Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 107, Nº. 1-2, pp 1-8, 2014
XVI Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

LA GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA

José María Montesinos Amilibia*

* Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain. E-mail address: montesin@mat.ucem.es
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde, 22. 28004 Madrid

I. PROBLEMA DE LAS PARALELAS

Parece que el primer tratado de Geometría, titulado *Elementos*, fue escrito por Hipocrates hacia el 450 a.C. El tratado de Euclides, también llamado *Elementos* (ver [5], [6], [10], [9]) compila de modo ordenado los descubrimientos geométricos y aritméticos de sus predecesores. Entre éstos, Thales (624-548), Pitagoras (580-500), Proclo (siglo 5º a.C.) y Eudoxo (408-355). Así pues, la corriente de pensamiento que iniciaron los griegos, y que se cultiva hasta hoy con el nombre de ciencia deductiva, parte de los tiempos de Hipocrates.

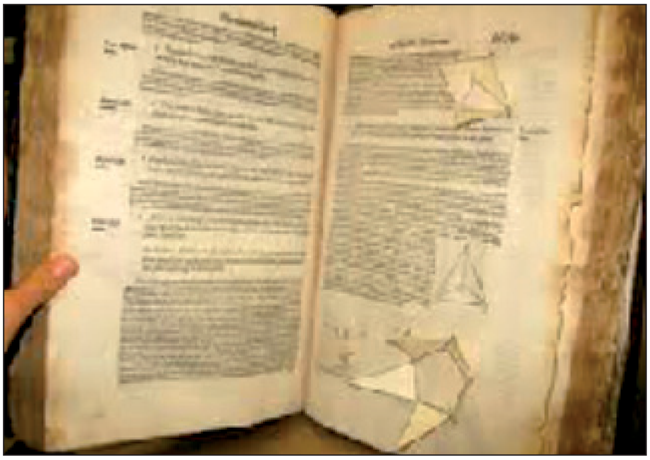


Figure 1. Los Elementos

La ordenación a la que nos referimos consiste en que el enunciado de cualquier *proposición* (tal como que "el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la suma de los cuadrados de sus catetos": Teorema de Pitagoras) ha de ir precedido de las definiciones (triángulo, hipotenusa, cateto, etc.) que lo hacen inteligible y de otras proposiciones de las que la proposición se deduce por razonamiento lógico riguroso. El razonamiento deductivo en sí, llamado *demostración*, va inmediatamente después del enunciado de la proposición que se ha de demostrar.

Como este proceso hacia atrás no puede extenderse hasta el infinito ha de llegar un punto en que las proposiciones son tan sencillas que cualquier intento de demostrarlas a partir de otras proposiciones más simples es imposible sin algun razonamiento circular. Una de ellas es, por ejemplo, que "dados dos puntos distintos hay una recta que pasa por ellos".

Se llega pues a un conjunto básico de proposiciones que no se demuestran, de las que se deduce todo el edificio geométrico y aritmético.

Estas proposiciones especiales de las que parte toda la cadena de proposiciones que constituyen los Elementos son los *postulados*.

Date: Enero 16, 2015.
1991 *Mathematics Subject Classification*. (2010) 11E04, 11E20, 57M25, 57M50,57M60.
Key words and phrases.

Ya sóla esta idea, base de la ciencia deductiva, admira, especialmente si consideramos que se obtuvo en tan remotos tiempos.

Los postulados de los Elementos son cinco:

E1: Se puede trazar una línea recta desde un punto a cualquier otro (*geometría de la regla*).

E2: La línea recta puede prolongarse cuanto se desee.

E3: Puede describirse un círculo de radio arbitrario y centrado en un punto arbitrario (*geometría del compás*).

E4: Dos ángulos rectos cualesquiera son iguales.

E5: Si una línea recta, cayendo sobre otras dos, forma, al mismo lado, ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos, aquellas dos, prolongadas hacia ese lado, se cortan.

Ellos, naturalmente van precedidos de las definiciones que los hacen comprensibles.

Se ha dado en llamar, siguiendo a Juan Bolyai, *geometría absoluta* al conjunto de proposiciones que son consecuencia lógica de los cuatro primeros postulados *E*1 a *E*4, sin emplear el quinto *E*5. Por ejemplo, la proposicion "*un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos internos opuestos*" pertenece a la geometría absoluta, pues aunque es consecuencia directa del 5º postulado, ella es consecuencia lógica de los cuatro primeros.

Dos rectas del mismo plano que no se cortan se llaman paralelas.

También pertenece a la geometría absoluta la siguiente proposicion: "*dada una recta y un punto fuera de ella, por el punto pasa una recta paralela a la primera*". En efecto, es consecuencia inmediata de la última proposición enunciada, pues dos rectas que forman ángulos rectos con una tercera no pueden cortarse sin violar el que "*un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos internos opuestos*".

El problema de las paralelas es:

¿Es el 5º postulado consecuencia lógica de los cuatro primeros? Es decir, ¿pertenece el 5º postulado a la geometría absoluta?

Si así fuera, el 5º postulado no sería realmente un postulado sino una proposición que se deduce necesariamente de los cuatro primeros postulados.

El 5º postulado es equivalente (se deduce e implica) a cada una de las siguientes proposiciones:

(1) Dada una recta y un punto fuera de ella, por el punto pasa *exactamente* una recta paralela a la primera (PROCLO).

(2) Existen triángulos de distinta área con ángulos iguales (Wallis, 1663).

(3) Dado un triángulo, siempre hay otro de área mayor (GAUSS, 1799).

(4) Los puntos del plano situados al mismo lado de una recta y a la misma distancia de ella forman una recta (CLAVIUS, 1574).

(5) Tres puntos distintos del plano o bien están alineados o yacen en un mismo círculo (JANOS BOLYAI, 1830).

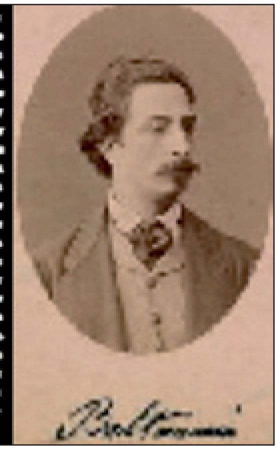
Si el lector considera que no es posible la existencia de una geometría en la que cada una de las cinco proposiciones anteriores (más el 5º postulado) no sea necesariamente verdadera y se empeña entonces en deducirlas lógicamente de los cuatro primeros postulados, es muy posible que haya sido arrastrado a esa idea por su percepción personal geométrica del mundo real (geometría *física* u *ontológica*). No permita el lector que su mente identifique todas las proposiciones de la geometría absoluta con proposiciones del mundo físico. Si lo hace, es posible que caiga en la misma trampa en la que cayeron eminentes geómetras hasta comienzos del siglo XX. Nuestra percepción geométrica física nos dice que las cinco proposiciones anteriores son *evidentemente* ciertas. Sin embargo, estaríamos equivocados pensando que son consecuencia necesaria de los cuatro primeros postulados.

Es aquí donde el genio de EUCLIDES alcanza su cima: la adición del 5º postulado, que pareció una tacha o

Janos Bolyai

Lobachevsky

Gauss



Beltrami

defecto de los elementos, era realmente necesaria. Y eso se debió al trabajo de muchos matemáticos, culminando con la obra públicada de BOLYAI y LOBACHEVSKY (independientemente) y de GAUSS (no publicada).

Veamos, siguiendo a BELTRAMI, cómo el 5º postulado no es consecuencia de los otros cuatro. Hemos de definir los puntos, rectas, ángulos rectos y movimientos rígidos o isometrías de un peculiar “plano” de modo que en él se cumplan los cuatro primeros postulados, pero no el 5º (un *modelo*, decimos hoy, de una geometría no euclidiana).

El plano, llamado *hiperbólico*, de BELTRAMI (llamado por él *pseudoesfera*) es el conjunto de *puntos* (llamados *puntos hiperbólicos*) situados en el interior de un círculo de radio R situado en el plano Euclidiano P.

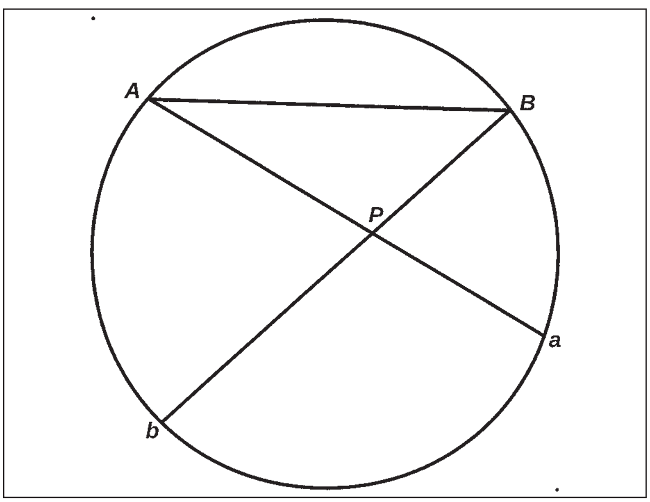


Figure 2. Pseudosfera de Beltrami

Los puntos del círculo frontera no pertenecen al plano hiperbólico, pero conviene considerarlos y llamarlos puntos del *infinito*. Los puntos del plano Euclidiano situados en el exterior del círculo del infinito se llaman puntos del *ultrainfinito*. Las *rectas hiperbólicas* son las cuerdas del círculo privadas de sus dos puntos del infinito. Dado un segmento AB sobre una tal recta hiperbólica, siempre puede prolongarse a un segmento mayor (que contiene al AB) situado sobre esa. Dos rectas hiperbólicas que no se cortan son *paralelas* por definición. Pero hay dos tipos de rectas hiperbólicas *paralelas*. Aquellas que prolongadas se cortan en un punto del infinito (llamadas paralelas propiamente dichas) y aquellas que prolongadas se cortan en un punto del ultrainfinito (llamadas *ultraparalelas*).

Las rectas hiperbólicas y los puntos hiperbólicos así definidos cumplen evidentemente las siguientes proposiciones **euclidianas (!)**:

H1: Se puede trazar una recta hiperbólica desde un punto hiperbólico a cualquier otro punto hiperbólico.

H2: La recta hiperbólica puede prolongarse cuanto se desee.

H5: Por un punto hiperbólico exterior a una recta hiperbólica pasan al menos dos rectas hiperbólicas paralelas. (ver la Figura).

Definimos ahora ángulo recto. Para ello recordemos que se llama *polo* de una cuerda al punto del ultrainfinito en que se cortan las tangentes al círculo trazadas por los puntos del infinito de la cuerda. El polo de un diámetro no está pues definido. Decimos que dos cuerdas, que se cortan en un punto interior al círculo, forman *ángulo recto* si:

(1) Siendo una cuerda un diámetro del círculo, la otra cuerda lo corta en ángulo euclidiano recto.

(2) Si ninguna de las cuerdas es un diámetro, la primera, prolongada euclidianamente (hacia el ultrainfinito), pasa por el polo de la segunda (y entonces es una proposición euclidiana que también la segunda cuerda, asímismo prolongada, pasa por el polo de la primera).

Necesitamos también definir los movimientos rígidos o isometrías hiperbólicas para poder comparar dos ángulos rectos y establecer la proposición euclidiana siguiente:

H4: Dos ángulos hiperbólicos rectos son iguales (se superponen mediante una isometría hiperbólica).

Los movimientos rígidos o isometrías hiperbólicas han de asignar a todo punto hiperbólico A un punto hiperbólico B de modo que puntos distintos vayan a puntos distintos y además han de ser tan especiales que han de enviar cuerdas a cuerdas. Y además han de ser muchas, pues tienen que existir suficientes como para enviar un punto A a otro B, arbitrariamente dados. Podemos inmediatamente definir las isometrías que dejan fijo el centro O del círculo. Ellas son las rotaciones en torno a O junto con las reflexiones en los diámetros del círculo. Este es un grupo generado por sus reflexiones.

El conjunto de las isometrías es por definición el grupo generado por las reflexiones euclidianas en los diámetros del círculo, junto con las *reflexiones hiperbólicas* que pasamos a definir. Una reflexión hiperbólica está determinada por una cuerda no diametral α cuyo polo denotaremos por A. La reflexión hiperbólica asociada a A, denotada h_A envía los puntos de α sobre ellos mismos y si X es un punto hiperbólico que no yace sobre α, su imagen $h_A(X)$, mediante la reflexión hiperbólica, es un punto Y situado en la cuerda CD de la recta euclidiana AX, tal que X e Y separan armónicamente a los puntos del infinito C yD. Además $h_A(C)=D$.

La reflexión hiperbólica se extiende a los puntos del ultrainnito de modo análogo y tiene la propiedad de enviar una cuerda y su polo a una cuerda y su polo. Por eso ella envía ángulos rectos a ángulos rectos. Como además siempre hay una reflexión hiperbólica que manda un punto hiperbólico arbitrario al punto O, centro del círculo, para probar $H4$ sólo necesitaremos comparar ángulos rectos de vértice O, y estos coinciden con los ángulos rectos euclidianos en O, que se superponen por una rotación en torno a O. Esto demuestra la Proposición euclidiana $H4$.

Finalmente definiremos los *círculos hiperbólicos*. Los centrados en O son por definición los círculos euclidianos centrados en O de radio menor que el radio R del círculo. Los centrados en $X\neq O$ son, por definición, las imágenes de los círculos centrados en O mediante cualquier isometría que mande O a X. Ellos son elipses. Como los radios posibles son segmentos arbitrarios de cuerdas, es claro que también es cierta la siguiente proposición euclidiana.

H3: Puede describirse un círculo hiperbólico de radio arbitrario y centrado en un punto hiperbólico arbitrario.

Ordenamos lo obtenido hasta ahora: son, las siguientes proposiciones euclidianas, válidas para puntos, rectas y círculos hiperbólicos:

H1: Se puede trazar una recta hiperbólica desde un punto hiperbólico a cualquier otro punto hiperbólico.

H2: La recta hiperbólica puede prolongarse cuanto se desee.

H3: Puede describirse un círculo hiperbólico de radio arbitrario y centrado en un punto hiperbólico arbitrario.

H4: Dos ángulos hiperbólicos rectos son iguales (se superponen mediante una isometría).

H5: Por un punto hiperbólico exterior a una recta hiperbólica pasan al menos dos rectas hiperbólicas paralelas.

Observamos que cuatro de estas proposiciones son formalmente iguales a los cuatro primeros postulados euclidianos. Pero la quinta proposición $H5$ es, como sabemos por Proclo, la negación del quinto postulado. Esto es, $H5$ niega que "por un punto hiperbólico exterior a una recta hiperbólica pase una sola recta hiperbólica paralela".

Si el quinto postulado euclidiano $E5$ fuera una proposición euclidiana, él sería demostrable a partir de los cuatro primeros postulados $E1$ a $E4$. La misma demostración, palabra por palabra, cambiándolas mediante el diccionario

(1) punto (euclidiano) por punto hiperbólico.

(2) recta (euclidiana) por recta hiperbólica.

(3) ángulo recto (euclidiano) por ángulo recto hiperbólico.

(4) círculo (euclidiano) por círculo hiperbólico.

llevaría a demostrar a partir de las proposiciones euclidianas $H1$ a $H4$ la siguiente proposición euclidiana

AntiH5: Por un punto hiperbólico exterior a una recta hiperbólica pasa una sola recta hiperbólica paralela.

que contradice la proposición euclidiana $H5$.

Hemos demostrado lo siguiente:

"si el 5º postulado euclidiano es consecuencia de los otros cuatro, la geometría euclidiana es contradictoria".

Más todavía, si del desarrollo lógico de los cinco siguientes postulados antieuclidianos,

AntiE1: Se puede trazar una línea recta desde un punto a cualquier otro.

AntiE2: La línea recta puede prolongarse cuanto se desee.

AntiE3: Puede describirse un círculo de radio arbitrario y centrado en un punto arbitrario.

AntiE4: Dos ángulos rectos cualesquiera son iguales.

AntiE5: Por un punto hiperbólico exterior a una recta pasan al menos dos rectas paralelas,

se obtiene alguna contradicción, también la geometría euclidiana es contradictoria.

En efecto, cualquier proposición, consecuencia de los cinco postulados $AntiE1$ a $AntiE5$ se convertiría al traducir palabra por palabra, a partir de las proposiciones euclidianas $H1$ a $H5$ en una proposición euclidiana. Por tanto si en el sistema geométrico (llamado *geometría hiperbólica*) obtenido a partir de los postulados $AntiE1$ a $AntiE5$ se llegara a una contradicción, también se llegaría a una contradicción euclidiana al partir de las proposiciones euclidianas $H1$ a $H5$. Es decir:

Si la geometría hiperbólica lleva a contradicción también lleva a contradicción la euclidiana: la geometría hiperbólica es tan consistente como la euclidiana.

Pero también es cierta la siguiente afirmación:

Si la geometría euclidiana lleva a contradicción también lleva a contradicción la hiperbólica: la geometría euclidiana es tan consistente como la hiperbólica.

Ambas pues son igualmente consistentes o inconsistentes.

Para la demostración de la última afirmación, describiremos el modelo de Beltrami de la geometría hiperbólica del espacio sin muchos detalles, que, por otra parte, el lector puede suplir sin dificultad. Los *puntos hiperbólicos* son los puntos del interior de una bola B de radio R situado en el espacio proyectivo (el espacio euclidiano completado con los puntos del infinito: uno por cada haz de rectas euclidianas paralelas). Las *rectas hiperbólicas* son las cuerdas del círculo privadas de sus dos puntos extremos. Hay tres tipos de radiaciones (*conjunto de rectas que pasan por un punto*) de rectas hiperbólicas: radiaciones elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Una radiación es *elíptica* si las rectas que la componen pasan por un punto hiperbólico llamado *centro de la radiación*. Una *radiación es parabólica* si las rectas que la componen pasan por un punto de la frontera de B (*esfera del infinito*). El centro de esta radiación es un punto *infinito*. Una *radiación es hiperbólica* si las rectas que la componen pasan por un punto del exterior de B. El centro de esta radiación es un punto *ultrainfinito*. El plano polar de este punto es, por definición, perpendicular a las rectas del haz que por eso se llama un *haz ortogonal* a la parte del plano polar (*base del haz*) situada en el interior de B. Esto es el interior de un disco (*plano hiperbólico*). Este disco, en efecto, es el modelo del plano hiperbólico de Beltrami descrito antes.

La importancia de estas radiaciones es que cada una de ellas puede ser identificada con su centro. En efecto una radiación elíptica se distingue de los otros dos tipos de radiaciones en que sus rectas (hiperbólicas) poseen un punto (hiperbólico) común. Y una radiación parabólica difiere de una hiperbólica en que cada par de rectas (hiperbólicas) de ésta poseen una recta perpendicular común (la que junta los puntos de intersección de ellas con la base del haz. De este modo la colección de haces elípticos está en correspondencia biunívoca con los puntos hiperbólicos. Los haces parabólicos, con la esfera del infinito B, frontera de B. Y los haces hiperbólicos, con los puntos del ultrainfinito y también con los planos hiperbólicos (asociando a cada haz hiperbólico su base).

Dada una radiación de centro A podemos considerar las superficies perpendiculares a la radiación. Son las "esferas" hiperbólicas. Si la radiación es elíptica (resp. parabólica, hiperbólica) las esferas se llaman esferas propiamente dichas (resp. *horosferas*, *hiperesferas*) *con centro A*. Las esferas centradas en el centro O de B son esferas euclidianas; las centradas en un punto hiperbólico $A \neq O$ son elipsoides. Las horosferas centradas en el punto infinito A son elipsoides bitangentes a ∂B en el punto A y contenidos en el interior de B. Las hiperesferas de centro A y plano base π son π mismo y los elipsoides tangentes a ∂B a lo largo del borde de π y contenidos en el interior de B.

Podemos ahora proceder a demostrar que la geometría euclidiana es tan consistente como la hiperbólica. La idea es exactamente la misma que empleamos para probar que la geometría hiperbólica es tan consistente como la euclidiana. En este último caso procedimos a construir un modelo hiperbólico dentro del plano euclidiano. Ahora *hallaremos un plano euclidiano dentro del espacio hiperbólico*.

En mi opinión, el logro más profundo de Bolyai y Lobachevsky (independientemente) consiste en haberse dado cuenta (y demostrado rigurosamente) que la *horosfera es un plano euclidiano*. Esta afirmación involucra entender lo que es la *geometría intrínseca* de la horosfera: la que hereda del hecho de estar incluida en el espacio hiperbólico. Para percibir la dificultad entienda el lector que una horosfera es un elipsoide menos el punto del infinito A, centro del haz parabólico al que ella es ortogonal. Un estudiante de hoy se da cuenta de que la topologia de la horosfera es la misma que la del plano euclidiano (proyecte estereograficamente la horosfera sobre un plano desde el punto A). Cosa más difícil es entender y demostrar que la geometría intrínseca de la horosfera (concepto debido a Gauss, pero ignorado por nuestros dos héroes) es euclidiana. Las rectas de la horosfera H son las intersecciones de ella con los planos hiperbólicos que pasan por A (son elipses privadas del punto A). Es claro que dos de estas rectas, obtenidas como intersección de dos planos que pasan por una misma recta tangente a B en el punto A no se cortan en H: son rectas paralelas, y así se obtienen todas las paralelas. Entonces, por un punto X de H, exterior a una "recta" α de H, pasa exactamente una "recta" β de H paralela en H a α: la geometría de H es euclidiana (!).

De aquí es fácil obtener, argumentando como más arriba que

Si la geometría euclidiana lleva a contradicción también lleva a contradicción la hiperbólica: la geometría euclidiana es tan consistente como la hiperbólica.

REFERENCES

[1] Babini, J. Origen y Naturaleza de la Ciencia, Argentina.

[2] Battaglini, J. Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky, Gior. di Mat. Napoli, 5 (1867) 217-231.

[3] Bell, E. T. Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económica, México, 1949.

[4] Beltrami, E. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, Gior. Mat. 6 (1868) 248-312.

[5] Bonola, R. Geometrías no euclidianas, Espasa Calpe, S.A. (1945). Edición en inglés: Non-Euclidian Geometry. Dover, Toronto, 1955.

[6] Boyer, C.B. Historia de la Matemática. Alianza Editorial, Madrid, 1966.

[7] Cayley,A. Note on Lobatschewsky´ s imaginary geometry, Phil. Mag. 29 (1865) 231-233.

[8] Cayley,A. Sixth memoir upon quantics, Phil. Trans. 149 (1859) 61-91.

[9] Efimov, N. V. Geometría superior. MIR, Moscú, 1984.

[10] Fano, G. Geometria non euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività, Zanichelli,, Bolonia, 1935

[11] Gans, D. An introduction to non-euclidean geometry, Academic Press, 1973

[12] Kárteszi, F. y Szénássy, B. Janos Bolyai, Appendix the theory of space, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987.

[13] 1987. Klein, F. Über die so gennante Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. 4 (1873) 573-625.

[14] Kline, M. Mathematical thought from ancient to modern times. Oxford University Press, New York, 1972.

[15] Lobachevsky, N. I. Pangeometria, Kazan, 1855 (traducción italiana de 1874, Napoles, Librería de B. Perellano, 2ª edición. La 1ª edición, en Gior. Mat. Napoli 5 (1867) 273-320).

[16] Lobachevsky, N. I. Géometrie imaginaire, J. Reine Angew. Math. 17 (1837) 295-320.

[17] Lobachevsky, N. I. Geometría imaginaria y sus aplicaciones al cálculo de algunas integrales (en ruso), Kazan. Traducción alemana en Abh. Gesch. Math. 19 (1904).

[18] Milnor, J. Hyperbolic geometry: the first 150 years, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982) 9-24.

[19] Montesinos-Amilibia, J. M. las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevskii and Bolyai. History of mathematics in the XIXth century, Part 1 (Spanish) (Madrid, 1991), 65.114, Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur., Madrid, 1992.

[20] Montesinos-Amilibia, J. M. La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica. History of mathematics in the XIXth century, Part 2 (Spanish) (Madrid, 1993), 213.232, Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur., Madrid, 1994.

[21] Montesinos-Amilibia, J. M. “El modelo visual de la geometría hiperbólica”. En Contribuciones Matemáticas en honro de José Javier Etayo Miqueo, (1994) 467-482. Editorial Complutense. Madrid.

[22] Poincaré, H. Theorie des groupes fuchsiens, Acta Math.1 (1882) 1-62.

[23] Poincaré, H. Mémoire sur les groupes kleinéens, Acta Math.3 (1883) 49-92.

[24] Rosenfeld, B. A. A history of non-euclidean geometry, Springer Verlag, 1988.

[25] Santaló, L. Geometría Proyectiva, EUDEBA, Buenos Aires, 1966

[26] Stillwell, J. Mathematics and History., Springer Verlag, NY (1989).

[27] Struik, D. J. A concise History of Mathematics. Ed. Dover, NY (1967).

[28] Weeks, J. R. The Shape of Space. Marcel Dekker. NY (1985).