Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 106, Nº. 1-2, pp 97-114, 2013
XV Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

LA IMPORTANCIA DE LAS MATEMÁTICAS PARA LA BIOLOGÍA Y LA AGRICULTURA

DARÍO MARAVALL CASESNOVES *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid.

El objeto de esta conferencia es ofrecer un ejemplo concreto y claro de la profundidad con que la Matemática superior ha penetrado en la Biología, una ciencia, y en la Agricultura, una técnica, campo de aplicación que le había estado cerrado hasta hace poco tiempo. Esta penetración ha tenido y tiene que vencer grandes obstáculos, debidos por una parte al recelo que sienten los científicos no matemáticos hacia las Matemáticas y por otra a la gran dificultad de las teorías y métodos matemáticos de aplicación en la Biología y en la Agricultura, que hace que sea muy pequeño el número de especialistas que pueden trabajar en esta materia.

A fines de 1963 la O.C.D. organizó un seminario internacional de Matemáticas aplicadas para ingenieros, con tal motivo en los distintos países de la O.C.D. se formaron Comisiones Nacionales de Matemáticas aplicadas, estando la española constituida por nueve Profesores, entre ellos yo. Se celebró en París.

Las distintas comisiones Nacionales prepararon informes sobre múltiples aspectos de la formación matemática de los ingenieros, que iban desde una renovación de la enseñanza en el Bachillerato, hasta cursos de alta especialización para postgraduados, informes que seguían unas directrices generales. A cada Nación se le encomendó un informe monográfico sobre un aspecto del informe general, correspondiendo a España el concerniente al Cálculo de Probabilidades y la Estadística Matemática. La Comisión Española encomendó a los Profesores Sixto Ríos y Darío Maravall la redacción de dicho informe monográfico específico, el cual se subdividió en dos partes distintas, a cargo cada una de los dos Profesores antecitados.

El informe mío se refería a la formación matemática de los que pudiéramos llamar ingenieros agrobiólogos (ingenieros agrónomos y de montes) y fue concebido por mí para países superdesarrollados, pero que también puede interesar en parte, reducido y limitado, a otros países. En enero de 1965 se celebró en París el antecitado seminario, en el que yo tuve la ocasión de exponer verbalmente mis ideas sobre la reforma de los fundamentos axiomáticos del Cálculo de Probabilidades y su impacto sobre la enseñanza de la Estadística, basado en mis propias investigaciones, señalando por primera vez que una distribución estocástica no queda siempre definida por una transformada de Fourier (por ejemplo la $\delta_+(x)$). La Asamblea plenaria acordó la publicación en inglés y francés de mi informe.

Han pasado muchos años desde entonces, en los que he tratado con profundidad la materia a la que se refiere el título de esta conferencia no sólo como matemático e ingeniero agrónomo sino también como agricultor valenciamo.

La agricultura junto a la ganadería, la industria y el comercio contribuyen al aumento de la prosperidad y el bienestar del hombre, pero a veces han aparecido, debido a nuevas plagas o enfermedades, que rompen el equilibrio biológico y desaparecen ciertos frutales o cultivos. De esto conozco dos casos, uno antes que naciera yo y el otro mucho tiempo después. El primero es el caso de la filoxera que obligó a arrancar las viñas europeas y plantar viñas americanas. La otra ha sido la aparición de la tristeza de los agrios, que produjo la desaparición de huertos enteros de naranjos, fue una verdadera catástrofe, curiosamente afectó sólo a los naranjos injertados sobre pies de naranjos amargos, que eran la mayoría y los más productivos, sobrevivieron los naranjos plantados sobre pies de naranjos dulces.

El equilibrio biológico en la agricultura está muy extendido, pero a veces (pocas) se rompe lo que tiene efectos muy graves. Actualmente se cierne un peligro en las palmeras, debido a la entrada en España de un escarabajo que las ataca, que no existía en España y que está llegando a ella debido a la introducción de dicho escarabajo al importar palmeras del extranjero.

La pérdida de Cuba, Puerto Rico y las Filipinas produjo mucho daño sobre todo en la producción de azúcar y de tabaco. Cuba es un gran productor de azúcar de caña, en España el azúcar de caña apenas sí se produce, solamente en la Península en una pequeña parte de Granada, donde se aplica preferentemente en la fabricación de ron. Fue necesario resolver este grave problema, lo que consiguieron los ingenieros agrónomos de la época sustituyendo el azúcar de caña por el de la remolacha y construyendo fábricas de azúcar. La remolacha tiene la gran ventaja de que se puede cultivar sobre la misma tierra una y otras veces, no tiene la necesidad de recurrir al barbecho.

En cuanto al tabaco y la fabricación de cigarrillos y sobre todo de puros, se puede afirmar que los de Cuba han sido desde tiempo inmemorial los mejores del mundo sin ninguna duda. Hay países extranjeros que a sus puros le ponen nombres españoles cuando los hacen de buena calidad. Muy muy al norte en los Estados Unidos hay una zona muy pequeña en que se cultiva un tabaco de altísima calidad que es mezclado con la envoltura de tabaco cubano. Es curioso que muchas veces ciertos cultivos, los cuales tienen una zona limitada, fuera de la cual no se consigue cultivarlos, es precisamente en el límite que separa la posible de la imposible obtención de la planta en cuestión, donde se obtiene la de mejor calidad. Para resolver el importante problema del tabaco se fundó la Tabacalera en la que desempeñaron un importante papel los ingenieros agrónomos. Uno de los primeros problemas que se les presentó es conseguir que el tabaco no se apagase cuando se fuma, pero esto se consiguió. El cultivo del tabaco siempre ha estado muy vigilado, para evitar que una parte del mismo no fuese entregado a la Tabacalera y para ello se creó el cuerpo de Carabineros. Siempre o al menos en muchas ocasiones, se hizo la vista gorda con los agricultores que cultivaban tabaco y se les permitió que conservaran cantidades pequeñas de su propio tabaco para hacerse unos cuantos puros o cigarrillos, pero siempre poquísimos. Sé de algunos agricultores que para asegurar que el tabaco no se apague para ello empleaban nitrato en muy pequeña cantidad.

En el siglo XVII, casi al final, un barco español llevó semilla de tabaco de Cuba a Filipinas y, a partir de entonces, también Filipinas fue productora de tabaco. El barco desembarcó en la isla de La Isabela.

En el cultivo del tabaco yo nunca he intervenido pero sí hay otros dos servicios del Ministerio de Agricultura en el que sí he intervenido, son el de la lucha contra las plagas del campo y el fraude. La lucha contra las plagas del campo se ha llevado muy bien. También ha sido importante la labor realizada por ingenieros agrónomos para evitar que entren en España plagas a través de la frontera francesa o también de los Puertos. Hasta la guerra civil este último servicio funcionó muy bien. Voy a contarles un caso muy curioso que me contó un ingeniero agrónomo mucho mayor que yo, que ha fallecido y de cuyo nombre no me acuerdo, le llamaremos el Sr. X. En cierta ocasión poco antes del año 36 una importantísima partida de naranjas iba a pasar la frontera francesa, pero los ingenieros agrónomos franceses no lo permitieron porque según decían aquellas naranjas llevaban el piojo de San José. Discutieron muchísimo los españoles y los franceses pero las naranjas no podían pasar la frontera. Entonces un ingeniero agrónomo español se lo contó a su amigo y compañero el Sr. X. y éste fue el que resolvió el problema, porque él había ampliado estudios en Francia y allí había tenido como profesor a un sabio francés que le llamaremos el S. Z., este gran sabio era una persona muy simpática y les decía entre otras muchas cosas "Muchachos nunca veréis al piojo de San José en un agrio". Entonces les dijeron a los ingenieros agrónomos franceses preguntad a vuestro Profesor el S. Z. si pueden haber piojos de San José en naranjas, éstos se lo preguntaron y pasaron enseguida las naranjas españolas.

En el año 1932 sucedió un hecho que revolucionó a Valencia, lo sé porque lo viví y creo que también pasaría en gran parte de España y Francia. Roosevelt se presentaba a Presidente de los Estados Unidos dispuesto a suprimir la ley seca, en Valencia presencié cómo los valencianos deseaban el triunfo de Roosevelt y cómo se alegraron los agricultores de su elección.

En mi opinión y en la de otros muchos creo que Valencia podía dar clases de agricultura a California y a Florida, al norte africano de Francia, a Italia, a Palestina y al África del Sur. Me refiero al naranjo. En este último país hay una marca de naranjas que lleva impresa “span” muy parecido a “Spain”.

La langosta como plaga había desaparecido de España pero después de nuestra guerra civil entró con enorme intensidad en el sur de Salamanca, Extremadura, parte de Toledo, Ciudad Real y parte de Jaén. Duró mucho y prácticamente desapareció en los primeros años cincuenta. En ella participé como ingeniero agrónomo. La lucha contra la langosta tenía dos fases, la primera era destruir los nidos de langostas que estaban en tierras no cultivadas y la segunda en matar las langostas, que se hacía echándoles un alimento que contenía un salvado envenenado llamado de hoja distinto del salvado que se produce en las fábricas de harina, pero por orden expresa del Gobierno. Costó mucho tiempo y trabajo acabar con la langosta pero acabamos con ella.

Otra plaga importante con la que luchamos durante años hasta conseguirla hacer desaparecer fue el escarabajo de la patata (leptinotarse decemlineata). Esta plaga vino como consecuencia del abandono fitosanitario de nuestra guerra civil.

En el caso de los agrios la lucha contra las plagas se realizó muy bien, unas veces como en el caso del criptolemus se hizo trayendo de Australia otro insecto el novius cardinalis que se alimentaba del otro. También se llevó muy bien por personal muy experimentado utilizando el cianídrico que es un gas muy venenoso y por tanto difícil de manejar.

También se empleó en la viña el sulfato de cobre contra el mildiu y el azufre contra el oidio. El sulfato de cobre son unos cristales azules muy bonitos y muy venenosos, parecen caramelos por lo que como se guardaba en las casas de los labradores había que tenerlos muy escondidos para evitar que cayeran en manos de niños pequeños.

Desde casi principios del siglo XX hubo muchos intentos de introducir el cultivo del algodón pero todos fracasaron, pero al terminar la guerra civil al poco tiempo logró cultivarse en grande el algodón, creando varias empresas algodoneras.

El aceite de oliva español era de alta calidad y estaba muy protegido, se intentó en los años treinta que se permitiera el empleo del aceite de cacahuete y con este motivo aparecieron en los mejores ultramarinos escaparates fuentes de aceite de cachuete para que el público viese lo bonito que era. No se consiguió el permiso para su producción. Sin embargo en los años cuarenta sí se consiguió el permiso para el aceite de girasol y el de soja.

En los años cuarenta comienza una nueva manera de enfocar la agricultura, comienza la mecanización con el empleo de tractores y máquinas. En el año 1947 en Tortosa se usa por primera vez una gran máquina para la recogida del arroz, poco antes se empleaba ya la maquinaria para el trigo. También comienza en los años cincuenta el riego por aspersión. Desempeñó un papel muy importante en estos progresos de la agricultura española aparte de la iniciativa privada, la actuación del Inia (instituto nacional de investigaciones agronómicas), el cual tenía su residencia en Madrid, pero que tenía también muchos centros repartidos por toda España. A él se deben muchos adelantos llevados a cabo en muchas partes de nuestra nación.

Para concluir esta primera parte de la conferencia, voy a relatar lo que a mí me sucedió. A una y otra parte de la carretera de Madrid a Barcelona, hay una finca llamada el Encín, muy próxima a Alcalá de Henares y pasada esta ciudad. El Encín es uno de los centros más importantes del INIA, allí se investiga sobre casi todo lo que pertenece a la agricultura y la ganadería. Por allí pasaba bajo tierra el oleoducto que iba de Rota a Zaragoza. Yo estaba destinado con otros compañeros a la investigación y estudio de Hidráulica Agrícola. Se instaló allí una estación de lisímetros; un lisímetro es como una maceta inmensa muy pesada que hay que manejar con una grúa y en la que se cultivan cereales, legumbres, patatas, melones, etc. e incluso malas hierbas para estudiar sus propiedades. Me encargaron de esta parte. El resultado de estas investigaciones se puede resumir en lo siguiente válido para todas las plantas ensayadas incluso las malas hierbas. En resumen lo que creo que se pueda afirmar tanto para el agua como para el abono nitrogenado es lo siguiente "siempre que esté asegurado el drenaje y no exista encharcamiento la producción de al menos muchas plantas crece cuanto mayor es la cantidad de abono recibido, excepto ya para cantidades excesivamente grandes".

Paso a continuación a la parte matemática y física de mi conferencia.

Decía Volterra que las relaciones entre la Física y las Matemáticas son muy antiguas, tan antiguas como ellas mismas, pero de la Biología y de las Matemáticas no podemos decir lo mismo, sino más bien todo lo contrario, o sea que las relaciones entre las dos ciencias son muy modernas, tan modernas que son casi de un siglo, aunque hay precedente desde hace siglos.

No obstante algunas partes de la Biología, que han sido objeto de la invasión matemática, se han vuelto tan matemáticas como puedan serlo la Mecánica o la Física Teórica. Me refiero fundamentalmente a la Biocinética, la Biofísica y la genética de poblaciones.

Sobre dos grandes categorías de problemas biológicos tienen aplicación las Matemáticas, unos son los relativos al funcionamiento de los seres vivos, los otros los relativos al comportamiento de los seres vivos. Es preferentemente en la segunda categoría donde encuentran aplicación los métodos propios de la Estadística y del Cálculo de Probabilidades.

Una de las partes de la Estadística que más aplicación encuentra es la que se refiere a la planificación e interpretación de las experiencias. Hasta tal punto ha llegado a ser imprescindible el método estadístico, que éste no solamente se requiere en las pruebas decisorias de la veracidad o verosimilitud de una teoría biológica, sino que también para que los resultados de una experiencia determinada alcancen la categoría de ser discutidos es preciso que estén realizados sobre una base estadística.

A la iniciación del método estadístico en Biología están unidos los nombres de Quetelet, Galton y Pearson. Pero se debe indudablemente a Fisher, al condensar y poner al alcance del no especialista, la manera de operar y el que el método estadístico se extiende de una manera homogénea hasta los más apartados laboratorios agronómicos.

Existe hoy una rama de la Estadística cuyo objeto es la disposición racional en el terreno de las parcelas en las que va a tener lugar las experiencias, que utilizan los más complejos y potentes recursos del Álgebra moderna, hasta el punto de que algunos investigadores (Dugué) no han dudado en darle el nombre de Álgebra aleatoria. En este campo se han destacado los nombres de Fisher, Yales, Stevens, Borel, Wishart, Bliss, Yule, Dugué, etc.

Se ha repetido muchas veces el ejemplo de las investigaciones de los griegos sobre las cónicas, que permanecieron durante mucho tiempo como algo especulativo sin aplicación práctica, hasta que el descubrimiento por Newton de la ley de la gravitación universal, las llenaron de sentido práctico. Se ha repetido, digo, como prueba de la conveniencia de los estudios y de las investigaciones teóricas, en un mundo que tiende cada vez a querer ser más práctico. Pues bien hay aquí en la Estadística biológica otro de estos ejemplos, que es el de los cuadrados latinos, estudiados por Euler como un entretenimiento matemático, y que hoy es en la experimentación agrícola, en los ensayos de eliminar las diferencias sistemáticas de fertilidad entre las diferentes parcelas, son objeto del más cuidadoso estudio, y cada vez han ido ampliando más estas investigaciones (cuadrados grecolatinos) hacia los cuerpos de Galois.

La introducción de los cuerpos de Galois en Estadística agronómica obedece al hecho de que la experimentación agrícola encuentra muchos obstáculos, tal como el enorme número de factores que intervienen en la misma; las serias limitaciones de los costes económicos demasiado elevados y el excesivo tiempo requerido para poder sacar conclusiones prácticas. Por ello siempre son de interés todas las técnicas estadísticas que ahorren tiempo y dinero; tal es el caso por el que se han introducido los antecitados cuerpos de Galois y también las geometrías proyectivas y euclídeas finitas en el análisis de la varianza de los bloques incompletos equilibrados, modelos construidos a partir de un grupo de Abel, y en la confusión de interacciones. En esta materia hemos de destacar las aportaciones de Fisher, Schützenberger, Schzikhande, Finney, Rao, Cox, Cochran, Dugué, etc.

El análisis secuencial deWald, que tanto se ha aplicado en la Estadística industrial, a mi modo de ver no ha encontrado en la Estadística agronómica la misma acogida favorable y eso que cae dentro del programa de obtener los frutos de la investigación estadística con el mínimo gasto de experimentación. Creemos que en agricultura y en medicina se ha utilizado el análisis secuencial en el caso más sencillo de los tratamientos, pero no en el de experiencias factoriales. En este campo hay que destacar las aportaciones de Wald y Bernard, más bien dirigida hacia la estadística industrial, Bross (medicina estadística), Hermitage, Stein, Haldane, etc.

Es muy frecuente en agronomía que muchas experiencias haya que desecharlas por haber quedado incompletas, por causas muy diversas. En estos casos están indicados los métodos de correlación por rangos, a los que están unidos los nombres de Spearman, Kendall, Wallis, Hotelling.

También el Cálculo de Probabilidades superior ha clavado su garra en el cuerpo de la Biología, bajo la doble forma de los procesos estocásticos y de los juegos de estrategia. Los primeros son los que a mi modo de ver tienen un porvenir más halagüeño; encuentra su precedente en el problema de la extinción de un apellido de Galton.

Dentro de la Biología, es en la Genética, Demografía, y Epidemiología donde los procesos estocásticos encuentran mayor aplicación. Aparte del ya citado problema de Galton, el primer trabajo importante de procesos estocásticos biológicos es seguramente el contenido en la memoria de Feller “Los fundamentos de la teoría de Volterra de la lucha por la existencia” (publicado en 1939 en Acta Biotheoretica) en la que entre otros resultados se obtienen valores medios inferiores a los que se obtienen en la interpretación determinista mediante el análisis matemático clásico.

Ya iniciado el camino se han ido publicando importantes trabajos sobre esta materia. Rosenblat modificó el esquema de contagio de Polya-Eggenberg aplicándolo a la peste bubónica en el Perú. Borel asimiló el problema de la ruina de un jugador a la difusión de los cromosomas. Yo mismo he analizado la evolución de las frecuencias de los genes mendelianos en poblaciones en panmixia, sobre la teoría de las probabilidades en cadena. Wright ha establecido las ecuaciones diferenciales que rigen la distribución de los genes, etc.

En otro terreno Opatowski y Koyama han investigado los efectos nocivos debidos a la radiación utilizando los procesos estocásticos; Von Schielling los ha aplicado también a la ley de la sensación de Weber-Fechner. Yo mismo he establecido la ecuación diferencial estocástica de la demografía de la langosta, una de las peores plagas y he aplicado la geometría integral a la patología vegetal.

Kendall, Armitage, Kelly, Rhan, Lea, Coulson, Bayley, Kermak, Kendrick, Whittle, Wilson, Vorcertes, Bartlett y yo mismo hemos aplicado los procesos estocásticos a la demografía y a la epidemiología.

He investigado las propiedades de la adición de variables aleatorias en número aleatorio y su inversión, generalizando estas operaciones lo que me ha permitido desarrollar los modelos estocásticos de epidemias con un número inicial de enfermos aleatorio. He desarrollado un proceso estocástico bidimensional de nacimiento y muerte, que conduce en mi caso a una distribución de probabilidad, en la que la función característica no es igual a la unidad en el punto cero, cuyo significado es que existe una probabilidad no nula de que la variable aleatoria valga infinito y otra probabilidad (la complementaria a la unidad de la anterior) de que la variable aleatoria siga una función de frecuencia ordinaria, es decir con función característica igual a la unidad en el punto cero. He desarrollado las propiedades de la convergencia en probabilidad de estas distribuciones, que he denominado no normalizadas, que son distintas de las ordinarias. En otro proceso estocástico bidimensional mixto de creación y contagio he distinguido en el caso de una epidemia, la evolución del número de enfermos contagiados por otros enfermos, de la del número de enfermos que no han sido contagiados por otros.

Los juegos de estrategia también han sido aplicados a la biología, preferentemente por Rashewsky y sus colaboradores de Chicago, en lo que ellos han denominado comportamiento social de los animales.

Pearson aplicó las funciones de Bessel al problema de los vuelos al azar, que tiene interés en las emigraciones de insectos dañinos a la agricultura. He realizado investigaciones en las que he establecido las ecuaciones integrales que ligan entre si a las funciones características y de frecuencia de los vectores aleatorios isótropos y sus proyecciones sobre un subespacio (en particular un eje) en un espacio euclídeo de "n" dimensiones.

Para mis propias investigaciones véanse las notas finales.

La Matemática moderna ha modificado profundamente los puntos de vista y los métodos de casi toda la Matemática aplicada y a cada ley general de evolución de la ciencia no ha escapado ninguna disciplina, pero a mi modo de ver, esto tampoco quiere decir que los métodos clásicos y modernos deban de enfrentarse como antagónicos, sino que deben utilizarse en colaboración como complemento el uno del otro. Así como en la Biblia coexisten el Antiguo y el Nuevo Testamento, habiendo venido el nuevo a perfeccionar el antiguo, igualmente en la Matemática deben coexistir el espíritu clásico y el moderno, debiendo el último mejorar y perfeccionar al primero, pero no destruirlo.

Si bien es verdad que existen analogías y muy importantes, como veremos, entre las aplicaciones matemáticas de distintas ciencias, también existen notables diferencias, es curioso señalar por ejemplo que mientras las ecuaciones en diferencias finitas que tienen un vastísimo campo de aplicación en la Economía, por el contrario tienen poca aplicación en el campo de la Física. Bell en su Historia de las Matemáticas señala el gran retraso en que se encuentra la teoría de las ecuaciones en diferencias finitas respecto a la teoría de las ecuaciones diferenciales y opina que este retraso es seguramente debido a la menor aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas y por consiguiente al menor estímulo e incentivo a la investigación recibido por esta causa. De ser cierta la tesis de Bell, el progreso de la Economía Matemática iría de la mano del progreso futuro de la teoría de las ecuaciones en diferencias finitas.

Resulta difícil valorar la Investigación científica, medir la importancia de la contribución de las nuevas ideas y métodos al progreso de la Ciencia. Pero un índice de esta importancia viene dado por el número de campos donde encuentra aplicación esta nueva idea o método, y por lo alejados que están entre sí. Por no citar más que dos ejemplos del impacto que sobre la mente de los científicos y de los técnicos ha producido la introducción de una nueva teoría, vamos a señalarlos, el uno , algo antiguo, se refiere a la Herencia, el otro más moderno se refiere a las distribuciones.

El concepto de herencia, introducido por todo lo alto por Volterra en la ciencia, dota de memoria a la naturaleza, ésta se acuerda de lo que ha sido para tenerlo en cuenta en lo que ha de ser, por primera vez los científicos consideran que la historia de la materia influye en su evolución futura. La Herencia modifica las técnicas matemáticas a emplear en el planteamiento analítico, sustituyendo las ecuaciones diferenciales por ecuaciones integrales e incluso por ecuaciones integrodiferenciales. Pero la Herencia que en un principio se muestra tan fecunda en el campo de la Física y la Biología, no se limita solamente a estas ciencias sino también invade el campo de otras, entre ellas la Economía. Los efectos de retardo (lags) distribuidos en el tiempo, tan conocidos por los economistas, no son en definitiva más que fenómenos hereditarios, pero las estructuras matemáticas sugeridas por la Economía son tan grandes que aparecen así nuevos tipos de ecuaciones funcionales: cadenas recurrentes de ecuaciones integrales e integrodiferenciales, ecuaciones integrales en las que la función incógnita aparece bajo el signo de integral múltiple, por ser también múltiples los retardos.

Aparecen también ecuaciones que he llamado sumatorias, que están con las ecuaciones en diferencias finitas en la misma relación que las ecuaciones integrales con las ecuaciones diferenciales, e incluso así como existen ecuaciones integrodiferenciales también se puede imaginar ecuaciones formadas por la suma de ecuaciones en diferencias finitas y ecuaciones sumatorias. Más adelante volveré sobre este tema.

Analizar la revolución que en la Matemática moderna supone la aparición de las Distribuciones y supondrá en lo sucesivo, es tarea muy superior a mis fuerzas. Han de ser pocas, o quizás ninguna las disciplinas científicas y teóricas, cuya infraestructura no sea sacudida por la presencia de las Distribuciones. Con ellas se vislumbra la posibilidad de fusión del continuo y el discontinuo de construir teorías unitarias que engloban en su seno la explicación de fenómenos de variación discreta y continua y así como es corriente en la Física y en la Técnica pasar de lo discontinuo a lo continuo, mediante un proceso de límite, me parece que también se puede pensar en lo contrario, de pasar de lo continuo a lo discontinuo, mediante otro proceso de límite, adoptando una Topología más generalizada. Quizás se puede pensar en enunciar un principio de Física que afirme que "todo estado discontinuo en la naturaleza es el límite generalizado de estados continuos" lo que explicaría de una manera muy lógica las discontinuidades que se presentan en algunas variables físicas, tales como el campo eléctrico sobre la superficie de un conductor eléctrico.

Pertenece al campo intermedio de la Biología y de la Física, la Biofísica, a la que pertenece la Teoría de las sensaciones. En anteriores conferencias he propuesto llamar Noofísica a la que podríamos llamar Teoría de las emociones. Este nombre lo he tomado de la filosofía de Teilhard que en sus investigaciones sobre filosofía biológica introdujo los conceptos de noosfera y noogénesis.

Al igual que existe una ley económica que dice que las primeras aplicaciones del capital al trabajo son enormemente productivas, existe una ley epistemológica según la cual las primeras aplicaciones de las matemáticas a otras ciencias son enormemente productivas.

Me parece que puede tener interés atraer la atención de ingenieros y científicos hacia nuevos campos de la metrología, que podemos calificar de casi inexplorados, a pesar de haberse obtenido ya algunos resultados importantes.

Es poco lo que se ha hecho en estos campos y mucho lo que queda por hacer. No se me escapan las grandes dificultades con que se han de tropezar, por la gran variabilidad y falta de homogeneidad del material con que se experimenta en estas partes de la Ciencia y quiero añadir antes de seguir adelante que estas líneas no persiguen más finalidad que señalar posibilidades de empleo del método matemático y de la medida en campos científicos que hasta hace poco no han sido muy propicios a su empleo, pero que en revancha se han dejado matematizar con velocidad de vértigo en los últimos tiempos. Ofreciéndonos un ejemplo de esa curiosa ley epistemológica que ya hemos expresado antes sobre las primeras aplicaciones de las matemáticas etc, etc.

Sobre dos grandes categorías de problemas biológicos tiene aplicación las matemáticas: unos son los relativos al funcionamiento de los seres vivos, las otras relativas al comportamiento de los seres vivos. Son fundamentalmente los primeros los que son objeto de la biofísica, cuya finalidad es la aplicación de los fenómenos biológicos mediante las leyes de la física, e incluso de la química, y el empleo del método matemático. Partes de la biofísica son por ejemplo la cinética de las enzimas, las teorías de la morfología y de la división celular, de los agregados de células, estructura y funcionamiento del sistema nervioso, etc.

Aunque la biofísica es parte de la física, tiene características diferenciales muy acusadas y propias de ella, por ejemplo los seres vivos siempre pueden asimilar dos formas de energía: la química y la de las radiaciones, a las que transforman mediante procesos siempre conocidos en otras formas de energías: calorífica, acústica, mecánica, etc. Es también muy característico de la materia viva su excitabilidad, que es causa de la importancia que en biofísica tienen los fenómenos de desencadenamiento, con la existencia de umbrales de cantidad, calidad y duración del estímulo, para que exista una respuesta por parte del ser vivo en forma de sensación (contracción muscular, secreción glandular, etc) y de umbrales diferenciales para que estímulos distintos produzcan sensaciones diferentes. La existencia de umbrales que también es muy corriente en economía (teoría de los ciclos) requiere para su interpretación matemática el empleo de estructuras adecuadas, distintas en gran parte de las utilizadas para el resto de la física.

Las distintas formas de energía (mecánica, térmica, óptica, acústica) a través de los diferentes sentidos (visión, tacto, audición) dan origen a sensaciones diversas (luz, color, figura, relieve, presión, calor, frío, sentido, armonía). No podemos dejar de señalar el hecho curioso de la aplicación que encuentra la geometría no euclídea de Lobatschewsky en la teoría de la división binocular.

Son ya clásicas las experiencias que se han realizado para determinar los umbrales de desplazamiento y velocidad en la percepción sensible de los movimientos por el ojo humano (Basler, Aubert, Bourdeaux), los umbrales de intensidad luminosa y de aparición y extinción de la percepción luminosa (Henry, Carpentier). Pero la retina humana no solamente distingue intensidades, sino también calidades (colores), lo que corresponde a un doble aspecto luminoso y cromático de la visión. En el aspecto cromático son muy interesantes las experiencias de Maxwell sobre la adición de los colores, siendo distinto el concepto físico de colores complementarios del concepto fisiológico, de modo que según Maxwell, en su célebre ecuación de los colores, los tres fundamentales son el rojo, verde y azul. La teoría sobre la visión de los colores (Young-Helmholtz, Hering) no son fáciles, porque es característico del ojo humano que no posee poder analítico para los colores, a diferencia de lo que sucede con el oído, que por el contario, si posee poder analítico, es decir que goza de la facultad de discriminar los tonos en la percepción del sonido. En cambio el ojo humano no puede distinguir los tonos simples en la percepción de los colores, por ejemplo no distingue el amarillo espectral de la adición del rojo y el verde. La sensibilidad de la retina es variable con el color de que se trate (fenómeno de Purkinje) de modo que las iluminaciones débiles son de tono azulado y las fuertes de tono rojizo. Íntimamente relacionado con ello está el fenómeno del espectro incolorado observado por Bertold y Hering, en virtud del cual en el espectro solar que para una intensidad suficiente tiene los brillantes colores de todos conocidos, para muy bajas intensidades desaparece la sensación cromática, mientras subsiste la luminosa, y para intensidades muy altas la sensación de color da paso al blanco.

También son muy numerosas las medidas realizadas para determinar los umbrales de máxima y mínima frecuencia de sonidos audibles con diversos instrumentos musicales (Sauveur, Biot, Helmholtz, Berold, Hegener, Sehulze, Schaefer, Struycken, etc) y sobre todo los umbrales de intensidad (lord Rayleigh, Wien) de período latente o tiempo perdido y persistencia del sonido, duración mínima (Savart, March, Heron y Yeb, Abraham y Bruhd, etc). También se ha experimentado sobre la audición ósea, en la que la percepción del sonido no se hace a través de las vibraciones que conduce el aire desde el cuerpo humano sonoro hasta la membrana del tímpano, sino a través de los huesos del cráneo, que normalmente no es tan buena, que ha sido comprobado mediante el experimento de Rinne, según el cual un diapasón sonoro aplicado a los dientes deja de ser perceptible, cuando aún lo es situado frente al oído. También la audición biauricular presenta fenómenos de umbrales y de sensaciones de dos sonidos diferentes provocados por un mismo sonido, cuando llega a ambos oídos con suficiente diferencia de tiempo. Es difícil dar una teoría satisfactoria de la audición y como consecuencia han sido propuestas varias (Helmholtz, Rutherford, Wallet Ewald); algo parecido puede decirse de la teoría de la fonación. Recientemente y a partir de la última gran guerra se ha progresado mucho en las investigaciones sobre el análisis espectral de la sensación auditiva y en sus aplicaciones, al estudio científico de los lenguajes, problemas que están bordeando las muy importantes de la teoría matemática de la comunicación.

Las sensaciones cutáneas, propias del sentido del tacto, se pueden clasificar en táctiles propiamente dichas (contacto y presión), térmicas (frío y calor) y espaciales o de posición. La sensación táctil solamente se percibe en ciertos puntos de la piel (Blix) distribuidos con densidad variable en las distintas regiones del cuerpo y también existen para los mismos umbrales y periodos latentes, umbrales diferenciales, sobre los cuales han sido realizadas medidas por Frey, Kiesow, Hamen, Lips, etc. El tacto posee una capacidad muy grande para distinguir las sensaciones producidas por un estímulo continuo, de las producidas por una serie de excitaciones sucesivas y posee también la propiedad de distinguir dos o más estímulos que simultáneamente percibe en puntos próximos de la piel, existiendo distancias mínimas para percibir su separación dependiente de la parte del cuerpo en que tiene lugar; y posee también el denominado signo local por Lotze, que es la facultad de localizar el punto de la piel sobre el que ha actuado un estímulo táctil. También posee la sensación de movimiento cuando la velocidad y el espacio recorrido superan ciertos valores, en el caso de una punta aplicada sobre la piel, sobre la que se mueve.

Blix comprobó que al igual que la sensación táctil es experimentada en ciertos puntos de la piel, sucede lo mismo con las de frío y de calor, distinguiendo entre puntos de frío y de calor, los cuales no están nunca superpuestos y son menos abundantes los primeros que los últimos.

Es curioso el fenómeno del "frío paradójico" que consiste en que al aplicar una superficie caliente sobre un punto de frío, se puede tener la sensación de frío. La presión y las excitaciones eléctricas y químicas pueden provocar también sensaciones térmicas.

También son importantes las sensaciones de dolor, que pueden ser provocados por excitaciones eléctricas o químicas, o por una excesiva intensidad de las sensaciones de presión, calor o frío, o también localizadas en los puntos de dolor sobre la piel. Schriever y Stinghold se han ocupado de la topografía de los puntos de tacto, dolor, calor y frío en la mucosa faríngea, que muestran la disociación entre las diferentes sensibilidades cutáneas. En las sensaciones de fuerza, movimiento y posición intervienen diversos sentidos (tacto y visión) juntamente con los músculos (experiencias de Frey), así como el laberinto del oído interno, que acusa los movimientos rotatorios de todo el cuerpo o la cabeza (March, Breuver).

Son muy conocidas las acciones biológicas de las radiaciones y entre ellas son notables las acciones fotoquímicas, debidas fundamentalmente a las radiaciones ultravioletas, que por esta razón reciben el nombre de reacciones actínicas gobernadas por la ley de Grotihus, en las que se basa la medida del poder actínico de la radiación (actinometría). También aquí existen períodos latentes o tiempos perdidos (Bunsen, Rosooe) que son la causa del fenómeno de la inducción fotoquímica, que consiste en que la luz al iniciar su acción, mantiene una débil acción fotoquímica, que lentamente va aumentando hasta alcanzar un valor constante. Las acciones biológicas de los rayos X muestran una selectividad muy marcada, como fue visto por Bergonie y Triboudeau, de modo que la acción de los rayos X se ejerce con mayor intensidad en las células, que tiene cariocinética, en las células cuyo porvenir cariocinético es más largo, y en las células cuyas estructuras y funciones están menos fijas. De esta naturaleza son los fenómenos del fototropismo que se manifiesta en las plantas en crecimiento y de la fototaxis propia de las células libres, bacterias, protozoos, etc, ambos fenómenos consisten en la tendencia a situarse en las regiones más o menos iluminadas, según sea positivo o negativo.

La corriente eléctrica alterna o continua, ejerce acciones sobre las células, los tejidos y los seres vivos, pero no parecen ejercerlas los campos electrostáticos. Todas las células presentan el fenómeno de la galvanotaxis, homólogo de la electroforesis, que consiste en que cuando se introducen dos electrodos con diferencias de potencial en una suspensión celular, las células se desplazan en el campo eléctrico. Es curioso señalar que las células son malos conductores externos a pesar de tener buena conductividad interna. Son notables las experiencias de Winslow, Bergouré, Pflüger, Weiss, etc. También para las acciones eléctricas existen umbrales, y las corrientes de alta frecuencia no producen sensaciones ni excitaciones motrices, pero atraviesan los tejidos que son buenos conductores, y como consecuencia del efecto Joule, provocan una elevación de la temperatura, que es la base de la diatermia utilizada en Medicina.

Naturalmente los métodos de medida de las sensaciones utilizan normalmente patrones estadísticos, rasgo que es muy característico de los mismos y los distingue de los métodos propios del resto de la física. Algunos autores llaman psicofísica a la parte de la biofísica que se ocupa de las sensaciones, pero como esta denominación no es general no la seguimos porque no nos parece apropiada, ni aún en el caso de referirse al nombre.

Los factores físicos del medio ambiente en el que se hallan los seres vivos, influyen sobre los mismos, ejerciendo acciones biológicas, siendo de estos factores los más importantes: la temperatura, la presión y el estado higrométrico de la atmósfera. La temperatura modifica los procesos energéticos, porque influye sobre las reacciones químicas a través de la regla de Van't Hoff. Por ejemplo las velocidades de evolución de las acciones diastásicas crecen con la temperatura, pero con la limitación debida a la termolabilidad de los fermentos existiendo tres temperaturas notables que marcan los límites mínimo, máximo y óptimo de la actividad. Mientras que los animales superiores poseen sistemas defensivos termorreguladores que les permiten mantener sensiblemente constantes las temperaturas de su cuerpo interior, y por tanto pueden soportar temperaturas muy alejadas de las correspondientes a su medio fisiológico, por el contrario, la amplitud de tolerancia para las presiones externas es mucho mayor en los microorganismos, y va disminuyendo a medida que los seres van elevándose en la escala zoológica.

Los fenómenos biofísicos de los que nos hemos ocupado hasta ahora consideran a los seres vivos como receptores de energías, pero estos son también transformadores de energía. La manifestación energética más evidente de los seres vivos es la producción de calor, sobre todo en los animales, la cual se conoce con el nombre de biotermogénesis. Es característico de los animales que consuman la energía de acuerdo con sus necesidades y no de acuerdo con la cantidad que se les proporciona; además la cantidad de calor proporcionada por un gramo de alimento es mayor cuando se quema en la bomba calorimétrica que cuando es utilizada por un animal. La calorimetría biológica es una técnica hoy día muy desarrollada.

Otra manifestación energética de los animales importante es la producción de trabajo mecánico por los músculos. Sobre esta materia son notables las investigaciones de Hülser, Rauber,Wertheim, Triepel. Es curioso señalar que normalmente un músculo excitado se contrae, pero en ocasiones (paradoja deWeber) puede suceder lo contrario. El músculo vivo es, en parte elástico, pero de recuperación lenta y con histéresis. Hill para explicar el comportamiento del músculo contraído o en reposo al ser estirado o acortado bruscamente define el músculo como un cuerpo elástico y viscoso a la vez. Conjuntamente a los fenómenos mecánicos ligados a la actividad muscular, existen otros térmicos, eléctricos, acústicos, etc; las manifestaciones térmicas se caracterizan por ser de magnitud muy pequeña y de duración muy corta, el músculo no puede ser considerado en modo alguno como un motor térmico. Las teorías de la contracción muscular no son del todo satisfactorias, porque como dice Hill “la relación entre energía calorífica y química es clara, pero no lo es la relación entre energía química y mecánica” (cita resumida).

Es curioso que el músculo trabaje en condiciones anaerobias, es decir, desarrolla energía a sus propias expensas, contrayendo una “deuda de oxígeno” que recupera posteriormente en el reposo con la aceleración de la respiración, lo cual permite realizar, durante breves periodos de tiempo trabajos muy superiores al consumo de oxígeno, esta “deuda de oxígeno” es muy alta en el caso de los atletas. Householder ha investigado algunos problemas matemáticos de la dinámica molecular, y como modelos matemáticos de la teoría de la excitación son muy conocidos los de Blair, Reshevsky y Hill.

Al igual que existe una biotermogénesis, existe también una “bioelectrogénesis”, de modo que tanto los animales y las plantas presentan diferencias de potencial eléctrico en distintos puntos de un mismo tejido o de tejidos diferentes. En esta materia son notables las investigaciones de Bernstein, Engelmann, Einthoven, Hermann. En los peces eléctricos adquieren gran importancia los fenómenos bioeléctricos como es sabido.

La bioluminiscencia, o producción de luz por los organismos, parece ser debida a un fenómeno de oxidación, porque no tiene lugar en condiciones anaerobias; en esta oxidación es indispensable el agua, porque cesa por desecación y se recupera por posterior hidratación. El análisis espectral de la luz emitida por los seres vivos, ha revelado un espectro continuo dentro de una zona limitada del espectro visible. Son importantes las investigaciones de Mac Faylen, Pierantoni, BÄuchner, Lude, Dubois, Harvey, Ives.

El metabolismo material constantemente provoca desequilibrios en la presión osmótica en los seres vivos, que son compensados por el proceso de regulación osmótica que poseen. En estos aspectos son interesantes las investigaciones de Vries, Hamburger, Viola, Höfler, Rywoch, Fano y Bottazzi. Mientras que unos animales tienen en sus líquidos internos presiones osmóticas que dependen en mayor o menor grado, de la concentración del medio en que viven, otros las tienen casi constantes, son los que poseen procesos osmorreguladores, tal es el caso de los animales de agua dulce. Y ya dentro del terreno de la fisicoquímica son interesantes los problemas que plantea el equilibrio plasma-glóbulos de la sangre, en el que dos soluciones electrolíticas están separadas por una membrana que es permeable para unos iones y no lo es para otros (Dounan). La desigual distribución de los iones difusibles, así como las variaciones que experimentan sus concentraciones al variar las presiones del CO_2 y del O_2, se conoce con el nombre de fenómeno de Zuntz-Hamburger.

Al igual que existen cambios de bienes entre colectivos económicos, existen también cambios de ideas entre colectivos científicos y este traspaso de ideas entre colectivos científicos y este transporte de ideas de un campo de la ciencia a otros es sumamente fecundo, no solamente en la investigación científica y técnica, sino también en la enseñanza. Existe un isomorfismo entre teorías científicas, que hábilmente manejado por el Profesor permite aprender la ciencia por partida múltiple, y cuando lo es por el Investigador hacer ciencia por partida doble.

El concepto de Herencia introducido por Volterra en la ciencia, dota de memoria a la naturaleza, ésta se acuerda de lo que ha sido para tenerlo en cuenta en lo que ha de ser, por primera vez los científicos consideran que la historia de la materia influye en su evolución futura. La Herencia modifica las técnicas matemáticas a emplear en el planteamiento analítico de los fenómenos, sustituyendo las ecuaciones diferenciales por ecuaciones integrales. Pero la Herencia que en un principio se muestra tan fecunda en el campo de la Física y de la Biología, no se limita simplemente a estas ciencias, sino que también invade el campo de otras, concretamente de la Economía. Los efectos de retardos (lags) distribuidos en el tiempo tan conocidos por los economistas, no son en definitiva más que fenómenos hereditarios, pero las estructuras matemáticas sugeridas por la Economía son tan grandes que aparecen así nuevos tipos de ecuaciones funcionales; cadenas recurrentes de ecuaciones integrales e integrodiferenciales, ecuaciones integrales en las que la función incógnita aparece bajo el signo integral múltiple (efectos de retardos múltiples), ecuaciones diferenciales infinitas.

Modernamente la Genética de Poblaciones, la Biocinética y la Epidemiología están tan matematizadas como pueda estarlo la Física, por lo que pudiéramos llamar ingenieros agrobiólogos deben conocer las siguientes materias:

1. Procesos Estocásticos
2. Movimiento Browniano
3. Geometría Integral
4. Teoría de la Información

Las cuestiones fundamentales de los Procesos Estocásticos son las siguientes:

Procesos discretos en el espacio y en el tiempo: paseos al azar y procesos de ramificación.

Procesos discretos en el espacio y continuos en el tiempo: procesos discontinuos de Markov y procesos de ramificación dependientes de la edad.

Procesos continuos en el espacio y en el tiempo: teorías de Kolmogorov y de Feller de los procesos de difusión.

Siendo las principales aplicaciones a la Biología:

Crecimientos de poblaciones.

Epidemias.

Procesos de difusión en Genética de Poblaciones.

Contaminación en radiobiología.

Percepción de las formas visuales y otros fenómenos biológicos análogos.

El movimiento Browniano íntimamente ligado a los Procesos Estocásticos y la Geometría Integral, también interesan quizás en menor escala y sus principales aplicaciones son a la Fitogeografía y a la Zoografía, así como a la medida del contagio.

La Teoría de la Información está íntimamente ligada a la Cibernética, está bordeando su interés con la Biología con su interés en la Física, comprende las siguientes materias:

Transformaciones de Laplace y de Fourier, y el principio de incertidumbre generalizado.

Funciones aleatorias estacionarias. Entropía y medida de la información. Análisis espectral y Análisis armónico.

También en estos casos de Biología y la Física se aproximan en sus respectivos intereses científicos.

Ni la Física, ni las Matemáticas ni la Biología han conseguido que el desconocido futuro influyese sobre el presente, y hacia final del siglo pasado la filosofía de Dilthey abrió la puerta para que la Historia venga configurada por el futuro en vez de por el pasado, debido al libre albedrío de los hombres que al proyectar su vida y su comportamiento hacia el futuro, hace que estos proyectos, esta vida programada sea lo que está condicionando el presente en vez de ser el pasado como ocurre con las antecitadas ciencias. Al matematizar la biología, la economía y la sociología han permitido introducir el futuro en las matemáticas en el fenómeno que he denominado teleológico palabra que procede del griego que significa destinado a un fin u orientado hacia un fin que se persigue; esto ha sido una conquista de las matemáticas hecha por penetrar en campos que no le eran propios y que al principio no le resultaron muy propicios. Pero lo curioso no es que las matemáticas en particular y otras ciencias se aprovecharan de ella sino que hay una tercera, que sin haber puesto al principio nada, resulta tan enriquecida como ellas, que es la filosofía, porque del contacto de ciencia y matemática surgen nuevos problemas filosóficos, que pasaban totalmente desapercibidos por los filósofos profesionales y por otra parte se aclaran otros problemas, los cuales habían permanecido hasta entonces puramente especulativos, y a su vez la filosofía devuelve a la ciencia, en aplicaciones prácticas, los beneficios recibidos; concretamente las redes eléctricas, la electrónica y la física industrial utilizan hoy medios y métodos propios de la lógica matemática. El formalismo matemático de lo teleológico lo he desarrollado ampliamente en anteriores publicaciones y conferencias.

Son muchas y muy variadas las nuevas ideas que a partir de la Física y las Matemáticas se introducen en las restantes ciencias, sobre todo en la Biología y la Economía. Por ejemplo una de ella es la de histéresis, mediante la cual adquieren un cierto carácter de irreversibilidad fenómenos aparentemente reversibles. Yo no sé si los historiadores han tenido en cuenta los efectos de histéresis en la explicación de los fenómenos históricos. En esa constante que cíclicamente se repite en la transición: antiguo régimen-revolución-restauración en virtud del cual los sucesivos estados por los que va pasando la sociedad humana dejan una huella indeleble e imborrable de la cual el pasado no puede enteramente. Así por ejemplo, aunque Carlos X era más reaccionario que sus hermanos, la Francia de Carlos X estaba más a la izquierda que la de Luis XVI y Luis XVIII. Aunque el 93 y el 1848 fueron dos años revolucionarios, la Montaña y el jacobinismo no fueron lo mismo uno y otro año, aunque el 18 de brumario y el 2 de diciembre fueron dos fechas reaccionarias, las ideas napoleónicas ya no significaban lo mismo, como decía Victor Hugo la gloria se había trasladado de Austerlitz a las calles de París. Muchos años después en abril de 1965 París vivió horas históricas, volvieron las barricadas, pero la Marsellesa se había pasado al otro lado de las barricadas, y el suyo ahora era ocupado por la Internacional.

Concretamente la biología en estos últimos años se ha aprovechado de un modelo matemático nuevo, que es lo que se llama un proceso estocástico; esto que tiene un nombre procedente del griego, para hacerlo más inteligible significa una ley de probabilidad que varía con el tiempo, y que el proceso regula con la variación en el tiempo de esta ley de probabilidad es lo que constituye un proceso estocástico, esto en definitiva es hacer lo que pudiéramos llamar un análisis microscópico de las probabilidades.

Hay una diferencia entre plantas, animales y los hombres, que tiene una contrapartida matemática, y es que los hombres y los animales se mueven, mientras que las plantas no; como consecuencia resulta que hay una parte de la matemática abstracta que encuentra o puede encontrar aplicación en la fitopatología y no en la medicina y la veterinaria; es una rama de la geometría que se conoce con el nombre de geometría integral que resulta de la fusión de la geometría y del cálculo de probabilidades. Según que las distancias entre plantas enfermas estén o no repartidas uniformemente al azar; la plaga puede considerarse como no contagiosa o como contagiosa; y es más, según la mayor o menor uniformidad en el repartimiento al azar de las distancias entre plantas se puede establecer una medida del grado de contagio. Se pueden idear modelos matemáticos para el caso de la existencia de insectos de plagas de las plantas, de acuerdo con la teoría de los vuelos al azar y de la cinemática vectorial isótropa, lo cual está relacionado con el movimiento browniano.

En dos conferencias anteriores que di y fueron publicadas por la Real Academia de Ciencias y por la Real Academia de Cultura Valenciana, de la que soy académico de honor, ha tratado del “Espacio y el tiempo en la Historia y en la Filosofía” en la segunda conferencia y sobre “El Espacio y el Tiempo en las Matemáticas y en la Física” la segunda he tratado de cómo las Matemáticas son la ciencia por excelencia, la ciencia exacta por esa razón antiguamente la hoy

Facultad de Ciencias se llamaba de Ciencias Exactas, éstas están ante nosotros que en vez de crearlas lo que hacemos es descubrirla, un teorema matemático no lo creamos, lo descubrimos, estaba ahí silencioso esperando que alguien de nosotros lo descubra. Las matemáticas estaban ya hechas antes que nosotros, no la creamos sino que la estudiamos, la hacemos nacer.

Por el contrario, la Historia no está hecha, la hacemos nosotros, se puede decir que hacemos que nazca, unas veces como quisiéramos que fueran los hechos históricos lo conseguimos, otras veces fracasamos y nacen como no quisiéramos que nacieran.

Vamos a ocuparnos ahora de la Genética de las leyes de la herencia mendeliana. Un fraile agustino Gregorio Mendel (1822-1884) descubrió en 1865 después de muchos experimentos de cruzamientos con polinización artificial en guisantes y judías, las leyes de la herencia que llevan su nombre. Posteriormente en 1900 tres científicos De Vries, Correus y Tschermak redescubrieron dichas leyes. Hoy el progreso de esta ciencia así como su gran desarrollo y unas muchas y valiosas aplicaciones a la agricultura han contribuido a un aumento y mejora de muchos cultivos de algo que nunca pudieron imaginar Mendel y los tres sabios que lo redescubrieron.

En 1974 escribí un libro titulado "Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos" editado por Paraninfo de 483 páginas en el que aparte de los temas conocidos que constituyen esta ciencia figuran varias de mis propias investigaciones. Es tanto un libro de Genética lo es de Procesos Estocásticos y de Teoría de Probabilidades. Consta de 21 capítulos y de dos apéndices, uno de complementos de Matemáticas y el otro de un gran número de problemas resueltos y aplicados. Los procesos estocásticos afectan en las siguientes materias: radiactividad, Cibernética, Economía, ramificación continua, estadística del orden, <u>ciclos de la naturaleza</u>, <u>Genética</u>, Teoría de la Información, Teoría del lenguaje, fusión, fiabilidad y racionalización del trabajo. De estas materias solamente las dos subrayadas afectan a esta conferencia.

A partir de aquí vamos a concluir lo escrito hasta ahora y vamos a escribir unas notas sobre materias de gran dificultad dirigida a lectores especialistas en la materia, que están muy matematizadas.

<u>Nota 1ª Ecuaciones integrodiferenciales aplicables a la Biología</u>

En mis investigaciones sobre Biología me he encontrado con ecuaciones integrodiferenciales del tipo

$$\sum_{r=0}^{n} a_r y^r(t) + \sum_{s=0}^{m} \int_0^{\infty} K_s(\sigma) y^s(t-\sigma) d\sigma = 0 \quad (1)$$

resolubles por la exponencial

$$y = e^{pt} \quad (2)$$

que sustituida en (1) da lugar a

$$e^{pt}\left[\sum_{r=0}^{n} a_r p^r + \sum_{s=0}^{m} p^s L_s(p)\right] = 0 \quad (3)$$

en donde las L son las transformadas de Laplace de las K. Las soluciones oscilantes de (1), cuando existen, son hereditarias o <u>teleológicas</u> (cuyo significado hemos explicado antes), los exponentes de la solución (2) de la(1) son las raíces de la ecuación trascendente (no algebraica) y tiene particular interés el caso en que el número de dichas raíces es finito. El nombre de teleológicas con que bauticé a estos fenómenos, alude a que es el futuro y no el pasado quien condiciona el estado presente del sistema en evolución.

<u>Nota 2ª Ecuaciones sumatorias</u>

También me he encontrado con ecuaciones del tipo

$$a_0 y_t + a_1 y_{t+1} + \ldots + a_n y_{t+n} + \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma y_{t-\sigma} = 0 \quad (1)$$

que he llamado sumatorias, las cuales están con las ecuaciones en diferencias finitas en la misma relación que las ecuaciones integrales con las ecuaciones diferenciales.

La (1) es resoluble por la exponencial

$$y_t = r^t \quad (2)$$

que sustituida en la (1) da lugar a

$$r^t\left[a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n + \sum_{\sigma}^{\infty} b_0 r^{-\sigma}\right] = 0 \quad (3)$$

donde la última $\sum$ de (3) se puede escribir

$$g\left(\frac{1}{r}\right)=\sum_{\sigma=0}^{\infty}b_0 r^{-\sigma} \tag{4}$$

siendo $g(r)$ la función generatriz correspondiente a la serie b_σ, que puede ser divergente, basta con que tenga función generatriz. La ecuación (3) es trascendente en general y también tiene interés muy particular, el caso en que el número de raíces es finito.

Nota 3

La función (1) de la nota 1 la he generalizado en diversas direcciones, una de ellas cuando sustituimos la ecuación (1) de la nota 1 por una ecuación de la forma

$$\begin{gathered}a_0 y(t)+a_1 y'(t)+\ldots+a_n y^n(t)+\int_0^\infty\ldots\\ \ldots\int_0^\infty f(\sigma_1\ldots\sigma_n)y(t-\sigma_1-\sigma_2-\ldots-\sigma_m)d\sigma_1\ldots d\sigma_m=0\end{gathered} \tag{1}$$

cuya solución es de la forma (2) de la nota 1 es decir

$$y=e^{pt} \tag{2}$$

por ser p raíz de la ecuación

$$a_0+a_1 p+\ldots+a_n p^n+F(p,p,\ldots p)=0 \tag{3}$$

Nota 4

Otra dirección para generalizar la nota 1 es la que conduce a sistemas de ecuaciones integrales de la forma

$$\left.\begin{array}{c}\int_0^\infty g_1(r)y_1(t-r)dr=\int_0^\infty f_1(r)y(t-r)dr\\ -----------------------\\ \int_0^\infty g_{n-1}(r)y_{n-1}(t-r)dr=\int_0^\infty f_{n-1}(r)y(t-r)dr\end{array}\right\} \tag{4}$$

que introduciendo la transformada de Laplace un miembro cualquiera de la (4) se

$$\begin{gathered}\int_0^\infty g_1(r)dr\int_0^\infty x_1(\sigma)e^{-(t-\sigma)}d\sigma=\\ =\int_0^\infty e^{-t\sigma}x_1(\sigma)d\sigma\int_0^\infty e^{\sigma r}g_1(r)dr=\\ =\int_0^\infty e^{-t\sigma}x_1(\sigma)G_1(-\sigma)d\sigma\end{gathered} \tag{5}$$

y el sistema de la (4) es equivalente a la cadena recurrente de ecuaciones de diferencias finitas

$$\left.\begin{array}{c}G_1(-\sigma)x_1(\sigma)=F_1(-\sigma)x_2(\sigma)\\ -------------------\\ G_{n-1}(-\sigma)x_{n-1}(\sigma)=F_{n-1}(-\sigma)x_n(\sigma)\end{array}\right\} \tag{6}$$

de donde se deduce que

$$x_n(\sigma)=x_1(\sigma)\frac{G_1(-\sigma)\ldots G_{n-1}(-\sigma)}{F_1(-\sigma)\ldots F_{n-1}(-\sigma)} \tag{7}$$

las G, F e y son las transformadas de Laplace de g, f, x. Si el denominador de (7) no tiene ceros, calculando la transformada de Laplace de (7), se obtiene la solución $y_n(t)$ en función del dato $y_1(t)$. Cuando numerador y denominador de (7) son polinomios, debido a las propiedades de la transformación de Laplace:

$$y(t)=\int_0^\infty e^{-t\sigma}x(\sigma)d\sigma \tag{8}$$

Nota 5

Estos problemas biológicos estudiados matemáticamente se han llegado a convertir incluso en un instrumento de investigación de las propiedades de las funciones trascendentes superiores. Es un hecho conocido que muchas fórmulas de combinatoria son difíciles de demostrar o indemostrables por línea directa, sin embargo son consecuencia inmediata de problemas probabilísticos, pues bien, en un orden más complicado me he encontrado con que la solución de ciertos problemas probabilísticos que encuentran su origen en la biología, se convierten en un instrumento que permite encontrar y demostrar nuevas propiedades de las funciones trascendentes superiores que no se han encontrado anteriormente por los procedimientos directos del análisis matemático clásico. Es que las propiedades funcionales se descubren en un plan previo, se procede a investigar en forma desordenada, nos convertimos mitad en broma mitad en serio en matemáticos ebrios, que encontramos cosas sin buscarlas; pero resulta que muchas veces el irse encontrando cosas sin buscarlas puede tener más importancia que resolver un problema concreto. Así por ejemplo el fracaso de Plank en su intento de explicar el mecanismo de radiación del cuerpo negro, le condujo al descubrimiento de los cuantos; el fracaso de

Dirichlet en su intento de demostración del último teorema de Fermat, le condujo al descubrimiento de los ideales.

Pearson aplicó las funciones de Bessel al problema de los vuelos al azar, que tiene interés en las emigraciones de insectos dañinos a la agricultura. He realizado investigaciones en las que he establecido las ecuaciones integrales que ligan entre sí a las funciones características y de frecuencias de los vectores aleatorios y sus proyecciones sobre un subespacio (en particular un eje) en un espacio euclídeo de n dimensiones.

También he de señalar que la biología matemática encuentra a veces fórmulas de la teoría de funciones como consecuencia de la revolución de los problemas probabilísticos, y como muestra doy a continuación algunos ejemplos que he encontrado

$$\lim_{n\to\infty}\frac{K_n\left(x\sqrt{t}\right)}{2^n\Gamma(n)}=e^{-x^2/2}$$

$$\lim_{m\to\infty}{}_2F_1\left(\frac{m}{2};\frac{m+1}{2};\frac{n}{2};\frac{t^2}{m^2}\right)=2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{n/2-1}(t)}{t^{n/2-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{n/2n-1}\left(t\sqrt{n}\right)}{\left(t\sqrt{n}\right)^{n/2-1}}=e^{-t^2/2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2/x)^{\frac{n}{2}-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[\int_{p-1}^{\infty}\cdots\int_{p^2}^{\infty}\frac{K_{n/2-1}\left(p_1(x)\right)}{p_1^{\frac{n}{2}-1}}\right]_{p_{n-1}}=\delta(x)$$

en las que J, K, Γ, ${}_2F_1$, δ son las conocidas funciones de Bessel, gamma, hipergeométrica y singular de Dirac.

Nota 6. Mi relación con Rey Pastor y la editorial Globo del Brasil

La editorial Globo de Brasil publicó una enciclopedia muy grande titulada Manual del Ingeniero en portugués, la mayoría de los autores fueron brasileños pero quisieron contratar a algunos extranjeros entre ellos a un español y pidieron a Rey Pastor a quién debían elegir, y éste le dio mi nombre. El idioma era el portugués. Me encargaron que escribiera sobre la Teoría y Aplicaciones de las Oscilaciones y nombraron traductor del español al portugués al ingeniero brasileño Ruy Pinto da Silvas. Mi publicación tiene 233 páginas y consta de 18 capítulos y contiene una parte con mis propias investigaciones. Está en el volumen 5o del tomo 1o y se publicó en 1964.

Nota 7. Mi relación con Rey Pastor y Antonio de Castro y su libro Funciones de Bessel

Rey Pastor y Antonio de Castro catedrático de la Universidad de Sevilla escribieron un libro conjuntamente titulado Funciones de Bessel, editado por la editorial Dossat en 1958. Me pidieron que les enviase un resumen de mis investigaciones sobre esta materia para incluirla en su libro. Como puede verse en el índice de Autores de su libro las páginas 196 a 203 reproducen una parte de mis propias investigaciones sobre las Funciones de Bessel.

Lo que se refiere a mis investigaciones comienza en la página 196 con el título Notas y Complementos al capítulo XIII. Comienza el número 1 Aplicaciones a la teoría de oscilaciones hereditarias y teleológicas y siguen con el número 2 Aplicaciones a la Estadística y al Cálculo de Probabilidades siguen 2.1 Vectores aleatorios isótropos y funciones J de Bessel 2.2 Funciones I de Bessel y movimiento browniano 2.3 Adición de variables aleatorias en número aleatorio y funciones I y K de Bessel 2.4 Multiplicación y división de variables aleatorias y funciones K de Bessel 2.5 Otras propiedades de las funciones K de Bessel 2.6 Probabilidades discretas, dependientes del índice de funciones K de Bessel 2.7. Probabilidades dependientes de funciones ber_n y bei_n de Lord Kelvin 2.8 Probabilidades dependientes de funciones de Bessel no pertenecientes al dominio de atracción de la ley normal. Todo lo anterior está extraído de mis memorias “Nuevos tipos de ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales. Nuevos fenómenos de oscilación” publicada por la Real Academia de Ciencias en 1956.

Nota 8. Perfiles isoclásticos en la agricultura

He llamado perfiles isoclásticos a aquellos que gozan de la propiedad de que las partículas que se mueven sobre los mismos ejercen la misma presión en cualquier punto, y por tanto si el material sobre el que está hecha la máquina es homogéneo, la máquina sería homogénea en cuanto a la resistencia; en términos vulgares no habrá sobre la máquina puntos de menor resistencia.

Si las fuerzas están situadas en un plano y el perfil es una curva plana, la presión ejercida por la fuerza exterior está dirigida según la normal a la curva. Si X e Y son sus componentes cartesianas, x e y las coordenadas de un punto genérico de la curva, la ecuación diferencial de ésta para que sea elástica es:

$$Xdy - Ydx = Kds; \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (1)$$

en la que K es una constante que expresa la constancia de la proyección de la fuerza sobre la normal a la curva.

Así por ejemplo si la fuerza es central y de intensidad constante, tomando como origen de coordenadas el centro de fuerzas es:

$$\left.\begin{aligned} &X = -\frac{\mu x}{r}; \qquad Y = -\frac{\mu y}{r}; \qquad r^2 = x^2 + y^2 \\ &\frac{\mu(xdy - ydx)}{r} = \mu r d\theta = k\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

de la que se sigue que

$$\frac{dr}{r} = md\theta; \quad r = ae^{m\theta}; \quad \frac{\sqrt{\mu^2 - k^2}}{k} = m \qquad (3)$$

el perfil es una espiral logarítmica.

Si las fuerzas exteriores no están en un plano y el perfil es una superficie; si llamamos X, Y, Z a las componentes cartesianas de las fuerzas, p y q a las derivadas parciales $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, para que el perfil sea isoclástico se ha de verificar:

$$pX + qY - Z = k\sqrt{1 + p^2 + q^2} \qquad (4)$$

que expresa que la proyección de la fuerza sobre la normal a la superficie es constante.

Así por ejemplo si la fuerza es paralela al eje OZ y de intensidad constante (4) es:

$$p^2 + q^2 = k^2 \qquad (5)$$

que tiene la integral completa inmediata:

$$z = ax + \sqrt{k^2 - a^2}\, y + b \qquad (6)$$

en las que a y b son constantes de integración. Si $b = 0$ representa un plano que envuelve un cono de revolución de eje OZ.

Si b es distinto de cero el plano (6) envuelve un helicoide desarrollable, cuya arista de retroceso es una hélice situada sobre un cilindro de revolución de eje vertical.

Si $k = 0$ la (5) se reduce

$$p^2 + q^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0,\ q = 0 \qquad (7)$$

cuya envolvente es un cilindro de revolución de eje paralelo a OZ, la presión es en este caso nula.

Las tres superficies anteriores son los perfiles isoclásticos para una fuerza como la de la gravedad (deben emplearse en los arados).

Para más detalles véase mi artículo publicado en 1955 en el Boletín de INIA de 1955 o mi libro Mecánica y Cálculo Tensorial 2a Edición de Dossat de 1965.

Nota 9. La Mecánica aleatoria

La Mecánica aleatoria es una de las ramas más sugestivas y modernas de la Mecánica. Utiliza métodos muy distintos de los de la mecánica cierta, basada preferentemente en el Cálculo de Probabilidades (Procesos estocásticos). Vamos a dar un ejemplo de movimiento rectilíneo aleatorio impulsivo. Si un punto se mueve sobre una recta, siendo su velocidad υ una variable aleatoria discreta y no creciente, tal que la probabilidad de que disminuya en una unidad en el intervalo de tiempo de t a $t + dt$ es igual a $\lambda\upsilon/dt$ y su valor inicial es u, se obtiene para función característica de la velocidad υ:

$$\left[e^{iw-\lambda t} + 1 - e^{-\lambda t}\right]^n \qquad (1)$$

a la que corresponde el valor medio

$$\overline{\upsilon} = ue^{-\lambda t} \qquad (2)$$

Y para la posición aleatoria sobre la recta en el tiempo t se obtiene la función característica:

$$e^{(iz-\lambda)t} + \frac{\lambda}{\lambda - iz}\left(1 - e^{(iz-\lambda)t}\right) \tag{3}$$

a la que corresponde el valor medio

$$x = \frac{u\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{\lambda} \tag{4}$$

Obsérvese que la derivada con relación al tiempo de la posición es igual a la velocidad media.

La función característica de la distribución conjunta de la posición x y de la velocidad υ, se obtiene que es

$$\left[e^{(iz-\lambda)t+iw} \frac{\lambda}{\lambda - iz}\left(1 - e^{(iz-\lambda)t}\right)\right]^n \tag{5}$$

Siendo w el argumento relativo a υ y z el relativo a x. La fórmula (5) permite resolver los problemas relativos a la correlación entre posición y velocidad.

Cuando el tiempo t tiende a infinito (1) tiende a la unidad, luego la velocidad converge en probabilidad a cero y la (3) tiende a

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda - iz}\right)^n \tag{6}$$

a la que corresponde la función de frecuencias

$$\frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \tag{7}$$

siendo el valor medio el mismo que resulta de hacer $t = \infty$ en (4) o sea n/λ.

Nota 10. Extensión de la aleatoriedad a parte de la Física y de las Ecuaciones Diferenciales y en Derivadas Parciales

En varias publicaciones he transformado ecuaciones diferenciales y sistemas de las mismas y ecuaciones en derivadas parciales en otras de estas clases iguales en su forma pero con valores iniciales aleatorios de forma distinta a lo que se acostumbra a hacer. Este enfoque distinto abre un campo muy grande que incluye el papel que puede jugar el azar no solo ya en la Física sino también en otras Ciencias como son la Economía y la Sociología.

Nota 11. Mi libro Mecánica y Cálculo Tensorial

La segunda edición es de 1965 fue hecha por Dossat. Consta de 496 páginas, de las cuales de la página 387 hasta el final está dedicada al Cálculo Tensorial.

La parte del Cálculo Tensorial va desde el capítulo XVI al XX y se exponen los Tensores afines y covariantes, los Tensores en geometría, los espacios de Riemann y los no Riemannianos, entre los que figuran uno introducido por mí, y los de Finsler y los electromagnéticos. Lo dicho implica ir más allá de la Teoría de la Relatividad.

Nota 12. Mi libro "Líneas de investigación en los Procesos Estocásticos y el movimiento Browniano"

En los años 1974 y 1975 el Instituo de España creó la cátedra de José María Plans para los Académicos de la Real Academia de Ciencias que dieran cursos para Licenciados que quisieran hacer el Doctorado, cursos que serían publicados como libros del Instituto de España.

En 1974 Federico Goded dio un curso sobre la Teoría de la Relatividad, que se publicó.

En 1975 yo di un curso que también se publicó, que es el que encabeza esta nota 12. Tiene 213 páginas y está dividido en 5 capítulos y un apéndice, con mis propias investigaciones. Después no se dieron más discursos por académicos de la Sección de Exactas de la Real Academia de Ciencias.

Nota 13. Cálculo Integral y Cálculo Diferencial aleatorios

Esta nota amplía la Nota 10. En mi opinión introduce una novedad que es que introduce nuevos conceptos en las Matemáticas. En el caso del Cálculo

Integral introducimos un nuevo modelo matemático que es aplicable a las integrales simples, dobles y en general múltiples, las pone en contacto con la aleatoriedad y también en el caso del Cálculo Diferencial, siendo aplicable a las derivadas ordinarias y a las derivadas dobles y múltiples.

En el caso del Cálculo Diferencial las derivadas sean las ordinarias, las dobles, triples o múltiples, las llamamos aleatorias, si los valores de las mismas no sean ciertos sino que tomen valores aleatorios, es decir que df/dx no es un valor cierto (exacto) sino que son aleatorios, con probabilidades dadas de antemano. Lo anterior es también válido para derivadas parciales de funciones de varias variables.

Es decir la derivada de $f(x)$ para $x = a$, es:

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a} \quad \text{probabilidad } x = a \tag{1}$$

En el caso de funciones de dos variables x, y es

$$\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right)_{x=a\ y=b} \quad \text{prob } (x = a, y = b) \tag{2}$$

En el caso de la integral es

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) \text{ prob } x = b - F(a) \text{ prob } x = a \tag{3}$$

y lo mismo para funciones dobles y en general múltiples.

Nota 14. La posición del Rey Jaime I y el murciélago (leyenda o realidad)

Cuenta la leyenda que durante el sitio de Valencia un murciélago permaneció en lo más alto de su tienda de campaña, obviamente esto es imposible, pero lo que sí pudo ser real es que durante todo el sitio dado el número tan enormemente grande de murciélagos siempre hubiera un murciélago en el punto más alto de la tienda del Rey.

El número de murciélagos es tan grandísimo en la Valencia de hasta hace pocos años que es posible que sea verdad lo dicho en la leyenda.

El escudo de Valencia es el único de todos los escudos del Reino de Aragón que lleva las barras rojas y amarillas sobre todo el escudo. Los demás llevan las barras sobre una cuarta parte del esduco.