada cuadratura.

En fin, la lista de los que se aproximaron al problema sería interminable. Pero a partir del siglo XVIII la potencia de los métodos analíticos iba a dar un cambio radical al problema. En 1761 el matemático **J. H. Lambert** (1728-1777) probó que π es un número irracional, es decir, que no se puede escribir como cociente de dos números enteros. Recordemos que los números racionales, esto es, las fracciones, son precisamente aquellos que tienen un desarrollo decimal finito o bien periódico, es decir, que consiste en un conjunto de cifras finito que se repite indefinidamente, como $1/2 = 0{,}5$, $1/3 = 0{,}33333$ o $41/333 = 0{,}123123123\ldots$. El resultado de **Lambert** garantiza en particular que la búsqueda de más y más cifras decimales para π será siempre una tarea inacabada. En todo caso, este resultado no acabó con el problema de la cuadratura del círculo, ya que muchos números irracionales pueden construirse con regla y compás. Pero sirvió al menos para eliminar de un plumazo gran cantidad de soluciones enviadas por aficionados a las Academias. La popularidad del problema se hizo tan grande que, primero la *Académie des Sciences* de París (en 1775) y poco después la *Royal Society* de Londres emitieron sendos comunicados anunciando que no se considerarían en el futuro nuevas pruebas de la cuadratura del círculo.

La solución final al problema de la cuadratura del círculo con regla y compás se produjo en 1882 de la mano del matemático alemán **Ferdinand Lindemann**

F. Lindemann (1852-1939)

(1852-1939), quien probó que π no satisface ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros, del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Los números que tienen esta propiedad se llaman *números trascendentes*, en contraposición a los *números algebraicos*, que son los que satisfacen alguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. Por supuesto, todo número racional *p/q* es algebraico, ya que es solución de la ecuación $px-q=0$. Pero también el irracional $\sqrt{3}$ es algebraico, ya es satisface la ecuación $x^2-3=0$; También es algebraico el $\sqrt[3]{1+\sqrt{5}}$, por ejemplo, pues satisface la ecuación $x^6-2x^3-4=0$. Esta distinción entre números algebraicos y trascendentes la introdujo al gran **L. Euler** en 1744, aunque durante mucho tiempo no se pudo saber si existían o no los números trascendentes. En 1844 **J. Liouville** (1809-1882) mostró que cualquier número de la forma

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + ...$$

con los a_i enteros arbitrarios del 0 al 9, es trascendente[9].

Probar que un número determinado *es* trascendente, no es tarea fácil. **Ch. Hermite** (1822-1901) probó en 1873 que *e* (la base de los logaritmos neperianos) es trascendente y, en una carta a su amigo **C. W. Borchardt** escribió: *"no me atrevo a intentar probar la trascendencia de* π*..."* Pues bien, eso es lo que consiguió **Lindemann** en 1882, y precisamente utilizando una modificación del método de **Hermite.**

Pero ¿qué tiene que ver esto con la cuadratura del círculo? Veamos: partiendo de un segmento de longitud unidad, tratemos de ver qué tipo de propiedades algebraicas tienen los segmentos que se pueden construir a partir de él con regla y compás (es decir, los segmentos que llamaremos *construibles*). Los griegos ya sabían construir (con regla y compás), a partir de dos segmentos de longitudes *a* y *b* los de longitudes

$$a+b, \quad a-b, \quad a/b, \quad ab, \quad ra,$$

para cualquier número racional *r*, como puede verse en la **figura 14**:

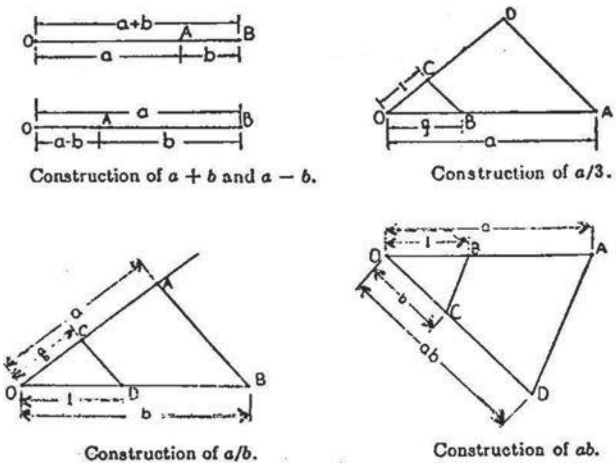


Figura 14

Por tanto, a partir del segmento unidad podemos construir con regla y compás cualquier segmento de longitud *racional.* De hecho, hemos visto que las longitudes de los segmentos construibles forman un subconjunto de los números reales cerrado respecto a las operaciones suma, producto y división (por un segmento no reducido a un punto), es decir, lo que se conoce como un *cuerpo de números.* Pero el uso del compás permite, además, la extracción de raíces cuadradas, como muestra una simple inspección a la siguiente figura:

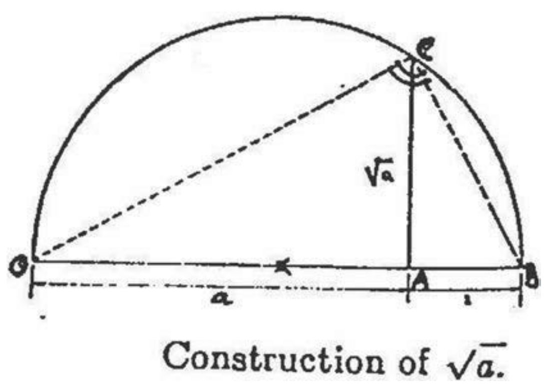


Figura 15

[9] En realidad hay muchos más números trascendentes que algebraicos. En efecto, como quiera que el conjunto de polinomios con coeficientes enteros forma un conjunto *numerable* y cada uno de los polinomios tiene un número finito de soluciones, resulta que el conjunto $\mathfrak{A}$ de todas estas soluciones (e.d., los números algebraicos) es también numerable. Como el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales no es numerable, resulta que el conjunto $\mathfrak{T} := \mathbb{R} \setminus \mathfrak{A}$ de todos los números trascendentes, es infinito no numerable.

Así pues, a partir del segmento unidad podemos construir todos los segmentos de longitudes racionales o, lo que es lo mismo, el cuerpo de los números racionales C_0. Pero si k es un número racional tal que $\sqrt{k}$ no lo sea, también podemos construir los (segmentos de longitud) números de $\mathbf{C_0}(k)=\{a+b\sqrt{k}$, con a y b en $\mathbf{C_0}\}$ (que, obviamente, contiene a $\mathbf{C_0}$); observemos además que $a+b\sqrt{k}$ es solución del polinomio de grado $(x-a)^2-b^2k=0$, con coeficientes en $\mathbf{C_0}$.

Y también si s es un número de $\mathbf{C_0}(k)$ cuya raíz no está en él, podemos construir los números de $\mathbf{C_0}(k)(s)=\{\alpha+\beta\sqrt{s}$ con α y β en $\mathbf{C_0}(k)\}$, etc. Como antes, cada elemento de $\mathbf{C_0}(k)(s)$ es solución de un polinomio de grado 2 con coeficientes en $\mathbf{C_0}(k)$ y puede probarse sin demasiado trabajo que entonces es solución de un polinomio de grado 4 con coeficientes en $\mathbf{C_0}$. Todos estos conjuntos de números son también *cuerpos*, como se comprueba fácilmente. Pues bien, *los números construibles son exactamente los que pertenecen a alguna extensión de la forma*

$C_0(k_1)(k_2)...(k_n)$, con k_j en $C_0(k_1)(k_2)...(k_{j-1})$ y $\sqrt{k_j}$ no perteneciente a

$$C_0(k_1)(k_2)...(k_{j-1})$$ [10]

Una consecuencia de este resultado (que ya hemos esbozado) es que cada número construible es solución de un polinomio de grado 2^n con coeficientes en $\mathbf{C_0}$ y por tanto (multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes), de otro con coeficientes enteros. Así pues, *todo número construible es un número algebraico.* La demostración de la trascendencia de π por **Lindemann** muestra pues, de manera irrefutable, que no se puede construir con regla y compás un segmento de longitud π y, por tanto, **¡la cuadratura del círculo con regla y compás es imposible!**

8. LA CUADRATURA DEL CÍRCULO POR LEY.

El resultado de **Lindemann** cerró definitivamente el problema de la cuadratura del círculo para los matemáticos. Pero el interés por el problema continuó. El que fue primer profesor de matemáticas del *University College London,* **A. De Morgan** (1806-1871) recopiló gran cantidad de anécdotas sobre este tema en su libro *A Budget of paradoxes*[11]. **De Morgan** sugirió el término *morbus cyclometricus* para designar la "enfermedad de los cuadradores de círculos", refiriéndose a aquellos aficionados convencidos de haber encontrado la solución y a los que no se les puede convencer de su error por parte de los matemáticos profesionales. Por ejemplo, **De Morgan** cita a un tal Mr. James Smith que escribió varios libros intentando probar que $\pi=25/8$ y, en particular, que el círculo es cuadrable con regla y compás. Por supuesto, ni **Morgan** ni ningún otro pudo convencerle de su error...

La miríada de aficionados afectados por el *morbus cyclometricus*, continúan hoy en día descubriendo nuevos (y falaces, por supuesto) métodos de cuadrar el círculo con regla y compás. La mayoría de ellos están convencidos de que son genios incomprendidos que la *"ciencia oficial"* no quiere reconocer. Por citar algunos casos curiosos, diremos que en 1892 un autor anónimo anunció en el *New York Tribune* el redescubrimiento de un secreto largamente guardado que daba como valor exacto de π el de 3,2. Y durante bastante tiempo hubo una viva polémica entre los lectores del periódico sobre el tema. En 1934 muchas bibliotecas públicas de los Estados Unidos recibieron, por indicación de su autor, un grueso volumen dedicado a demostrar que $\pi=3+13/81$, y así podríamos seguir con más y más ejemplos[12].

---

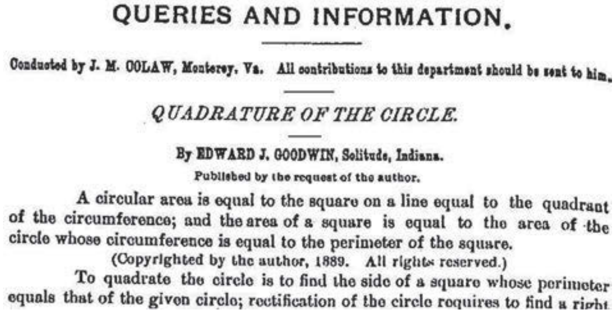
10 Este resultado fue probado por **P. L. Wantzel** en 1837. Pueden verse demostraciones en [7] y en [3].

11 El Volumen I puede descargarse o leerse on line en la dirección del *Proyecto Gutenberg:* http://www.gutenberg.org/ebooks/23100. El libro contiene no sólo paradojas matemáticas, sino también en otras áreas, junto con disgresiones sobre tópicos muy diversos.

12 Entre los numerosos personajes que aparecen en la obra *La Montaña Mágica*, su autor, el Premio Nobel de Literatura **Thomas Mann,** incluye a un afectado del *morbus cyclometricus* (además de tuberculosis, claro): el procurador **Paravant**, atormentado por *"la vergüenza que constituía para el espíritu humano la irracionalidad irremediable de esa proporción mística...* (se refiere, por supuesto, a π) ([14: pág. 782]). Por cierto, el autor descubre en la obra una nueva aplicación de las mátemáticas: sus "*efectos calmantes que contribuyen a embotar el aguijón de la carne..."* ([14; pág. 781]).

Pero entre este enjambre de "cuadradores de círculos", merece destacarse al médico y matemático aficionado **Edwin L. Goodwin** (∼1825, 1902) que, creyendo haber descubierto un método para cuadrar el círculo, convenció a su representante local, **Taylor I. Record**, para proponer a la Cámara de Representantes del estado de Indiana (U.S.A.) la aprobación de una ley para "*introducir una nueva verdad matemática y que se ofrece como contribución a la educación, para que pueda usarse solamente en el Estado de Indiana libre de costes...*"[13] (se supone que en otros lugares los usuarios del valor de π fijado o de los métodos de cuadrar el círculo aprobados, deberían pagar las correspondientes *royalties*). Se trata de una serie de despropósitos, basados en un artículo del Sr. **Goodwin** aparecido en el *American Mathematical Monthly* de 1894 (el año de aparición de la Revista, por entonces de naturaleza privada), en la sección de "Queries and Information" y publicado "by request of the autor", es decir, bajo su propia responsabilidad y a falta de otra cosa mejor.

El Proyecto de Ley pasó primero a la Comisión de Canales, luego a la de Pantanos para volver a la Comisión de Educación, que dio un informe favorable. El Proyecto pasó al Senado, donde fue objeto de discusión. Al parecer, ninguno de los intervinientes se preocupó de buscar asesoramiento adecuado, aunque todos reconocieron que no eran competentes para entender los méritos de la proposición de ley. Finalmente, ésta fue rechazada porque, simplemente, la Cámara Legislativa no tenía competencias para "definir verdades matemáticas".


QUERIES AND INFORMATION.

Conducted by J. M. COLAW, Monterey, Va. All contributions to this department should be sent to him.

QUADRATURE OF THE CIRCLE.

By EDWARD J. GOODWIN, Solitude, Indiana.

Published by the request of the author.

A circular area is equal to the square on a line equal to the quadrant of the circumference; and the area of a square is equal to the area of the circle whose circumference is equal to the perimeter of the square.

(Copyrighted by the author, 1889. All rights reserved.)

To quadrate the circle is to find the side of a square whose perimeter equals that of the given circle; rectification of the circle requires to find a right

Figura 16

Como hemos dicho antes, el artículo en el que se basaba la Proposición de Ley es una sucesiva acumulación de errores. De entrada, el autor no entiende el problema de la cuadratura del círculo *con regla y compás*. Obvia sistemáticamente esta última condición en sus argumentos y parece creer que el problema consiste en que el resultado de **Arquímedes** da resultados numéricos erróneos, y por tanto hay que remplazarlo por una fórmula correcta. Y sin más, pasa a proponer sus propios métodos para cuadra el círculo. La redacción es confusa y muchas veces contradictoria. En algunos momentos, el autor parece creer que figuras con el mismo perímetro deben tener la misma área. En todo caso, no hay un solo argumento matemático en el artículo, sino una serie de afirmaciones que a veces son contradictorias entre sí. En efecto, el análisis detallado del artículo que ha realizado **D. Singmaster** en su trabajo ya citado, revela que las distintas recetas de **Goodwin** para cuadrar el círculo conducen a dar 9 valores diferentes de π, a saber: 4 (varias veces), 3,55556, 3,333333, 3,265986, 3,265306, 3,232488, 3,2, 3,160494 y 2,56 (pueden verse los detalles en [1; págs. 237-238]). Por cierto, el Sr. **Goodwin** no se paró aquí y también "resolvió" los otros dos problemas clásicos de la antigüedad: la trisección de cualquier ángulo y la duplicación del cubo. Patentó sus resultados en U.S.A., Inglaterra, Alemania, Bélgica, Francia, Austria y... España! Y los incluyó en una monografía titulada *"La Desigualdad Universal es la Ley de toda la Creación"* que incluye la siguiente frase: *"Durante la primera semana de marzo de 1888 al autor se le reveló de forma sobrenatural la medida exacta del círculo..."* En fin, citando una vez más a **D. Singmaster**, "la ignorancia es consistentemente inconsistente."

9. POR FÍN PUEDE CUADRARSE EL CÍRCULO.

La historia de la cuadratura del círculo no terminó aquí. En 1923 el matemático polaco **S. Banach** (1892-1945) resolvió un problema largamente planteado mostrando que se podía definir un "área" para cualquier subconjunto del plano, con las propiedades habituales (aditividad finita e invariancia por movimientos

---

13 El texto completo de la Proposición de Ley, la "House Bill No. 246" de la Legislatura del estado de Indicana de 1897, puede leerse en el artículo *The legal values of Pi*, por **D. Singmaster**, que aparece en la pág. 236 de [1].

del plano), que extendía el área usual de los subconjuntos cuya área se sabía calcular hasta entonces (los llamados *conjuntos medibles Lebesgue*)[14]. Como consecuencia, si una figura **P** se puede trocear en un número finito de piezas para que, recomponiéndolas por movimientos del plano, se obtenga otra figura **Q**, ambas deben tener la misma "área". En 1925 **A. Tarski** (1902-1983) planteó el siguiente problema: ¿puede descomponerse un círculo en un número finito de partes de modo que, mediante movimientos del plano, se obtenga un cuadrado? (necesariamente de la misma área, según hemos dicho).

Una versión previa del problema de **Tarski** había sido planteada en 1833 por **Farkas Bolyai:** Dados dos polígonos simples de la misma área, ¿se puede descomponer uno de ellos en un número finito de piezas poligonales de modo que, recombinándolas, se obtenga el otro?:

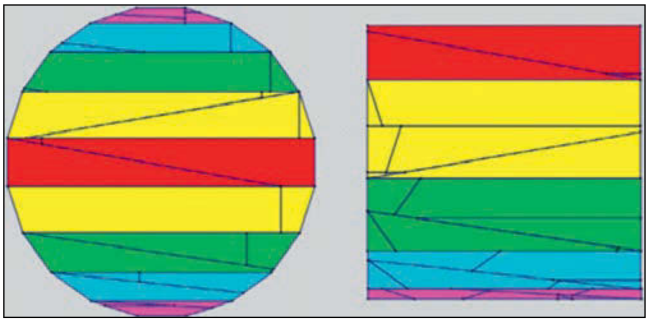


Figura 17

El mismo **Bolyai** dio una respuesta afirmativa a su pregunta en 1833. El resultado fue probado también, independientemente, por **P. Gerwien** en 1835.

Por el contrario, la respuesta al problema de **Tarski** es *negativa* si se imponen restricciones sobre la naturaleza de las piezas en la descomposición o sobre el tipo de movimientos usados. Por ejemplo, no puede cortarse un círculo en un número finito de piezas con unas tijeras y con ellas poder recomponer un cuadrado de la misma área[15]. La respuesta es también negativa si sólo se utilizan movimientos que generen un subgrupo discreto del total (*Cfr.* [9]). Finalmente, en 1989, **M. Laczkowich** [12] probó que la respuesta a la pregunta de **Tarski** es *afirmativa*, aunque en su demostración el número de piezas en las que hay que dividir el círculo es del orden de 10^{50}. La prueba es difícil y muy técnica, pero en el artículo [10] puede consultarse una amplia panorámica del problema y una idea de la solución sin incidir en demasiados tecnicismos.

BIBLIOGRAFÍA

1. L. Berggren, J. Borwein, y P. Borwein, (editors), *Pi: a source book. Springer, 1997.*
2. C. Boyer, *Historia de la Matemática.* Alianza editorial, 1986.
3. J. C. Carrega, *Théorie des corps. La regle et le compas.*Hermann, París, 1981.
4. R. Courant, y H. Robbins, *What is Mathematics?* Oxford Univ. Press, 1969.
5. L. Dubins, M. Hirsh, J. Karush**,** *Scissors congruence.* Israel J. Math. **1** (1963), 239-247.
6. W. Dunham, *Journey through Genius: The great theorems of Mathematics.*J. Wiley & Sons, New York, 1990.
7. P. Eymard, y J.-P. Lafon, *The number pi.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 2004.
8. L. Euler, *Introducción al análisis de los infinitos*. Edición a cargo de A. J. Durán y F. J. Pérez. SAEM "Thales" y Real Sociedad Matemática Española. Sevilla, 2000.
9. R. J. Gardner**:** *Convex bodies equidescomposable by locally discrete groups of isometries,* Mathematika, **32** (1985), 1-9.
10. R. J. Gardner, y S. Wagon, *At long last, the Circle has been squared.* Notices of the Amer. Math. Soc., **36** (1989), 1338-1343.

[14] El que todo subconjunto del plano tenga un "área" razonable es un hecho ampliamente aceptado por los matemáticos de todos los tiempos. Sorprendentemente, el resultado no es cierto para el espacio de dimensión $n>2$, como probaron **Banach** y **A. Tarski** un año después. Por ejemplo, en el espacio euclídeo ordinario tridimensional, la esfera sólida de radio 1 se puede dividir en 9 partes que, reco mponiéndolas adecuadamente como si de un *puzzle* se tratara (sólo con movimientos del espacio, sin deformaciones), permiten construir *dos* esferas sólidas de radio 1. Esto implica que no existe un "volumen" que extienda el ordinario y se pueda definir para todos los subconjuntos del espacio con las propiedades de aditividad finita e invariancia por movimientos, ya que entonces el "volumen" de la unión de las 9 piezas debería ser, por un lado, el de la esfera sólida de radio 1, y por otro, el doble. Para más información al respecto, remitimos al lector interesado a [14].

[15] Técnicamente, si las piezas utilizadas en la descomposición están limitadas por curvas de Jordan, no puede "cuadrarse" el círculo con ellas. Véase [5].

11. T. L. Heath, *The works of Archimedes.* Cambridge University Press. 1912.

12. M. Laczkovich**,** *Equidescomposability and discrepancy: a solution of Tarski's circle squarinq problema.* J. Reigne Agew. Math. **404** (1990), 77-117.

13. S. G. Langton, *The quadrature of lunes, from Hippocrates to Euler*. En "Euler at 300, an appreciation", R. E. Bradley *et alt.*, Editores, pags- 56-62. Volumen de la serie "T*he MAA Tercentenary Euler Celebration".* 2007.

14. S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox.*Cambridge University Press, 1985.