Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 107, Nº. 1-2, pp 43-54, 2014
XVI Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

RAMANUJAN: MATEMÁTICO GENIAL DESDE LA POBREZA EXTREMA.

Manuel López Pellicer

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde, 22. 28004 Madrid.

1. ENTORNO FAMILIAR.

Srinivasa Aiyangar Ramanujan nació en Erode, cerca de Madrás, el 22 de diciembre de 1887. La India luchaba por su independencia desde 1857, mediante revueltas contra los ingleses. El héroe pacifista de la independencia fue Mohandas Karamchand Gandhi[1], héroe pacifista de la independencia de la India, conocido como Mahatma Gandhi, que vivió entre 1869 y 1948. Ramanujan no conoció la independencia de la India, que se produjo el 15 de agosto de 1947.

Su familia era muy pobre, aunque pertenecía a la casta Brahmin, que era una casta alta. Su padre era contable en un comercio de telas de Kumbakonam y su madre, apreciada por su buen criterio derivado de su gran sentido común, era hija de un modesto oficial del juzgado de Erodo. Su abuelo sufrió la lepra.

Figura 1. Srinivasa Aiyangar Ramanujan. 1887-1920.

[1] Desde 1918 perteneció al movimiento nacionalista hindú, utilizó la huelga de hambre como método de lucha social. Influido por León Tolstoi rechazó la lucha armada, predicando la no violencia para vencer al dominio británico, defendiendo la fidelidad a los dictados de la conciencia y el retorno a las tradiciones hinduistas. Su encarcelamiento en varias ocasiones le convirtió en un héroe nacional. En 1944 Gandi y su esposa Kasturba sufrieron arresto domiciliario en el Palacio del Aga Khan, donde ella murió en 1944, mientras que Gandhi realizaba veintiún días de ayuno.

Después de la independencia, Gandhi trató de reformar la sociedad india mediante la integración de las castas más bajas, los shudras o 'esclavos', los parias o 'intocables' y los mlechás o 'bárbaros', y el desarrollo de las zonas rurales. Su defensa de los musulmanes en los conflictos religiosos que siguieron a la independencia de la India, pudo catalizar su asesinato el 30 de enero de 1948 a manos de Nathuram Godse, fanático integracionista hinduista. Antes de morir exclampo "¡Hey, Rama!", signo de su idealismo en la búsqueda de Dios y de la paz en su país. Sus cenizas fueron arrojadas al río Ganges.

Defendió la necesidad de un equilibrio entre trabajo y capital para conseguir la justicia social y el desarrollo económico. Era vegetariano y rechazó el maltrato a cualquier animal.

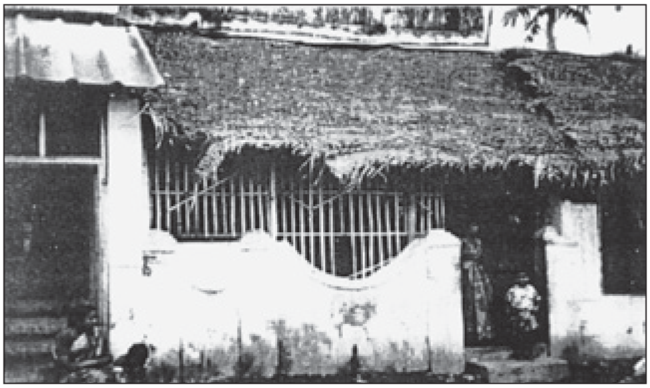


Figura 2. Casa natal de Ramanujan.

2. EL LIBRO SINOPSIS OF ELEMENTARY RESULTS IN PURE MATHEMATICS.

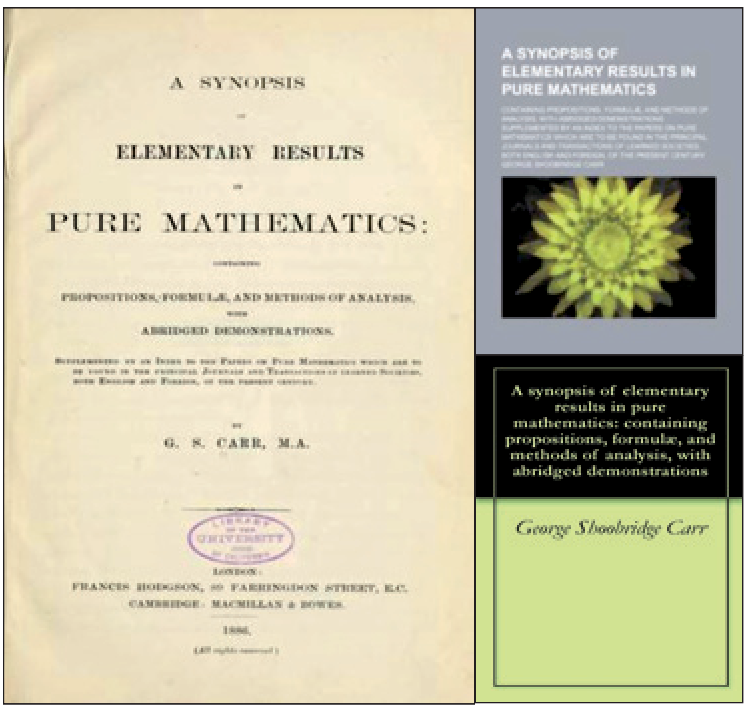
El primer contacto de Ramanujan con la educación fue a los cinco años en una modesta escuela para miembros de su casta. Se sabe que antes de los diez años recitaba a sus compañeros de clase fórmulas matemáticas y muchas cifras del número π. A los once años fue el primer alumno de su distrito en los exámenes de enseñanza primaria y obtuvo una beca para continuar estudios en el instituto local.

Por sus biógrafos indios se sabe que a los doce años dominaba la trigonometría, que a los quince años calculó la longitud de la circunferencia ecuatorial con un error de sólo unos pocos metros y redescubrió la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x$$

que el genial matemático suizo obtuvo y popularizó en 1748[2].

Un amigo de Ramanujan consiguió en la biblioteca local el libro "*A Sinopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*: *Propositions, Formulae and Methods of Analysis with abridged demonstrations*", y se lo entregó a Ramanujan a los 16 años. Consta de 6165 teoremas,



Firgura 3. Varias ediciones del libro de George S. Carr.

[2] Roger Cotes obtuvo en 1714 que $ln(\cos x + i \operatorname{sen} x) = ix$, sin indicar que dicho logaritmo tiene infinitos resultados. Cotes y Euler utilizaron desarrollos en serie en la obtención de su fórmula. Roger Cotes (1682 – 1716) fue un matemático inglés conocido por la fórmula de cuadratura de Newton-Cotes y por haber revisado la segunda edición del Principia de Newton. Fue el primer profesor que ocupó la *Plumian chair of Astronomy and Experimental Philosophy* en la Universidad de Cambridge, desde 1707 hasta su muerte.

casi todos sin demostración y con algunas referencias cruzadas. La sustitución del subtítulo "*with abridged demonstrations*" por "*without demonstrations*" hubiese reflejado mejor el contenido del libro.

El *Sinopsis of Elementary Results in Pure Mathematics* fue escrito en 1880 por George Shoobridge Carr (1837–1914). Era un preparador privado de los exámenes de Matemáticas de Cambridge conocidos como los "*Mathematical Tripos*", en alusión al taburete de tres patas donde se sentaban los estudiantes. Desde su comienzo en 1730, los Tripos consistieron en la resolución de laboriosos problemas de matemáticas durante dos series de cuatro días completos cada una, interrumpidos por una semana de descanso. La calificación en los *Mathematical Tripos* clasificaba a los participantes y, en buena medida, determinaba su futuro profesional[3].

El estilo conciso del libro de Carr influyó mucho en Ramanujan, que se dedicó a probar todos los resultados y las fórmulas del libro, lo que le proporcionó su única formación matemática básica y le abrió un nuevo mundo. Hardy decía que Ramanujan hizo famoso al libro de Carr, pues sin la relación con la formación inicial de Ramanujan nadie se acordaría de la *Sinopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*.

3. EL PASO BREVE DE RAMANUJAN POR LA UNIVERSIDAD.

Ramnujan aprobó los exámenes de ingreso en la Universidad de Madrás, a los diecisiete años y se le concedió una beca por su destreza en matemáticas.

Se dedicó completamente a la resolución de problemas matemáticos, olvidando las demás asignaturas. No superó los exámenes y perdió la beca. Se retiró deprimido unos meses a unas montañas cercanas.

A su regreso no se le permitió continuar en la Universidad y dedicó todo su tiempo a la Matemática durante algo más de dos años, apuntando sus resultados en unos grandes cuadernos, conocidos como *los cuadernos de Ramanujan.*

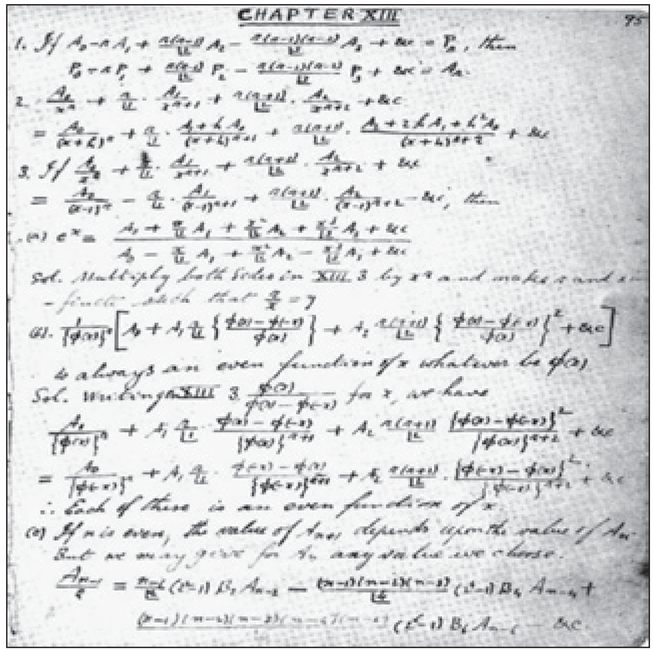


Figura 4. Página de los cuadernos de Ramanujan.

4. LA AYUDA DE RAMACHANDRA RAO.

A los veintidós años, su madre le organizó su boda con una niña de nueve años, de quien era pariente. Tuvo que buscar un trabajo y fracasó en su intento de conseguir un trabajo compatible con su dedicación matemática.

En 1910 visitó a V. Ramaswamy Aiyer, cofundador en 1906[4] de la Sociedad Matemática India, de la que fue su Presidente de 1926 a 1930. Impresionado por las fórmulas de sus cuadernos le recomendó visitar a Ramachandra Rao, también cofundador de la Sociedad Matemática India, siendo su Presidente de 1915 a 1917. Rao, además de culto e inteligente, era rico y muy influyente. Nos dejó el siguiente relato de su primera entrevista con Ramanujan:

[3] La mejor puntuación obtenida en los Mathematical Tripos fue de 16.368 puntos de un total de 33.541 puntos. Se valoraba la rapidez y el número de respuestas correctas. Su valor formativo era cuestionado, pues Bertrand Russell vendió todos los libros de matemáticas de la preparación en cuanto aprobó los Tripos y Godfrey Harold Hardy se sentía entrenado como un caballo de carreras durante la preparación de los Tripos.

[4] La Real Sociedad Matemática Española fue fundada en 1911.

Figura 5. V. Ramaswamy Aiyer.

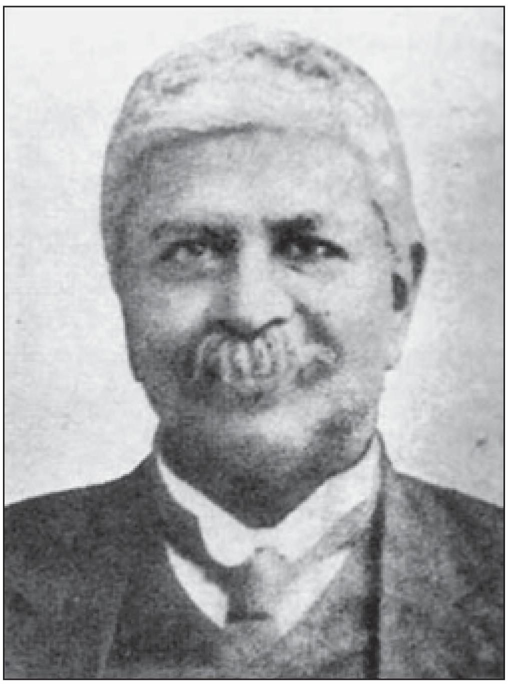


Figura 6. Ramachandra Rao.

"*Una pequeña figura rústica, vigorosa, sin afeitar, desaliñada, con un rasgo llamativo, ojos brillantes, entró con un gastado libro de notas bajo el brazo. Era extremadamente pobre. Había huido de Kumbakonam a Madrás a fin de proseguir sus estudios, pero necesitaba que le suministrara el mínimo vital sin esfuerzo de su parte para poder continuar sus investigaciones.*

Abrió el libro y comenzó a explicar algunos de sus descubrimientos. Al punto vi claramente que era algo fuera de lo corriente, pero mis conocimientos no me permitieron juzgar si hablaba con sentido o sin él. Suspendido todo juicio le pedí que viniera de nuevo y así lo hizo. Apreció debidamente mi ignorancia y me demostró algunos de sus hallazgos más simples. Estos iban más allá de los libros existentes y ya no tuve duda de que era un hombre notable. Después, paso a paso, me inició en las integrales elípticas y en las series hipergeométricas y, finalmente, en su teoría de las series divergentes, no divulgada todavía; me convirtió. Le pregunté que era lo que deseaba. ***Dijo que quería una pequeña pensión para vivir y así proseguir sus investigaciones****.*"

Ramachandra Rao mantuvo a Ramanujan durante un año. Así pudo seguir investigando y, en 1911, publicó su primer artículo sobre los números de Bernoulli en el tercer volumen del *Journal of the Indian Mathematical Society*[5]. Le siguieron otros dos artículos publicados en 1912 en esta misma revista[6], con lo que consiguió ser conocido en la Universidad de Madrás, pero no pudo conseguir ninguna beca.

5. EL PUERTO DE MADRÁS Y NARAYANA IYER.

Como Ramanujan no quería ser mantenido mucho tiempo fue el propio Ramachandra Rao quien le consiguió un humilde empleo en el puerto de Madrás. El salario era mínimo, pero le permitió seguir con su gran dedicación a las matemáticas.

Empezó a trabajar el 1 de marzo de 1912. Entonces S. Narayana Iyer había sido ascendido a Jefe de Con-

[5] *Some properties of Bernoulli's numbers*. Journal of the Indian Mathematical Society, **3** (1911) 219-234.

[6] *On Question* 330 *of Prof. Sanjana*. Journal of the Indian Mathematical Society, **4** (1912), 59-61 y *Note on a set of simultaneous equations*. Journal of the Indian Mathematical Society, **4** (1912), 94-96.

Figura 7. S. Narayana Iyer.

tabilidad del puerto de Madrás. El padre y el abuelo paterno de Narayana Iyer (1874–1937) eran sacerdotes hindúes versados en sánscrito y en los Vedas. La familia era tan pobre que Iyer tuvo que compartir jersey con un hermano mayor en una inspección anual en la escuela. Narayana Iyer pudo estudiar un master en Matemáticas en el Saint Joseph's College en el distrito Trichinopoly en Madrás, donde fue profesor hasta su incorporación al puerto de Madrás en 1900[7]. Narayana Iyer se interesó por el trabajo de Ramanujan, trabajando frecuentemente con Ramanujan después de la jornada laboral en el puerto, lo que le llevó en 1913 a publicar en el Journal of the Indian Mathematical Society el artículo *The distribution of Primes*, dedicado a divulgar resultados obtenidos por Ramanujan[8]. Poco después publicó en la misma revista el artículo *Some theorems in summation*[9].

Algo parecido sucedió con C L T Griffith, professor de Ingeniería Civil en la Escuela de Ingeniería de Madrás que se había formado en el University College de Londres. Al apreciar el valor de la obra de Ramanujan escribió, el 12 de noviembre de 1912 a Micaiah John Muller Hill (1856 – 1929), professor de Matemáticas del University College de Londres, enviándole parte del trabajo de Ramanujan y una copia del artículo de Ramanujan de 1911 *Some properties of Bernoulli's numbers*.

Hill contestó con entusiasmo, reconoció que no entendía algunos resultados de Ramanujan de series divergentes, y le recomendó estudiar el libro *Theory of infinite series* de Bromwich, consejo no seguido por Ramanujan, genio matemático sin interés en la formación, pues desconocía lo que significaba.

Gracias al puerto de Madrás, Ramanujan había conseguido el apoyo de cierta élite intelectual india, pues al conocer su genio comenzaron a apoyarle altos cargos del puerto, tanto indios como ingleses, a quienes los años de estudio habían dejado gran aprecio por las matemáticas.

Así es como el Director General de Observatorios Meteorológicos del Imperio Británico, antiguo alumno y profesor de matemáticas en Cambridge, conoció la historia de Ramanujan cuando visitó Madrás. Bajo su intercesión, la Universidad de Madrás concedió a Ramanujan una beca por dos años, que triplicaba su salario en el puerto. Ramanujan dejó su trabajo y se dedicó totalmente a las matemáticas.

---

[7] Narayana Iyer fue miembro fundador en 1907 del Indian Mathematical Club, convertido poco después en la Indian Mathematical Society, de la que fue Secretario de 1907 a 1910 y Tesorero de 1914 a 1928.

[8] Este artículo comienza así: "*The following results in the theory of numbers have been obtained by Mr. S. Ramanujan of Madras, and are published for the information of mathematicians*."

[9] En el punto 4 de este artículo se lee: "4. *The following theorem is due to Mr. S. Ramanujan, the Mathematics Research Student of the Madras University*

$$\int_0^\infty x^{n-1}\Sigma_{n=0}^\infty (-1)^n \phi(n)\frac{x^n}{n!}\,dx = \Gamma(n)\phi(-n)."$$

Al final del artículo está escrito: "*The theorem of Ramanujan quoted at the beginning of paragraph 4 is his famous Master Theorem*."

6. LA CARTA DE RAMANUJAN A BAKER, HOBSON Y HARDY.

Animado por sus amigos y protectores, el 16 de enero de 1913, Ramanujan, ayudado por Narayana Iyer, escribió una carta comunicando sus resultados a tres profesores de Cambridge, H. F. Baker, E. W. Hobson y Godfrey Harold Hardy. Sólo respondió Hardy, quien, como Baker y Hobson, también tuvo la tentación de romper la carta de Ramanuyan. Por fortuna Hardy comenzó a leerla por la noche del mismo día que la recibió con su amigo y colaborador John Edensor Littlewood, tratando de descifrar la lista de 120 fórmulas y teoremas de Ramanujan. Horas más tarde llegaron a la conclusión de estar ante la obra de un genio. Se reproducen a continuación algunos fragmentos de la carta de Ramanujan:

Figura 8. Godfrey Harold Hardy. 1877-1947.

"*Apreciado señor:*

Me permito presentarme a usted como un oficinista del departamento de cuentas del Port Trust Office de Madrás con un salario de 20 libras anuales solamente. Tengo cerca de 23 años de edad. No he recibido educación universitaria, pero he seguido los cursos de la escuela ordinaria. Una vez dejada la escuela he empleado el tiempo libre de que disponía para trabajar en matemáticas. No he pasado por el proceso regular convencional que se sigue en un curso universitario, pero estoy siguiendo una trayectoria propia. He hecho un estudio detallado de las series divergentes en general y los resultados a que he llegado son calificados como "sorprendentes" por los matemáticos locales...

Yo querría pedirle que repasara los trabajos aquí incluidos. Si usted se convence de que hay alguna cosa de valor me gustaría publicar mis teoremas, ya que soy pobre. No he presentado los cálculos reales ni las expresiones que he adoptado, pero he indicado el proceso que sigo. Debido a mi poca experiencia tendría en gran estima cualquier consejo que usted me hiciera. Pido que me excuse por las molestias que ocasiono.

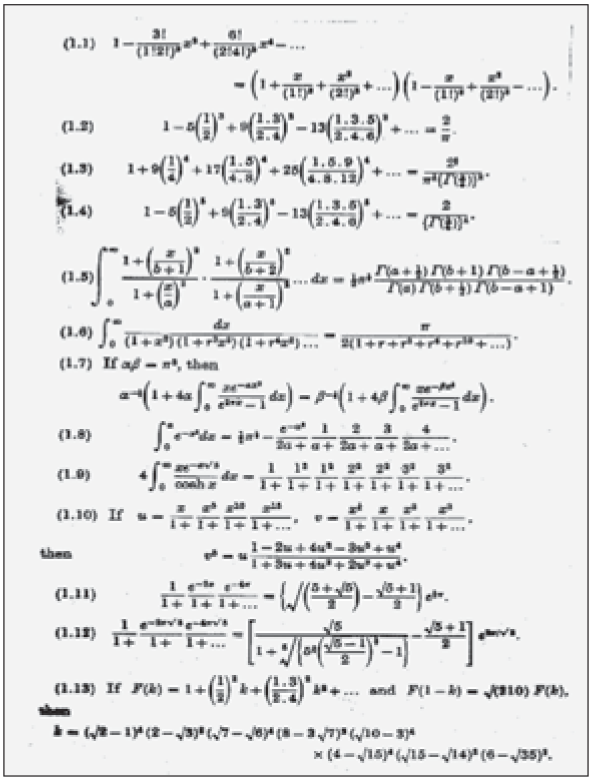
Quedo, apreciado señor, a su entera disposición."

7. LA REACCIÓN DE HARDY ANTE LA CARTA.

"Yo, escribió Hardy, *había probado cosas como (1.7), y (1.8) me resultaba vagamente familiar, de hecho es una fórmula clásica de Laplace, probada por Jacobi; (1.9) aparece en un artículo de Rogers de 1907. Pensé que como experto en integrales definidas probablemente podría probar (1.5) y (1.6), lo hice pero con muchas más dificultades de las que esperaba.*

Las fórmulas (1.1) a (1.4) eran mucho más interesantes y pronto resultó obvio que Ramanujan debía tener teoremas mucho más generales que se estaba reservando. La segunda es una fórmula de Bauer conocida en la teoría de series de Legendre. Los teoremas necesarios para probarlas están en un tratado de Bailey sobre funciones hipergeométricas.

Las fórmulas (1.10) a (1.13) son de nivel muy diferente, y obviamente difíciles y profundas. (1.10) a (1.12) me derrotaron completamente. Nunca había visto nada como ellas. Una simple mirada era suficiente para mostrar que solo podían haber sido escritas por un matemático de la categoría más alta. Debían ser ciertas, puesto que, si no lo fueran, nadie tendría la imaginación para inventarlas"



(1.1) $1-\frac{3!}{(1!2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!4!)^3}x^4-\dots$
$$=\left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\dots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\dots\right).$$

(1.2) $1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3-13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\dots=\frac{2}{\pi}.$

(1.3) $1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1.5}{4.8}\right)^4+25\left(\frac{1.5.9}{4.8.12}\right)^4+\dots=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^2}.$

(1.4) $1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^5-13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^5+\dots=\frac{2}{\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^4}.$

(1.5) $\int_0^\infty \frac{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2}\dots dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+1)\Gamma(b-a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b+\frac{1}{2})\Gamma(b-a+1)}.$

(1.6) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots}=\frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\dots)}.$

(1.7) If $\alpha\beta=\pi^2$, then
$$\alpha^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\alpha\int_0^\infty\frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right)=\beta^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\beta\int_0^\infty\frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right).$$

(1.8) $\int_0^a e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}-\frac{e^{-a^2}}{2a+}\frac{1}{a+}\frac{2}{2a+}\frac{3}{a+}\frac{4}{2a+\dots}.$

(1.9) $4\int_0^\infty\frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}dx=\frac{1}{1+}\frac{1^2}{1+}\frac{1^2}{1+}\frac{2^2}{1+}\frac{2^2}{1+}\frac{3^2}{1+}\frac{3^2}{1+\dots}.$

(1.10) If $u=\frac{x}{1+}\frac{x^5}{1+}\frac{x^{10}}{1+}\frac{x^{15}}{1+\dots}$, $v=\frac{x^{\frac{1}{5}}}{1+}\frac{x}{1+}\frac{x^2}{1+}\frac{x^3}{1+\dots}$,

then $v^5=u\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}.$

(1.11) $\frac{1}{1+}\frac{e^{-2\pi}}{1+}\frac{e^{-4\pi}}{1+\dots}=\left\{\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}e^{\frac{2}{5}\pi}.$

(1.12) $\frac{1}{1+}\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\dots}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{\left\{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1\right\}}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{2\pi/\sqrt{5}}.$

(1.13) If $F(k)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^2+\dots$ and $F(1-k)=\sqrt{(210)}F(k)$,
then
$$k=(\sqrt{2}-1)^4(2-\sqrt{3})^4(\sqrt{7}-\sqrt{6})^4(8-3\sqrt{7})^2(\sqrt{10}-3)^4\times(4-\sqrt{15})^4(\sqrt{15}-\sqrt{14})^2(6-\sqrt{35})^2.$$

Figura 9. Fragmento de la carta de Ramanujan.

Figura 10. John Edensor Littlewood. 1885-1977.

La carta de Ramanujan contenía la afirmación de que disponía de una fórmula que le permitía calcular la cantidad de números primos hasta 100.000.000 "*en general sin ningún error y en algunos casos con un error de* 1 *o de* 2". Hardy respondió a Ramanujan en términos muy positivos, pidiéndole que enviase las demostraciones y detalles sobre la fórmula de los números primos. Mientras tanto Hardy y Littlewood pasaron muchos ratos intentando descifrar otras partes de la carta. Bertrand Rusell escribió a un amigo que "*había encontrado a Hardy y a Littlewood en un estado de gran agitación, porque creían haber encontrado a un segundo Newton, un empleado hindú de Madrás con un estipendio de* 20 *libras al año*".

Al recibir Hardy y Littlewood la segunda carta de Ramanujan se dieron cuenta que había concebido otro de los descubrimientos fundamentales de Riemann en el *Teorema de los números primos*, con el que había perfeccionado la función logaritmo integral de Gauss, $\int_2^N \frac{dx}{\ln x}$, para mejorar la estimación de la cantidad de números primos no mayores que N. Aunque la fórmula de Ramanujan no incluía la aportación de Riemann utilizando los ceros de la función zeta de Riemann, Littlewood exclamó emocionado que *podía creer que Ramanujan era al menos un Jacobi*.

Figura 11. La divinidad hindú Namagari.

La respuesta de Hardy a esta segunda carta fue entusiasta y entre otras cosas escribió que "*haber demostrado lo que usted afirma habría sido la empresa matemática más extraordinaria de toda la historia de la Matemática*". Hardy y Littlewood decidieron hacer todo lo posible para traer a Ramanujan a Cambridge, pues le veían como un hindú pobre y solitario que desconocía la sabiduría intelectual acumulada en Europa, pues en el *Teorema de los números primos*, además de Gauss y Riemann, están las aportaciones de Euler, Legendre, Chebychev, Hadamard y de la Vallée-Poussin. Encargaron a Eric Harold Neville (1889–1961), un profesor del Trynite College de visita en la India, que convenciese a Ramanujan de la conveniencia de unirse al grupo de Hardy y Littlewood.

Figura 12. Ramanujan, al centro, en el Trinity College. Hardy a la derecha.

Narayana Iyer se esforzó al máximo para tratar de convencer a Ramanujan que aceptase la invitación para hacer investigación matemática en Cambridge[10]. También resolvió las cuestiones administrativas con Sir Francis Spring, director del puerto de Madrás, para que Ramanujan dejase su puesto de trabajo.

La entusiasta carta de Hardy abrió todos los resortes de la administración a favor de Ramanujan. La Universidad de Madrás le concedió una beca de 250 libras anuales, el billete de barco para viajar a Inglaterra[11] y dinero para instalarse en Cambridge, donde llegó en 1914, recibiendo del Trinity College otra asignación de 60 libras, gracias al esfuerzo de Hardy. Todo ello le permitió a Ramanujan vivir en Inglaterra y mantener a su familia en la India. Por fin se podía dedicar a la investigación sin ansiedad, comenzando de inmediato su trabajo con Hardy y Littlewood.

8. LA COLABORACIÓN DE RAMANUJAN CON HARDY Y LITTLEWOOD.

Hardy y Littlewood comenzaron a revisar los cuadernos de Ramanujan, donde había mucho más de los 120 teoremas que Ramanujan había enviado a Hardy en sus dos primeras cartas.

Aunque algunos teoremas eran incorrectos y otros ya habían sido descubiertos, Hardy quedó impresionado por el genio de Ramanujan, al que veía como un segundo Euler. Hardy tenía una escala subjetiva de valoración del genio matemático con la que a Ramanujan, David Hilbert, Littlewood y a sí mismo atribuía las calificaciones 100, 80, 30 y 25.

Ramanujan pasó casi cinco años en Cambridge colaborando con Hardy y Littlewood. Hardy y Ramanujan tenían culturas diferentes y estilos de trabajo y creencias opuestos. Hardy era matemático riguroso

[10] En la página 98 del libro *Ramanujan: Essays and Surveys*, del que son editores Bruce C. Berndt y Robert A. Rankin, publicado en 2001 por American Mathematical Society y London Mathematical Society, se lee que Narayana Iyer acompañó a Ramanujan al templo en Namakkal para que Ramanujan pidiese permiso a la divinidad Namagiri para aceptar la invitación de Hardy. Ramanujan afirmaba que Namagiri se le aparecía en visiones y le sugería fórmulas matemáticas que debía probar. Describió una de esas visiones así: "*Mientras dormía tuve una experiencia no usual: Había una pizarra roja formada por sangre que fluía. De repente una mano empezó a escribir en la pizarra varias integrales elípticas que se grabaron en mi mente. En cuanto desperté comencé a escribirlas*."

Sus biógrafos indios dicen que Ramanujan recibía visiones matemáticas en sueños de la divinidad Namagiri y de su esposo Narasimba. También escribieron que su madre se oponía a que viajase a Cambridge, hasta que tuvo un sueño en el que la diosa Namagiri le ordenaba que no pusiese ningún obstáculo entre su hijo y el desarrollo de su vocación.

[11] Ramanujan embarcó el 17 de marzo de 1914 en Madrás y llegó a Londres el 14 de abril. Le esperaba Neville que le llevó a su casa en Chesterton Road en Cambridge. Seis semanas después dejaba la casa de Neville y se trasladó a Whewell's Court, situada a cinco minutos del despacho de Hardy.

con pasión por la demostración y ateo, en tanto que Ramanujan era un matemático totalmente intuitivo y profundamente religioso que afirmaba que "*una ecuación no tenía sentido a menos que represente un pensamiento de Dios*."

Pronto Hardy se percató de las sorprendentes limitaciones en conocimientos de Ramanujan por su nula formación matemática, reducida a resultados anteriores a 1880, año de la publicación del desfasado libro de Carr. Su desconocimiento de las matemáticas modernas europeas era casi completo. Hardy intentó enseñarle, pero pronto comprendió que era imposible hacerlo de forma sistemática, pues Ramanujan desconocía lo que significaba una demostración en Matemáticas. Hardy, además de enseñarle lo que pudo, no ahogó la portentosa intuición de Ramanujan, matemático no ortodoxo que utilizaba métodos concisos y novedosos, pero faltos de claridad y precisión, lo que dificultaba que un lector ordinario pudiese seguirle.

Littlewood también colaboró dando formación a Ramanujan hasta el comienzo de la Guerra Mundial en 1914, que obligó a Littlewood a participar en la contienda. Durante los años siguientes Ramanujan publicó muchos trabajos y dejó muchos resultados escritos sin publicar, gracias a la fructífera colaboración matemática con Hardy, con quien se veía a diario. A título de ejemplo vamos a comentar algunas de sus aportaciones al problema de la partición obtenidas en el artículo *Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n*, publicado en 1917 en los Comptes Rendus.

Una partición de un número natural n es una sucesión decreciente de números naturales cuya suma es n. Por ejemplo, para $n = 4$ se tiene que $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$, por lo que si $p(n)$ es el número de particiones distintas de n, es $p(4) = 5$. A principios del siglo XX, se obtuvo que $p(200) = 3.972.999.029.388$. En el referido artículo de 1917, Ramanujan y Hardy obtuvieron una fórmula asintótica que permitía hallar $p(n)$[12]. Además Ramanujan probó que $p(n)$ es múltiplo de 5, de 7 o de 11 si $n = 5k + 4$, $n = 7k+5$ o $n = 11k+6$, respectivamente[13].

9. HONORES OTORGADOS A RAMANUJAN.

A pesar de su débil salud Ramanujan trabajó mucho en Cambridge y recibió las siguientes distinciones:

- En 1916 Cambridge concedió a Ramanujan el título de Bachelor in Arts, que corresponde al título de licenciado o graduado, por su artículo *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) **14** (1915), 347-409. En esa época no existía el título de Doctor en la Universidad de Cambridge.
- En 1917 fue nombrado miembro de la London Mathematical Society.
- En 1918 se le eligió Fellow de la Royal Society. Fue el segundo hindú[14] que obtuvo esa distinción y el más joven ser Fellow.
- En 1918 fue nombrado Fellow del Trinity College de Cambridge, con un buen sueldo y sin obligaciones. Fue el primer hindú en recibir esa distinción.
- En 1918 la Universidad de Madrás le concedió otra beca y creó para él una cátedra de matemáticas.

[12] La herramienta para aplicar ideas de análisis matemático en el estudio de las particiones proviene de Euler, quien en el siglo XVIII observó que de la igualdad

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

cuando $|x| < 1$ se deduce que

$$(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}\cdots = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots$$

donde el coeficiente de x^n en el producto del segundo miembro es el número de formas de descomponer n como suma de números enteros positivos, es decir $p(n)$.

[13] Un interesante artículo sobre el problema del número de particiones de un número natural se encuentra en el volumen de octubre de 2001 de Notices of the American Mathematical Society.

[14] En 1841 fue nombrado Fellow de la Royal Society el ingeniero hindú Ardaseer Cursetjee (1808-1877) que destacó en la construcción de barcos.

10. ENFERMEDAD DE RAMANUJAN Y LA DOBLE DESCOMPOSICIÓN DE 1729.

Desde 1917 salió poco de los sanatorios antituberculosos pues, probablemente, además de padecer una tuberculosis incurable, sufría una seria deficiencia vitamínica, tal vez ocasionada por su riguroso vegetarianismo y por la falta de ciertas verduras en Inglaterra durante la Primera Guerra Mundial, lo que se unía a su amebiosis, infección intestinal que contrajo en la India.

En los distintos sanatorios y hospitales continuó su actividad matemática, pues como señaló Littlewood, "*cada entero positivo era un amigo personal de Ramanujan*". Las distinciones recibidas de la London Mathematical Society, la Royal Society y el Trinity College de Cambridge fueron estímulos a su constante actividad matemática.

Hardy le visitó en un hospital en Putney, cerca de Londres. Le encontró muy enfermo y no sabiendo que decir le comentó que había viajado en el taxi cuya matrícula era el insípido número 1729, a lo que Ramanujan contestó:

"*No diga usted eso. El número 1729 es muy interesante, pues es el número más pequeño expresable como suma de dos cubos de dos maneras diferentes, ya que* $1729 = 10^3 + 9^3$ *y también* $1729 = 12^3 + 1^3$."

Hardy, asombrado, le preguntó si conocía la respuesta al problema correspondiente para la cuarta potencia y él replicó, después de unos momentos de reflexión, que "*el ejemplo que pedía no era obvio y que el primero de tales números debía ser muy grande*".

11. FALLECIMIENTO E IMPACTO DE RAMANUJAN.

El clima húmedo de Inglaterra no favorecía la mejoría de su tuberculosis, por lo que a principios de 1919 regresó muy enfermo a Madrás, buscando un clima más seco. El recibimiento en Madrás fue impresionante, se le regaló el mejor tratamiento médico posible, con todos los gastos pagados, y una buena casa donde pasar el final de su enfermedad. Falleció el 26 de abril de 1920 en Madrás a los treinta y tres años, con una gran reputación científica, consecuencia de sus resultados en teoría de números. Narayana Iyer, tal vez el mejor amigo hindú de Ramanujan, ofreció su casa a los padres de Ramanujan, donde el padre de Ramanujan falleció también en 1920.

Figura 13. Sello del 75 aniversario del nacimiento de Ramanujan.

El impacto de Ramanujan en las matemáticas y en la India ha sido grande. Un ejemplo de su influen-

Figura 14. Busto de Ramanujan.

cia en Matemáticas la encontramos en Pierre Deligne, medalla Fields en 1978 por su demostración en 1974 de la tercera y última conjetura de André Weil, que confirmó la célebre conjetura de Ramanujan de 1916 sobre la acotación de los coeficientes de Fourier $\tau(n)$ de la forma cúspide $\Delta(z)$ de peso 12 definida en la teoría de formas modulares, así como el caso $\kappa\neq 1$ de la conjetura más general de Ramanujan-Peterson, formulada por Hans Peterson en 1930 para otras formas modulares. La demostración del caso $\kappa=1$ fue obtenida por Pierre Deligne y Jean-Pierre Serre en el artículo *Formes modulaires de poids 1,* Ann. Sci. École Norm. Sup. **7** (1974), 507-530.

El papel de Ramanujan en la formación de la conciencia nacional India también ha sido muy destacado. En el setenta y cinco aniversario de su nacimiento salió un sello conmemorativo del que se vendieron varios millones de copias el primer día (Figura 13). Del primer ministro Nehru, uno de los líderes de la independencia nacional, son estas palabras sobre Ramanujan:

"*La breve vida y la muerte de Ramanujan son simbólicas de las condiciones de la India. De nuestros muchos millones de habitantes son pocos los que consiguen alguna educación; y son muchos los que viven al filo de la muerte por inanición... Si la vida les abriese sus puertas y les ofreciese comida, condiciones higiénicas de vida, educación y oportunidades de crecimiento*, ¿*cuántos de estos millones serían científicos eminentes, educadores, técnicos, industriales, escritores y artistas, ayudando a construir una nueva India y un nuevo mundo*?".

REFERENCIAS

1. G. E. Andrews, *An introduction to Ramanujan's 'lost' notebook*. Amer. Math. Monthly **86** (1979), 89-108.
2. Biography in Encyclopaedia Britannica. http://www.britannica.com/eb/article-9062575/Srinivasa-Ramanujan.
3. B. C. Berndt and S. Bhargava, *Ramanujan - For lowbrows*. Amer. Math. Monthly **100** (1993), 644-656.
4. B. C. Berndt and R. A. Rankin, *Ramanujan: Letters and commentary*. History of Mathematics, Volume **9**. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1995.
5. B. Bollobas, *Ramanujan - a glimpse of his life and his mathematics*. Eureka **48** (1988), 81-98.
6. G. H. Hardy, *Srinivasa Ramanujan*. Proc. London Math, Soc. **19** (1921), XL-LVIII.
7. G. H. Hardy, *The Indian mathematician Ramanujan*. Amer. Math. Monthly **44** (3) (1937), 137-155.
8. G. H. Hardy, *Ramanujan. Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*. Cambridge University Press, London, 1940.
9. G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar and B.M. Wilson, *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, Chelsea Publications, Providence, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.
10. R Kanigel, *The man who knew infinity: A life of the genius Ramanujan*. Rupa & Company, New York, 1992.
11. J. N. Kapur, editor, *Some eminent Indian mathematicians of the twentieth century*. Mathematical Sciences Trust Society, 1983.
12. E. H. Neville, *Srinivasa Ramanujan*. Nature **149** (1942), 292-294.
13. R. Ramachandra Rao, *In memoriam S. Ramanujan*. J. Indian Math. Soc. **12** (1920), 87-90.
14. R. A. Rankin, *Ramanujan's manuscripts and notebooks*. Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 81-97.
15. R. A. Rankin, *Ramanujan as a patient*. Proc. Indian Ac. Sci. **93** (1984), 79-100.
16. R. A. Rankin, *Ramanujan's manuscripts and notebooks* II. Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 351-365.
17. D. A. B. Young, *Ramanujan's illness*. Notes and Records of the Royal Society of London **48** (1994), 107-119.