REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADÉMICO 2018-2019

LEÍDO EN LA SESIÓN CELEBRADA EL DÍA 24 DE OCTUBRE DE 2018
POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. JESÚS MARÍA SANZ SERNA

SOBRE EL TEMA

UN PEQUEÑO ELOGIO DE LA CIENCIA PEQUEÑA

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22 - TELÉFONO 917 014 230
www.rac.es
2018

La publicación impresa de este discurso inaugural ha sido posible gracias a:

Fundación BBVA

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Excelentísimas Señoras Académicas, Excelentísimos Señores Académicos, Señoras y Señores:

"Observación y cálculo" es el lema de esta casa[1] y me gustaría empezar este discurso hablando del cálculo. El sustantivo latino *calx, calcis* quiere decir piedra caliza; de él proviene el castellano *cal*. Su diminutivo *calculus,* por tanto, significa piedrecilla y todavía hoy hablamos de *cálculos* renales o biliares y, por cierto, sobre los renales volveremos en breve. Para llevar a cabo sus sumas y restas, los romanos se ayudaban, a modo de ábaco, de piedrecillas; de ahí, por metonimia, las operaciones aritméticas pasaron a llamarse cálculos. Los usos matemáticos de la palabra cálculo no han dejado de extenderse en los últimos siglos y hoy hablamos del cálculo estocástico de Ito (1915-2008), del de Malliavin (1925-2010), del cálculo funcional holomorfo, y de muchísimos otros, cada vez más subidos y complicados. El lugar de honor en esta panoplia lo ocupa, claro, el cálculo infinitesimal de Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716), quizá la más notable creación de la mente humana[2]. Quiero que veamos en estos múltiples usos del término cálculo, partiendo de la humildad del ábaco, una metáfora de la amplitud de la ciencia matemática, que de modo sostenido incorpora a su seno nuevos métodos, cada vez más profundos, y nuevos problemas, cada vez más complejos y arduos, y, a diferencia de otras ciencias, lo hace sin destruir ni lo elemental ni lo antiguo, por más que lo añejo nos vaya pareciendo cada vez menos digno de llamarse ciencia.

En lo que sigue, voy a utilizar la expresión *matemática pequeña* para designar las partes más sencillas y, si se quiere, superficiales de nuestra disciplina[3], mientras que por *matemática grande* querré indicar las partes más complicadas y profundas. De la misma manera, se podría hablar de una química pequeña y otra grande, una biología pequeña y otra grande, y, en general, de ciencia pequeña y grande.

No se me oculta que grande y pequeño no son categorías estancas en que dividir las cosas. Al contrario, la ciencia es un continuo que comprende sin cesuras desde lo más pequeño a lo más grande. Si dividiéramos la matemática en su mitad menor y su mitad mayor, cada una de las porciones resultantes tendría un extremo pequeño y otro grande, del mismo modo que, al partir en dos una barra imantada, cada fragmento tiene su polo norte y su polo sur. Y tampoco me olvido de que lo grande de hoy parecerá acaso pequeño dentro de cincuenta años.

---

[1] Sobre los orígenes del lema puede consultarse el discurso inaugural del año académico 2009-2010: "Observación y Cálculo: los comienzos de la Real Academia de Ciencias y sus primeros correspondientes extranjeros", por D. Jesús Ildefonso Díaz Díaz.

[2] Es bien sabido que en los países de lengua inglesa *calculus*, sin más, quiere decir cálculo infinitesimal.

[3] Entenderé matemáticas en el sentido más amplio posible de ciencias matemáticas, incluyendo la estadística, la investigación operativa, etc.

Ni que decir tiene que son siempre de ciencia grande las lecciones pronunciadas en esta sala. Es conveniente que así sea; es lo que se espera de nosotros. Sin embargo hoy quiero alejarme de esta práctica constante y dedicar mi pequeño discurso a las pequeñas matemáticas. Tal vez aquellos menos aficionados a nuestra ciencia agradecerán mi decisión, aunque con ella desobedezca yo a Gracián (1601-1658), quien nos recomendó[4] que "siempre se ha de mostrar uno más sabio y prudente de lo que requiere aquel con quien trata", pues "será celebrado cuando no fuere entendido". Imploro la benevolencia de todos ustedes al juzgar este discurso y compararlo con los otros, mucho más autorizados, con que esta Academia ha ido jalonando el comienzo de sus años académicos. Me daré por satisfecho si mis palabras llevan a ustedes a pensar, un poco más de lo que con toda seguridad ya lo hacen, sobre la cultura científica y la enseñanza y divulgación de la ciencia.

2. MATEMÁTICAS PEQUEÑAS

Comencemos pues una pequeña gira por la matemática pequeña.

2.1 Progresiones geométricas

Aha Bar Hanina, un caritativo rabino, ha dejado escrito en el Talmud[5] que quien visita a un enfermo le quita la sexagésima parte de su enfermedad. Otros rabinos se quejaron de que ello no puede ser cierto, pues, de serlo, bastaría con recibir sesenta visitas para sanar del todo. Pero él les hizo observar que el segundo visitante quita un sexagésimo… *de la enfermedad que dejó el primero*. Un cálculo inmediato revela que, de acuerdo con la máxima, sesenta visitantes dejan todavía el *36%* de la enfermedad original[6]. Los rabinos discordantes ilustran la dificultad con la que las progresiones geométricas son entendidas por nuestras mentes, que con frecuencia las asimilan a las aritméticas. O, en otras palabras, ilustran nuestra dificultad[7] para comprender el crecimiento exponencial, al que solemos asimilar al lineal.

---

[4] "Oráculo manual y arte de prudencia", #253. En el mismo sentido Montaigne escribe en sus Ensayos "Hay caracteres … a los cuales la comprensión les produce desdén, que me valorarán más porque no sabrán lo que digo; concluirán la hondura de mi sentido por la oscuridad, a la cual hablando en serio odio sobremanera". (Libro III, Capítulo IX.)

[5] Tratado Nedarim 39b. Estoy en deuda con mi amigo Arieh Iserles (Cambridge) por localizarme la referencia exacta dentro del Talmud.

[6] $(59/60)^{60}$ es aproximadamente 0.36.

[7] Un estudio del Banco de España, realizado por Olympia Bover, Laura Hospido y Ernesto Villanueva encuentra que, frente a una sencillísima pregunta sobre el interés compuesto, el 39% de los españoles con estudios primarios dan la respuesta correcta, el 42% dan una respuesta errónea y 19% afirman no conocer la respuesta. Para nuestros compatriotas con formación universitaria los porcentajes son respectivamente 53, 42 y 2. La universidad y los estudios secundarios sólo hacen subir el porcentaje de respuestas correctas del 39 al 53, lo cual es tal vez preocupante. Llama la atención que la educación parezca reducir del 19 al 2% el número de personas que son conscientes de su ignorancia en este punto y capaces de confesarla. ¿No debería enseñarnos la universidad a reconocer los límites de nuestra ignorancia? Montaigne opinaba que "todos los engaños del mundo se producen porque nos enseñan a tener miedo a reconocer nuestra ignorancia" (Ensayos, Libro III, Capítulo XI).

Claro que aquí uso crecimiento exponencial en el sentido matemático del término (crecimiento en el que, en un intervalo de tiempo de duración dada, la magnitud que se estudia se multiplica un factor constante). Esto es distinto del sentido de crecimiento rápido o violento que ahora le dan los periódicos. El uso periodístico se origina, sin duda, del hecho de que cualquier crecimiento exponencial, por baja que sea su tasa, o lo que es lo mismo cualquier progresión geométrica creciente, por próxima que sea su razón a la unidad, acaba dando lugar a números astronómicamente grandes. El ejemplo mejor conocido es el del inventor del ajedrez, que pidió en pago un grano de trigo por el primer escaque del tablero, dos por el segundo, cuatro por el tercero, etc. Así por el último escaque habría que darle 2^{63} granos, que vienen a pesar unos *737* mil millones de toneladas. Este sencillo apólogo nos abre la mente a las reacciones en cadena y a lo que Bellman (1920-1984) llamó *la maldición de la dimensión*[8], es decir la inutilidad de todos aquellos algoritmos cuya complejidad computacional se incrementa exponencialmente al crecer el número de variables o parámetros[9]. Euler (1707-1783) se preguntó que, si sólo la familia de Noé sobrevivió al diluvio, era verosímil que doscientos años después la población del mundo alcanzara el millón de habitantes[10] y concluyó que para ello era suficiente que la tasa de crecimiento fuese de un modesto dieciseisavo anual. Comentó que, creciendo a ese ritmo, cuatrocientos años tras el diluvio la población sería de unos *167* mil millones de personas, "a cuyo sustento no fuera capaz en modo alguno el orbe entero de la tierra". Al mismo orden de fenómenos corresponde el llamado *el mundo es un pañuelo*[11] (small world), la observación de que, elegidos dos seres humanos cualesquiera sobre el planeta, se les puede unir mediante una cadena de personas en que cada una conoce a la siguiente de modo que, como mucho, se necesitan seis intermediarios en la cadena. Otro ejemplo bien conocido lo proporcionan las estafas piramidales.

Una característica del crecimiento exponencial que para determinadas personas es particularmente difícil de apreciar es la dependencia no lineal de la tasa de crecimiento. Alberto coloca *1000* euros a diez años a interés simple del *4%* anual. Le corresponden *400* de intereses. Si, en vez de eso, la tasa se duplicase hasta el *8%* anual, los réditos también se duplicarían pasando a los *800*. Y una nueva duplicación hasta el *16%* le supondría *1,600* euros de intereses; los intereses son función lineal de la tasa. Bárbara hace una operación análoga pero a interés compuesto, añadiendo anualmente el interés al capital. Con tasas del *4*, *8 y 16%* sus réditos son *480, 1159* y *3411* euros respectivamente. Al pasar del *4%* a *16%* la tasa se multiplica por cuatro y los réditos lo hacen por más de siete. El ejemplo de Alberto y Bárbara es puramente académico, pero entenderlo bien nos hará apreciar las implicaciones para los países en desarrollo de los incrementos en la tasa de natalidad.

8 Wikipedia: "Curse of dimensionality".

9 En el Apéndice B veremos que algunos de estos algoritmos inútiles reciben amplia e indebida atención en la enseñanza preuniversitaria española.

10 Véase el Ejemplo III del Capítulo VI (De cantidades exponenciales y logaritmos) de la "Introductio in Analysin Infinitorum", del que hay edición bilingüe por la Real Sociedad Matemática Española. Los libros de Euler suministran un ejemplo perfecto de cómo llegar a la matemática grande a través de la pequeña.

11 Puede consultarse "Small world experiment" in Wikipedia. El experimento original se concibió y llevó a cabo por el psicólogo social Stanley Milgram (1933-1984), conocido también por sus impactantes experimentos sobre la obediencia, que prueban que, cuando se lo ordena la autoridad, son mayoría las personas que no vacilan en infligir crueles daños a otras.

O, correlativamente, las consecuencias para las sociedades que envejecen de los decrementos de tal tasa. La dependencia no lineal se exacerba en los problemas de amortización de deudas, algo que todos deberían considerar antes de contraerlas.

2.2 Lo absoluto y lo relativo

Donde comen ocho comen nueve, he oído decir más de una vez ante la llegada, a la hora del almuerzo, de un visitante inesperado. Esta frase cortés se corresponde con el hecho de que la diferencia entre un octavo y un noveno, es decir un setentaidosavo, es muy pequeña comparándola con el octavo que correspondía inicialmente a cada comensal. En términos más matemáticos, la diferencia entre $1/n$ y $1/(n+1)$ se comporta como $1/n^2$ y por tanto, al crecer el número de comensales originales, la pérdida *relativa* $(1/n^2)/(1/n)= 1/n$ de cada uno tiende a cero. También podemos pensar que, como la magnitud de la derivada de la función $1/x$ es el cuadrado de la propia función, cuando x es grande la función experimenta incrementos relativos despreciables al incrementar moderadamente x. Y lo contrario (grandes incrementos relativos) ocurre cuando x toma valores pequeños. El día que comencé a redactar este discurso, un diario nacional nos informaba de la existencia en España de dos municipios próximos tales que, en cuestión de años, uno había visto dividirse por tres su población mientras otro la había duplicado: enormes cambios relativos. El hecho no tiene nada de sorprendente. Se trataba de pequeñas localidades de la provincia de Guadalajara y, en efecto, cuando se pierden *20* personas se pierden las dos terceras partes siempre que la población original sea *30*.

El elegir manejar cifras absolutas o relativas para servir a los propios fines es una de las herramientas propagandísticas que más utilizan publicistas y políticos. Oímos: este año las ventas de tal o cual producto han aumentado un *50%*, las exportaciones de nuestra empresa se han duplicado recientemente, hemos construido el triple de infraestructuras que el ejercicio anterior. Debemos acaso inferir: el año pasado apenas vendimos, estamos empezando a exportar, el ejercicio anterior la inversión en infraestructuras fue despreciable. El alcalde de una gran ciudad siempre dará cifras absolutas para lo bueno y relativas para lo malo.

Este recurso se suele completar con el de transmitir información referida no a la magnitud de interés sino a una de sus derivadas. Si el paro es exorbitado, no demos la cifra de desempleados, limitándonos a comentar que ha bajado el *2%*. Y, si ni siquiera la derivada primera nos es favorable, anunciemos que la tasa a la que aumenta el paro está descendiendo.

2.3 Gráficos

Los gráficos ofrecen amplio campo de acción al propagandista. Si deseamos resaltar la buena marcha del turismo en nuestra región, no se nos olvidará incluir un mapa en que representemos las cantidades de turistas por círculos de *radios* proporcionales al número de visitantes. Así una ventaja del *20%* se visualizará como si fuera casi del *50%*. Es también bien conocida la trampa de truncar el eje vertical de los histogramas para que, por ejemplo, una pequeña mejora de la cuenta de resultados parezca un salto ciclópeo.

2.4 Probabilidades

El cálculo de probabilidades posee una parte elemental de notable interés público. Hace años afirmaba un periódico que las mujeres mayores no tenían riesgo especial de alumbrar hijos con síndrome de Down. Apoyaba el aserto citando el pequeñísimo porcentaje de personas con el síndrome que nacen de madre mayor de 40 años. Por supuesto, esa probabilidad no dice nada, es simplemente consecuencia del bajo número de bebés nacidos de madre mayor. Lo relevante hubiese sido conocer la probabilidad de síndrome en el bebé condicionada a madre mayor, no la probabilidad de madre mayor condicionada a síndrome de Down, que era la que se proporcionaba. Los ejemplos podrían multiplicarse *ad infinitum*. Creo que muchos conocerán los estudios de Kahneman (1934-) y sus colaboradores sobre las dificultades que nuestra mente tiene a la hora de entender las cuestiones de la vida cotidiana en que la probabilidad juega un papel.

2.5 La paradoja de Simpson

Al compararse dos posibles tratamientos *A* y *B* de los cálculos renales, se encontró que *A* fue efectivo en *273* de los *350* pacientes de un grupo y *B* en *289* de un segundo grupo de *350*. Es decir, en términos relativos, *A* fue efectivo en *78* de cada *100* casos y *B* en *83* de cada *100*. ¿Concluiremos que *B* es mejor que *A* dada su mayor tasa de éxito? En absoluto. En cálculos pequeños, *A* fue efectivo en el *93%* de los casos y *B* sólo en el *87%*. Para los grandes, *A* fue efectivo en el *73%* y *B* sólo en el *69%*, de modo que *A* es mejor que *B* en ambos tipos. Tanto si su piedra es grande como si es pequeña, el paciente preferirá *A*. Este es un ejemplo de la llamada paradoja de Simpson (1922-). La aparente contradicción se explica porque el tratamiento *B* se ensayó sobre todo en cálculos pequeños, fáciles de tratar, y *A* sobre todo en los más difíciles cálculos grandes[12]. La paradoja de Simpson aparece una y otra vez: un caso bien conocido se refiere a la supuesta discriminación por género de la admisión de alumnos a la Universidad de California en Berkeley[13].

2.6 El razonamiento matemático

La vetusta geometría euclídea, hoy considerada cosa muy menor y de muchos olvidada, se mantuvo durante siglos en los planes de estudio por su carácter formativo. “Las tres mediatrices[14] de un triángulo se cortan en un punto”. Este es un aserto *no obvio* que sorprende la primera vez que se oye. No obstante entender la demostración no es difícil incluso para

[12] Se trata de correlacionar una variable dependiente (éxito del tratamiento) con una independiente (tipo de tratamiento aplicado) en presencia de una variable *confundente*: el tamaño del cálculo. La variable confundente puede permanecer oculta al analista y ejerce influencia *causal* sobre la dependiente y la independiente (el mayor tamaño de la piedra hace más difícil el buen éxito del tratamiento y también aumenta la tendencia del médico a prescribir el tratamiento más caro, complejo y eficaz). Este tipo de consideraciones es ubicuo en la estadística.

[13] Pueden verse los detalles en Wikipedia “Simpson paradox”.

[14] Perpendiculares a los lados en los puntos medios de los mismos.

un niño de pocos años. Esto prueba que en las matemáticas más pequeñas ya se puede dar el pensamiento matemático en toda su plenitud y, en especial, la idea de demostración.

John Edensor Littlewood (1885-1977), uno de los matemáticos ingleses más eminentes del pasado siglo, recogió en un curioso libro llamado Miscelánea[15] una mezcla sorprendente de reflexiones, anécdotas de la vida en Cambridge, teoremas y problemas. La obra comienza presentando 19 fragmentos matemáticos no triviales que pueden explicarse a profanos. ¿Cuál es, a juicio de Littlewood, el más notable de los 19? Tras considerar y descartar la candidatura de la demostración de Euclides (hacia 300 AdC) de la existencia de infinitos números primos, se decide por el siguiente acertijo, que debió de circular en la sociedad de la época. En un coche de ferrocarril que acaba de salir de un túnel en el que se ha llenado de humo, tres señoras, *A*, *B*, *C,* tienen las caras tiznadas de carbonilla y las tres se están riendo. De pronto, *A* se pregunta ¿cómo no se dará cuenta *B* de que *C* se está riendo de ella? E inmediatamente concluye que, con toda seguridad, ella misma, *A*, está también tiznada. Encontramos aquí un razonamiento por reducción al absurdo. Si yo, *A*, no estuviera tiznada, *B* pensaría que, si ella, *B,* no estuviera tiznada, *C* no tendría motivos para reírse. Así *B* sabría que ella misma y *C* están tiznadas y *A* no, con lo que *B* no se reiría. Como *B* se ríe, yo estoy manchada. Littlewood presenta una generalización a *n* señoras tiznadas, en la que además de la reducción al absurdo hay que emplear inducción, otra de las herramientas básicas de la matemática.

También algunos problemas de aritmética contribuyen a desarrollar el pensamiento. En mi generación, era típico en la llamada reválida elemental el problema llamado de los grifos. Un grifo llena un depósito en dos horas; un segundo grifo lo hace en tres ¿cuánto tarda el depósito en llenarse si se abren ambos de modo simultáneo? Este problema estaba considerado difícil en aquellas épocas. Muchos alumnos concluyen que, como los grifos *suman* sus contribuciones, el resultado debe ser la *suma* de dos más tres horas, o sea cinco horas, lo que manifiestamente es incorrecto. El problema carece de cualquier relevancia para la vida cotidiana, pero enseña a pensar: ¿cuál es la magnitud que se suma al abrir simultáneamente los grifos[16]? Otro muy viejo problema considerado difícil porque algunos se apresuran a dar una respuesta claramente errónea es el siguiente: una botella y su tapón cuestan una peseta y diez céntimos y la botella vale una peseta más que el tapón ¿cuánto vale cada cosa? La respuesta más común es que la botella cuesta una peseta y el tapón diez céntimos, pero esta no puede ser la solución pues entonces la botella sólo costaría *90* céntimos más que el tapón[17].

---

[15] "Littlewood's Miscellany, Edited by Béla Bollobas", Cambridge University Press, Cambridge, 1986. La obra se publicó por primera vez en 1953.

[16] Entender el problema de los grifos hace trivial encontrar las fórmulas para hallar la resistencia combinada de un sistema de resistores en paralelo o la capacidad de un sistema de capacitores en serie.

[17] Este problema, que en los EE.UU. se formula con un bate de béisbol y una pelota, ha dado pie a serias investigaciones en psicología, ver http://www.relativelyinteresting.com/the-bat-and-a-ball-problem/

3. LA MATEMÁTICA PEQUEÑA EN LA ENSEÑANZA

Creo innecesario añadir más ejemplos como los que vengo presentando y me pregunto: ¿posee hoy algún valor la matemática de este tipo? ¿Debemos olvidarnos de ella, concentrándonos sólo en las partes más grandes de esta ciencia?

En mi opinión, algunas de las cuestiones que he mencionado deberían encontrar un sitio en la enseñanza de las matemáticas en las etapas comprendidas entre la primaria y la universidad. Para simplificar, en todo lo que sigue llamaré, con evidente falta de precisión, enseñanza secundaria a ese periodo, que incluye el actual bachillerato y otras cosas.

Solemos oír que hay que estudiar matemáticas en la secundaria tanto por el papel que ellas desempeñan en la formación del pensamiento abstracto como por su carácter instrumental. A continuación hablaré de estos dos aspectos de modo sucesivo.

3.1 Aspectos formativos

El valor formativo se aduce siempre como argumento para dotar a las matemáticas de una presencia grande en los planes de estudios. Sin embargo, lamento tener que decir que, por desgracia, en la práctica, en las aulas se hace poco para que los alumnos de secundaria se valgan de la matemática para mejorar su forma de razonar.

Retrotrayéndome a mi propia generación, habrá que recordar el tedio de multiplicar mediante tablas de logaritmos, dividir polinomios, simplificar o racionalizar largas expresiones algebraicas, y derivar complicadísimas funciones artificiosas (que luego jamás hemos vuelto a encontrar en nuestro trabajo científico). Ciertamente para el que va a usar las matemáticas es importante saber operar con soltura y sin errores; pero ello no enseña a razonar. Por suerte, aparecían también cuestiones que obligaban a pensar, en especial problemas de geometría euclídea y aritmética, que podemos ejemplificar con los casos sencillos de las mediatrices y los grifos de los que hablé antes. Como suele ocurrir en la enseñanza, la oportunidad brindada por esas cuestiones era aprovechada en mayor o menor medida de acuerdo con la aptitud del profesor. Los problemas de aritmética eran reducidos por algunos a un elenco cerrado de problemas tipo y, con frecuencia, se perseguía[18] el objetivo de que los alumnos aprendieran de memoria una receta para cada tipo. Así, para el problema de los grifos había que memorizar que no se sumaban los tiempos sino los inversos. De esta forma lo que inicialmente presentaba cierto interés conceptual se volvía un mero ejercicio rutinario de suma de fracciones. En el caso de la geometría (sintética) tal reducción a problemas modelo era más difícil o tal vez imposible.

[18] Un reciente estudio
https://m3challenge.siam.org/newsroom/lack-confidence-biggest-stumbling-block-performing-well-math-national-survey-high-school
muestra que el factor más importante para que los alumnos de secundaria aprendan matemáticas es que renuncien a memorizar fórmulas y dediquen tiempo suficiente a *entender*.

Si seguimos la evolución de la enseñanza secundaria en España veremos cómo, cada vez más, se han ido potenciando los aspectos más rutinarios y mecánicos en detrimento del razonamiento. Con frecuencia todo lo que hoy se espera en la asignatura de matemáticas del alumno de secundaria es que aprenda una serie de reglas de manipulación de símbolos y las aplique de modo ciego[19]. Eso puede serle útil para hacerse persona disciplinada u ordenada, pero nunca creativa o crítica. De los programas han ido desaparecido los contenidos, a veces muy sencillos, que servían para desarrollar el pensamiento lógico, muy singularmente los de geometría euclídea. Como consecuencia, no es por desgracia infrecuente encontrarnos hoy con alumnos universitarios de matemáticas, incluso en casos extremos en el posgrado, que desconocen la idea de demostración o que no se dan cuenta de que de "*A* implica *B*" no permite concluir que "no *A* implica no *B*".

No es este el momento de analizar las causas de la evolución de los programas de estudio de matemáticas en la secundaria. Sin duda un motor de los cambios fue el énfasis en el rigor y la generalidad ligado al enfoque formalista y estructuralista de la cultura matemática en los años posteriores a la segunda guerra mundial. Ese enfoque, a menudo asociado con nombre de Bourbaki, tenía su origen en la imperiosa necesidad de superar la crisis de fundamentos del cambio siglo. Es debatible hasta qué punto el nuevo estilo debía haber alterado los planes de estudio en las licenciaturas universitarias en matemáticas. Lo cierto es que ocupó un lugar preeminente, ya perdido hoy, en dichos planes, y no sólo eso, sino que de modo muy deliberado se le hizo percolar hacia la enseñanza secundaria e incluso primaria, donde carecía totalmente de sentido. Por razones evidentes, lo que de desarrollos muy profundos llegó a estos niveles inferiores sólo pudo ser un cúmulo pedante de nuevos términos y notaciones, totalmente ayunos de contenidos e ideas reales, la llamada *matemática moderna*[20]. Entre sus primeros efectos estuvo el de acabar con la geometría[21] y con otros contenidos muy formativos. Los excesos mayores de estas corrientes se eliminaron de la secundaria hace años, pero muchos de los elementos suprimidos ni se han reinstaurado, ni han sido reemplazados por otros más modernos que puedan jugar un papel educativo similar.

De manera paralela a la evolución de los programas, hemos asistido a otro cambio importante. Los *problemas* han ido desapareciendo de la enseñanza secundaria, viéndose reemplazados por *ejercicios*. Problemas y ejercicios son igualmente imprescindibles en el aprendizaje matemático. Estos términos deben poseer en matemáticas el mismo significado que en la vida cotidiana. Con los problemas nos preocupamos, de los ejercicios nos ocupamos. Pasear una hora es un recomendable ejercicio, pero no es un problema para una persona joven, sana y con tiempo libre. El que llega a la estación cuando el último tren ha salido y no puede

[19] Esta afirmación se justifica en los apéndices.

[20] Pueden verse muchos comentarios críticos en la curiosa obra "La Sinfonía del Infinito", Ediciones de la Universidad de Salamanca, Salamanca, 1981, de D. Norberto Cuesta Dutari (1907-1989), quien fue académico correspondiente desde 1970.

[21] J. Dieudonné (1906-1992), uno de los fundadores del grupo Bourbaki, llegó incluso a lanzar el lamentable lema "abajo Euclides". En el prólogo de su libro "Foundations of Modern Analysis" (versión castellana "Fundamentos de Análisis Moderno", Editorial Reverté SA, Barcelona, 1966) el autor escribe "la generalidad deseada exige una estricta aplicación de los métodos axiomáticos, sin hacer ninguna llamada a la 'intuición geométrica'… lo que ha movido a evitar toda representación gráfica en este libro".

volver a casa tiene un problema que deberá pensar cómo resolver. Del mismo modo, aplicar las reglas que permiten determinar para qué valores de un parámetro un sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas tiene solución única es un ejercicio, tal vez útil en determinadas circunstancias, pero no es un problema, por más que lo califiquemos de tal en nuestro bachillerato[22].

¿Cuáles son las razones por las que se han abandonado los problemas? En mi opinión ante todo hay una psicológica: en la medida que una cuestión sea realmente problemática, cabe la posibilidad de que un alumno dado no sea capaz de resolverla o no la resuelva bien, y esto naturalmente viene acompañado siempre de cierta frustración. Más embarazosos todavía son los casos en que es el propio profesor el equivocado, algo que puede ocurrir a cualquiera en cualquier momento. Por tanto hay una comprensible tendencia a instalarse en la zona de comodidad que el ejercicio mecánico proporciona. Pero, si no me equivoco, creo que hay aquí también un efecto pernicioso de las pruebas de acceso a la universidad. Dada la necesidad de que los alumnos estudiosos estén seguros de superarlas con calificaciones altas, para poder así acceder a los estudios universitarios que desean, se llega a eliminar de ellas todo lo que pueda poner en riesgo tal fin. La introducción de verdaderos problemas sería considerada como una forma injusta de ruleta rusa.

Estos fenómenos que, con cierta dosis de exageración, podríamos llamar de expulsión del razonamiento tienen, claro es, consecuencias perversas. Entre otras, la de ejercer una selección negativa de los alumnos, de suerte que, en secundaria, en ocasiones se interesen más por las matemáticas precisamente aquellos peor dotados para ellas a quienes satisface poder completar sin equivocarse largas series de instrucciones complejas. En sentido contrario, cuando se pregunta a un matemático profesional qué materia le interesaba más en la secundaria es frecuente que la respuesta sea la química o el latín.

A mi parecer, la matemática de secundaria sería más formativa si incorporásemos a ella puntos de matemática pequeña como los que comenté antes. Muchos de ellos no requieren apenas conocimientos previos para ser abordados. Otros incorporan elementos de la vida cotidiana fácilmente inteligibles para niños y adolescentes. Y, debidamente escogidos, pueden servir para formar muy bien en el razonamiento abstracto. La introducción de estos contenidos debe partir de la premisa de que el objetivo de la misma ha de ser sobre todo ejercitar el pensamiento, contribuyendo así al desarrollo más completo de la capacidad de cada alumno. De modo paralelo, habría que eliminar de los programas aspectos mecánicos y versiones *low cost* de desarrollos cuyo lugar propio son las aulas universitarias (y no todas).

[22] La necesidad de resolver problemas para aprender matemáticas no entra en contradicción con la necesidad de hacer abundantes ejercicios, imprescindibles para adquirir soltura en las técnicas que se van aprendiendo. A hacer algo se aprende haciendo, no viéndolo hacer a terceros ni, menos, leyendo sobre ello.

3.2 Aspectos instrumentales

Dejando atrás la matemática como medio de enseñar a pensar, la matemática es también un instrumento del que todos nos valemos en una u otra medida. Todos necesitamos manejar las cuatro reglas de la aritmética, entender las fracciones o conocer cómo hallar el área de un rectángulo. En la secundaria es preciso impartir, independientemente de su valor formativo, conocimientos matemáticos instrumentales que se requieren ya sea en estudios posteriores de matemáticas, ya sea en otras disciplinas, muy especialmente en la física o en la economía. Sin embargo creo que también hay abundantes ideas matemáticas que son útiles al ciudadano medio, no solo al futuro científico o ingeniero. Opino que, de modo lamentable, lo que se hace en este sentido en nuestros institutos es más bien pobre. Hoy la comprensión del mundo requiere de conceptos matemáticos sencillos, o cuando menos, se facilita cuando se poseen y manejan tales conceptos. Estoy pensando en ideas básicas sobre probabilidad, presentación, visualización y análisis de datos, valoración de información cuantitativa, etc., varias de las cuales ilustré brevemente al principio de este discurso. Este tipo de conocimiento instrumental puede ser beneficioso no sólo para el individuo sino también para la salud democrática de toda la sociedad, al incrementar la calidad de los criterios de juicio empleados en los debates públicos. Los planes de estudios no incorporan los elementos a los que estoy refiriéndome, o al menos no de manera suficiente. Y, cuando se ha intentado llevarlos a la enseñanza preuniversitaria, han llegado a los boletines oficiales pero no a las aulas y menos a los exámenes.

4. LA CIENCIA PEQUEÑA Y LA EXTENSIÓN DE LA CULTURA CIENTÍFICA

Por último voy referirme al papel de la ciencia pequeña en la difusión de la ciencia en la sociedad.

Las razones por las que los científicos tenemos la obligación de difundir la ciencia son múltiples. Algunas poco altruistas: en una sociedad democrática los poderes públicos apoyarán a la ciencia en la medida que la propia sociedad se lo exija, y esta exigencia evidentemente depende de que el público esté persuadido de los beneficios que le pueden llegar de tal apoyo. Asimismo la continuidad de la ciencia requiere la constante atracción a ella de nuevas vocaciones, suficientes en cantidad y calidad. Y no debemos olvidarnos en modo alguno de que la ciencia es una forma superior de cultura humana, de examinar la naturaleza, la sociedad y a las personas, a la que todos deben poder acceder, como a la música o a la literatura[23].

Es un lugar común afirmar que el mundo está hoy moldeado por la ciencia de un modo mucho más intenso que lo estuvo nunca. Es evidente, y así se afirma una y otra vez, que la ciencia ha hecho posible la tecnología que nos rodea: GPS, telefonía móvil, nuevos medicamentos, genómica, la red, etc. Creo que, paradójicamente, esta misma tecnología puede estar contribuyendo a un retroceso de la cultura científica del público, incluso hasta el punto

[23] Véase el reciente Manifiesto de la ReDiMa por el Reconocimiento de la Divulgación de las Matemáticas.

reinstaurar determinados elementos del pensamiento mágico. Ciertamente el mundo que me circundaba en mi infancia era más científico que el que circundó a mis hijos en la suya. Me explicaré.

Viajemos con la imaginación a los años cincuenta del pasado siglo. En un hogar hay, o puede haber, cierto número de aparatos eléctricos, alguno de los cuales, como la lavadora, ha supuesto la eliminación de trabajos muy pesados. No son pocas las personas que, en mayor o menor grado, entienden el funcionamiento de esos aparatos y la ciencia que hay tras ellos. La lámpara de incandescencia, la plancha, un calefactor eléctrico y sus circuitos se comprenden sin dificultad; tal vez se aventure a repararlos uno mismo, como nos atreveremos a cambiar un fusible reemplazando los hilos de cobre quemados. Quizá algunos han pensado por qué el filamento de la lámpara es tan delgado y por qué no está en contacto con el aire. El timbre de la puerta es también inteligible por completo; nos enseña la unidad de la electricidad con el magnetismo. Algo más de complicación reviste el motor de la lavadora, pero, en el caso de no entenderlo nosotros mismos, es seguro que en nuestro pueblo hay alguien que lo hace y es capaz de rebobinarlo en caso necesario. Ciertamente la radio (de válvulas) está en un escalón de complejidad superior, pero no escasean los cursos por correspondencia que enseñan a cualquiera a montarlas y repararlas. Cuando hay que proceder a un arreglo del receptor y las causas de la avería no son obvias (digamos no se trata de una válvula cuyo filamento se ha fundido) la búsqueda del elemento defectuoso se hará de modo *racional*, pensando las posibles causas del fallo observado, para lo cual el técnico tiene que comprender el papel que cada pieza juega en el todo. Traslademonos de vuelta al presente. Nuestra plancha y nuestra lavadora son ahora tan complejas que ni las comprendemos, ni conocemos a nadie en nuestro entorno que las entienda. Si fallan, las desecharemos y reemplazaremos por otras nuevas; en el mejor de los casos, se repararán mediante la sustitución de algún módulo, esto es, de una misteriosa caja cuyo interior es ignoto incluso para el propio técnico reparador. La opacidad al usuario de una lámpara LED es completa. ¿Quién sabe dar cuenta, aunque solo sea aproximada, del hardware de su ordenador portátil? ¿De su software? ¿De la pantalla de cristal líquido? ¿De la fibra óptica que nos trae internet? ¿De los protocolos de seguridad que impiden al vecino conectarse a nuestra wifi? El ordenador nos presenta un rostro amable, fingiendo que en su interior hay carpetas y cajones llenos de documentos que podemos cambiar de un sitio a otro o arrojar a la papelera a nuestra voluntad. Se trata, claro, de meras metáforas para hacer posible nuestra convivencia con lo arcano.

Los múltiples aparatos que nos rodean son otros tantos misterios. Un termómetro clínico, un manómetro de mercurio para medir la presión arterial solían ser aparatos sencillos que permitían ver o al menos entrever la ciencia que los sustentaba. Esto ya no es así; se han vuelto cajas negras con una ventana en que leemos los dígitos de la medida. Bajo el capó de un automóvil se oculta ahora una serie de cajas negras; cuando alguna falla se ha de conectar el motor a una nueva caja negra cuya pantalla indicará al mecánico qué módulo hay que reemplazar. En resumen: vivimos en un mundo de dispositivos que se han tornado muy difíciles de comprender y, aunque repitamos *ad nauseam* que todo se basa en la ciencia, lo cierto es que no solemos saber dar razón del cómo ni del porqué; algo no tan diferente de la cosmovisión del hombre primitivo que cree que todo funciona de acuerdo con los dioses, sin poder ni explicar ningún mecanismo concreto ni intervenir en modo alguno.

El fenómeno que trato de describir se observa incluso en los juguetes. Los días de los mecanos, los juegos de experimentos químicos, las colecciones de minerales son historia, como lo son las semanas en que observábamos con paciencia la metamorfosis del gusano de seda. Imperan hoy los juguetes caja negra por cuyo funcionamiento no cabe esperar se pregunten los niños y niñas. Aunque no serían posibles sin la ciencia, esas cajas negras no hacen nada por difundirla[24].

Me he embarcado en la digresión anterior porque es evidente que la ciencia pequeña desempeña un papel relevante en la difusión en la sociedad del pensamiento científico. Creo que precisamente en esta línea de ciencia pequeña están las diversas olimpiadas científicas, como lo están el programa ESTALMAT de fomento del talento matemático, nacido en esta casa, y otras muchas laudables iniciativas recientes que lamento no poder glosar.

Centrándome en las matemáticas, diré que, en mi opinión, su difusión social es más difícil que la de las otras ciencias. Y tal vez esto es así por dos razones. La primera por tratarse de una ciencia abstracta, sin referentes materiales específicos visibles o tangibles. Carece el matemático de lo que representa la estrella para el astrónomo o la planta para el botánico, o al menos no puede mostrarlo. Y la segunda es el carácter extremadamente sistemático de la disciplina, que hace que a menudo no se pueda siquiera presentar un determinado concepto a quien no lleva muchos años estudiando la base matemática que se precisa. Con lamentable frecuencia, el interés, belleza o dificultad de una demostración sólo son accesibles a unos cuantos especialistas.

Ante estas dificultades, la divulgación matemática suele acogerse a una serie de recursos de eficacia variable. Ante todo nos encontramos con enfoques históricos. Un ejemplo admirable lo da el discurso "*Una mirada a las matemáticas del siglo XX"* pronunciado en esta sala por el Prof. Bombal para inaugurar el año académico 2015-2016. Pero la historia de la matemática es tan difícil de transmitir como la propia matemática o quizá más; ciertamente demanda del autor una considerable preparación cultural más allá de lo estrictamente matemático. Por esto, se puede caer pronto en el abuso del anecdotario: de las penurias y dolencias de Abel (1802-1829) a las de Ramanujan (1887-1920), del duelo por amor de Galois (1811-1832) a la rivalidad sentimental, real o supuesta, entre Mittag-Leffler (1846-1927) y Nobel (1833-1896). Este anecdotario, que puede servir para introducir amenidad en una conferencia técnica, poco o nada tiene que ver con las matemáticas; sería igual de interesante si los protagonistas hubieran sido enfermeras, azafatas o pasteleros. Además, con frecuencia se exagera la precocidad de este matemático o la excentricidad de aquel, de lo que se sacará la conclusión de que no puede tener lugar en nuestra ciencia quien no haya sido niño prodigio como Gauss (1777-1855) o Wiener (1894-1964), o no esté dispuesto, como Erdos (1913-1996), a vagar durante años llevando todas sus posesiones en una sola maleta.

[24] Una última observación en este sentido. En los años sesenta el montaje de aparatos electrónicos era un hobby relativamente extendido, para el que existían en los quioscos dos o tres revistas especializadas. Montar una radio juntando transistores, resistencias, bobinas y condensadores era algo así como una forma superior de jugar con un mecano. El propio avance de la tecnología electrónica destruyó el hobby cuando todos los componentes empezaron a estar disponibles juntos en un minúsculo circuito integrado y ya no había nada que juntar.

Por esta vía se propaga el mito del matemático excéntrico, que tanto perjudica nuestra percepción por la sociedad.

Otra oportunidad de divulgación suele darse con ocasión de los grandes avances. Baste recordar el impacto de la solución en 1995 por Wiles (1953-) de la conjetura de Fermat (1607-1665). Que haya problemas que se resuelvan tras siglos de pensamiento ininterrumpido tiene ciertamente dimensiones casi épicas, similares acaso a las de la primera llegada a los polos o a la conquista del Everest. Pero aquí es arduo poder transmitir al público dónde estaba la clave de la dificultad, a qué se debe el éxito y, por qué no decirlo, qué ha ganado el hombre de la calle con el descubrimiento.

Un tercer enfoque, menos cultivado en España, consiste en hacer patente la enorme cantidad de cosas que dependen de las matemáticas y en especial de las matemáticas recientes: de la predicción del tiempo atmosférico al diseño asistido por ordenador, del motor de búsquedas de Google a la fijación de precios de los derivados financieros. La mayoría de las personas suele desconocer el papel de nuestra ciencia en estos desarrollos y el hombre de la calle lo confunde con el de la informática, por no distinguir suficientemente el algoritmo matemático del programa que corre en el ordenador y de la propia máquina. Incluso entre los mismos matemáticos profesionales no es fácil estar bien informado de las aplicaciones que se basan en desarrollos lejanos al propio ámbito de especialidad. Por ello sería muy conveniente que las sociedades matemáticas de nuestro país compilasen una lista debidamente documentada de diez o quince cosas, de importancia clara para el público, cuya existencia sería imposible sin las matemáticas. Evitarían así a sus socios verse obligados a improvisar cada vez que son preguntados por la utilidad o importancia de nuestra ciencia.

Sin embargo, creo que ni la información sobre grandes avances ni la que se refiere a las aplicaciones son por sí mismas bastantes para atraer talento a las matemáticas o para transmitir al público una idea aproximada sobre la naturaleza de las mismas. Es aquí donde pienso que lo que he llamado pequeñas matemáticas se muestran muy útiles; son pequeñas pero son matemáticas.

5. CONCLUSIÓN

Concluyo ya. No era mi deseo convencer a nadie del valor de la matemática pequeña o de la ciencia pequeña. Con la frase ritual con la que acaban sus informes los asesores jurídicos, diré que someto las opiniones anteriores a cualesquiera otras mejor fundadas. Ya anuncié al comienzo que me doy por satisfecho si mis palabras nos han llevado a pensar una vez más sobre la cultura científica y la enseñanza y divulgación de la ciencia, pequeña y grande, algo en lo que nuestra sociedad se juega su futuro.

He dicho.

APÉNDICE A: PROBLEMAS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD

Este apéndice y el que le sigue tratan de ilustrar de modo somero cómo las matemáticas de la secundaria inciden de modo casi exclusivo en los aspectos mecánicos de la asignatura (aplicación de recetas de manipulación de símbolos), ignorando tanto el valor formativo de la misma como su papel instrumental para otros estudios. Mi objetivo aquí no es, por supuesto, presentar un estudio riguroso sobre el estado actual de la enseñanza matemática en secundaria o su evolución en las últimas décadas, asuntos que exceden mi capacidad y preparación.

He consultado, por tenerlo a mano, un librito de pequeño formato que proporciona enunciados de ejercicios de selectividad[25] del año 2006. Del mismo he tomado al azar (página 36), modificando ligerísimamente la tipografía, los enunciados que reproduzco a continuación. Corresponden a la Comunidad Autónoma de Castilla y León; las pruebas de las distintas comunidades autónomas son muy parecidas entre sí, repitiéndose una y otra vez un pequeño número de problemas y cuestiones tipo. Obsérvese que se trata únicamente de contenidos de álgebra lineal, geometría analítica del espacio y análisis matemático (ver el Apéndice B); otros temas que se estudian en el bachillerato, pero no en segundo curso, como números complejos, probabilidad y estadística no son materia de examen en estas pruebas[26].

Problema 1. Sean r y s las rectas

r: $2x-y = m,\ z+2y = 3,$

s: $x+y = 2,\ x+2z = 3.$

a) Hállese el valor de m para que ambas rectas se corten (1.5 puntos).

b) Para $m = 1$, hállese la ecuación del plano que contiene a r y s (1.5 puntos).

Problema 2. Considérense las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^{-x}$. Para cada recta r perpendicular al eje OX sean A y B los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de f y g, respectivamente. Determínese la recta r para la cual el segmento AB es de longitud mínima (3 puntos).

Cuestión 1. Hállense las matrices cuadradas A de orden 2, que verifican la igualdad $AM = MA$ siendo M la matriz que por filas es $1,\ 0;\ 1,\ 1$ (1 punto).

Cuestión 2. Calcúlese la distancia del punto $P(1,1,1)$ a la recta $x = -2+2m,\ y = 0,\ z = -m$ (1 punto).

---

[25] El libro, que es de uno de mis hijos, tenía como objetivo proporcionar modelos para la preparación de las pruebas en 2007.

[26] Esto puede conducir tal vez a que no se estudien debidamente en los centros.

Cuestión 3. Calcúlese el límite cuando x tiende a 0 de $log(cos(2x))/x^2$ (1 punto).
Cuestión 4. Hállese el área del recinto limitado por la parábola $y = -x^2$ y la recta $y = 2x-3$ (1 punto).

Los alumnos debían elegir entre resolver estos dos problemas y cuatro cuestiones u otro paquete dos más cuatro; diez puntos en total.

Como se observará, ambos "problemas" son meros ejercicios rutinarios y no se distinguen en absoluto de las cuestiones. De hecho, cualquiera de las cuestiones me parece más complicada que el Problema 2, aunque contribuya con tan sólo un punto a la nota final.

El libro suministra no sólo el enunciado de la prueba sino también la solución, que comento seguidamente.

La parte a) del Problema 1 aparece resuelta buscando primero representaciones paramétricas de una y otra recta[27]. Me llamó la atención que cuando en el bachillerato se dedica tanto esfuerzo a discutir la solución de sistemas lineales, la parte a) no hubiese sido abordada sencillamente resolviendo el sistema (muy fácil) $z+2y = 3$, $x+y = 2$, $x+2z = 3$, para obtener $x = y = z = 1$, lo que llevado a $2x-y = m$ da $m=1$. Probablemente el camino elegido vino determinado por no querer apartarse de las *recetas* que el libro texto de la misma editorial (que no hay que confundir con el librito del que vengo hablando) proporciona; esas recetas suelen partir de la suposición de que las rectas están dadas en forma paramétrica.

La parte b) del primer problema aparece resuelta por aplicación directa de una fórmula basada en un determinante. Como ingredientes se usan el punto $(1/2,\ 0\ ,3)$ que se obtiene poniendo $y = 0$ en los planos que definen r, y vectores en las direcciones de r y s. De nuevo sorprende que el problema no se resuelva por el fácil expediente de determinar de entre los planos del haz que contienen a s el único que pasa por $(1/2,\ 0\ ,3)$ y se acuda a una nueva fórmula/receta.

Para el (facilísimo) Problema 2 la solución proporcionada empieza haciendo una representación gráfica, cosa ciertamente encomiable y que, entre otras cosas, sirve para observar que la longitud que hay que minimizar es $f(x)-g(x)$ y no el valor absoluto de esa diferencia. Tras obtener la solución $x = 1$ anulando la sencillísima derivada primera de $f(x)-g(x)= e^x+e^{-x}$, se va a la derivada segunda para asegurarse de que se trata en efecto de un mínimo. Esto

[27] Dicho sea de paso, la solución proporcionada en el librito incorpora un despiste, pero esto es algo irrelevante para lo que venimos comentando. Ambos parámetros se denotan por una misma letra t. Se supone que debe existir un valor de t para el cual el correspondiente punto de la primera coincida con el de la segunda (si se interpreta el parámetro como tiempo, se pide pues, no sólo que las trayectorias de los dos móviles se intersequen, sino que los móviles lleguen simultáneamente al punto de intersección). Se plantea así un sistema lineal de tres ecuaciones con una incógnita t; una de las ecuaciones y de las otras dos se obtienen t y m. Por casualidad, el valor de m hallado resulta ser correcto. Hay que notar que a los alumnos despabilados este valor se lo da directamente el propio enunciado en la parte b).

debe formar parte de la correspondiente *receta* pero, una vez que se disponía de la gráfica, era por completo innecesario.

La Cuestión 1 aparece resuelta en el texto de la misma editorial (ejercicio 36, página 72), con la única salvedad de que el papel de las filas y el de las columnas se han intercambiado en la prueba de selectividad. Requiere poco más que aplicar la fórmula para multiplicar matrices. La Cuestión 2 se resuelve por aplicación mecánica de una fórmula en términos de determinantes. La 3 por aplicación rutinaria de la regla de L'Hôpital dos veces. La última necesita la resolución por fórmula de una ecuación de segundo grado y el cálculo por fórmula de la integral de un polinomio.

En definitiva, sin entrar a valorar si los contenidos (álgebra lineal, geometría analítica, límites, etc.) son los idóneos para el bachillerato, cosa sobre la que volveré en el siguiente apéndice, es claro que lo único que se espera del alumno es la memorización de una serie de fórmulas y la aplicación mecánica de las mismas.

El libro recoge un total de 17 pruebas de las distintas comunidades autónomas, lo que representa más de 150 ejercicios. De entre éstos, sólo he encontrado dos que en mi opinión tienen cierta 'gracia' matemática. Se encuentran en la prueba del País Vasco y son los siguientes.

Cuestión: Si la base de un triángulo aumenta el *10%* y la altura disminuye el *10%*, ¿variará el área del triángulo? En caso afirmativo, señalar el porcentaje de aumento o disminución.

Problema: Por la venta de una partida de sellos, todos del mismo valor, un señor obtuvo *5.27* euros. El precio de cada sello es inferior a *20* céntimos. ¿Cuántos sellos vendió? ¿Cuál es el valor de cada sello?

El alumno debía resolver o bien la cuestión o bien el problema; uno y otro valían dos puntos. Sin duda se incluyeron en la prueba para que no se pudiera llegar a la nota máxima sin haber pensado un poco. Ninguno de los dos requiere apenas conocimientos previos, pero sí estar familiarizado con el razonamiento matemático.

APÉNDICE B: UNA MIRADA A UN PROGRAMA PREUNIVERSITARIO

Finalmente voy a examinar los contenidos de un libro de texto (segundo curso de bachillerato) para la preparación de la prueba del apéndice precedente. Evidentemente mi propósito no es analizar el libro en sí (razón por la que no daré la reseña bibliográfica), sino examinar los contenidos de la asignatura.

El índice es el siguiente:

Daré una opinión personal sobre esta selección de contenidos y comenzaré mi comentario por el análisis.

Análisis. El programa ha *optado* por dar una versión simplificada de un curso de análisis matemático básico de un grado en matemáticas, despojando a éste de las partes que se ha juzgado exceden a la enseñanza preuniversitaria. Esta *opción*, que se hace ya patente al haber elegido el nombre *análisis matemático* en vez de *cálculo infinitesimal*, puede criticarse desde varios puntos de vista, que discutiré a continuación.

Ciertamente un estudio de los conceptos de límite y continuidad como cimientos para el estudio de derivadas e integrales es y debe ser una de las piedras angulares de la formación en la universidad de matemáticos profesionales. Tal estudio, junto con la construcción del conjunto de números reales, es el núcleo del proceso de aritmetización con el que se fundamentó de manera sólida en el siglo XIX el cálculo infinitesimal del XVIII. Lo que carece de sentido es pretender impartir, como se hace en el programa de esta asignatura, de manera no rigurosa contenidos cuyo valor radica precisamente en su aportación al rigor. Es como producir un suplemento calórico para la dieta bajo en calorías. Ilustraré esto con el teorema de Bolzano (1781-1848), incluido en el programa: una función real continua, definida en un intervalo, que toma valores positivos y negativos, debe anularse en algún punto. Cuando se manejan ideas intuitivas de la continuidad y de número real, el aserto es evidente; en este sentido el enunciado no nos *informa* de nada nuevo y es perfectamente prescindible. El quid del teorema está en la constatación de que cuando (i) se ha hecho una *construcción* del conjunto de números reales que permita haber demostrado *rigurosamente* que cada subconjunto acotado superiormente tiene una cota superior mínima (o alguna otra propiedad equivalente)[28], y (ii) se ha dado una *definición* adecuada de función continua, *entonces* se puede demostrar con todo rigor lógico, sin apelar a ninguna intuición, que es imposible para una función continua pasar de valores positivos a negativos sin hacerlo por el valor cero. Es claro pues que el teorema de Bolzano es demasiado difícil y requiere excesivos prerrequisitos para su inclusión en los estudios preuniversitarios; lo que aquí se puede proporcionar y proporciona es una especie de sombra incorpórea del teorema. Sombra espectral que aporta poco positivo a la formación del alumno y contribuye a extender la idea negativa de que en matemáticas se trata de demostrar prolijamente lo que ya consta por obvio.

Un segundo elemento de crítica. Derivadas e integrales son herramientas imprescindibles no sólo para efectuar cálculos en las ciencias, la ingeniería, la economía, etc., sino incluso para entender conceptos científicos esenciales (el de velocidad instantánea de un móvil o de una reacción química da el ejemplo más claro). El programa desvincula por completo el análisis matemático de la ciencia y de la tecnología, lo cual es negativo para el alumno, tanto en sus estudios de física o química de bachillerato, como en sus posibles posteriores estudios de matemáticas[29]. Las aplicaciones de la derivada que se contemplan en el programa se reducen a poco más a la regla de L'Hôpital y el estudio de máximos/mínimos, crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad de las funciones; de nuevo dos áreas que se prestan a la resolución mecánica de ejercicios rutinarios[30]. ¿Por qué no se han puesto ejercicios de derivación que involucren velocidades y aceleraciones? De acuerdo con el programa, el uso

[28] Dicho sea de paso: la construcción de los números reales parece estar desapareciendo o haber desaparecido ya por completo de los programas de los grados universitarios en matemáticas. Es paradójico que el texto de Dieudonné mencionado más arriba no incluya este tema de carácter central cuando afirma aspirar al mayor rigor. ¿Saben los alumnos qué es el producto de dos números irracionales?

[29] Tanto por ocultarle las fuentes históricas de la propia matemática como por incapacitarlo para el trabajo en la mayor parte de las aplicaciones.

[30] Ver el Problema 2 y la Cuestión 3 del Apéndice A.

de la integral simple (definida) parece estar reducido al cálculo de áreas y al de volúmenes de revolución. El trabajo de una fuerza de magnitud variable, la potencia eficaz (media) en un circuito de corriente alterna (tanto si la corriente está en fase con la diferencia de potencial, como si no) hubiesen dado ejemplos bien interesantes para la integral. También hay que observar que importantes usos geométricos del cálculo infinitesimal no son mencionados[31]. La separación radical entre las matemáticas y las ciencias experimentales contribuye a crear la falsa imagen de que hay dos tipos de matemáticas: las que usan los científicos por una parte y las de los matemáticos por otra. El divorcio al que asisten nuestros estudiantes de secundaria es total y se echa de ver incluso en la notación. Por ejemplo, en el empleo exclusivo de la notación newtoniana $f'(x)$ para designar la derivada de $y = f(x)$, ignorando por completo la leibniziana dy/dx, que ofrece al matemático múltiples ventajas en varios escenarios y es ubicua en las aplicaciones[32].

Un tercer punto, relacionado con el que acabo de comentar. El programa no contribuye a que el alumno se haga con la *idea de aproximación* que subyace al análisis matemático. En relación con el visitante que llega a la hora de comer, noté que $1/n - 1/(n+1) = 1/(n^2+n)$ "se comporta como $1/n^2$". Equivalentemente, n^2+n se comporta como n^2. ¿Saben los alumnos de secundaria cuál es el significado preciso de tal afirmación? Aquí se da la paradoja de que de la práctica docente parece concluirse que saber que n es despreciable frente a n^2 es útil para poder calcular que el límite de $(n^2+n)/n^2$ es la unidad, cuando las cosas funcionan exactamente al revés: porque se sabe que ese límite es 1 puede tomarse n^2 como aproximación a n^2+n con error relativo que se hace arbitrariamente pequeño al incrementar n. Pero sin duda el ejemplo más notable en este sentido es la completa *expulsión* de las diferenciales del cálculo diferencial que se observa en el programa. Ya que el límite del cociente $\Delta f(x)/\Delta x$ es $f'(x)$ (cosa incluida en el programa), concluimos que la diferencial definida por $df = f'(x)dx$ puede tomarse como aproximación a $\Delta f(x)$ con error relativo arbitrariamente pequeño. Este es un hecho que se usa constantemente en las aplicaciones de las matemáticas, de cuyo rigor no cabe dudar y que sin embargo ha sido censurado en nuestra enseñanza secundaria.

¿Cuáles son las razones que han conducido a adoptar este programa de cálculo infinitesimal/análisis matemático? Todo parece sugerir que la elección se ha basado en la *ideología* formalista que prevaleció en la matemática internacional de los años sesenta y setenta del siglo pasado. No era infrecuente en esa época opinar que el cálculo infinitesimal, tal como se había desarrollado hasta comienzos del siglo XIX, y el análisis fundamentado en la aritmética de finales del mismo siglo eran dos cosas radicalmente distintas. La primera era algo completamente carente de rigor, que en la actualidad podía tener cierta utilidad para los no matemáticos que precisaran hacer cálculos. Sólo la segunda formaba parte de la verdadera matemática. Los grandes maestros del XVIII, incluyendo a Euler y Lagrange, eran presentados como aventados improvisadores, cuya relevancia palidecía al compararse con los sólidos

[31] Por ejemplo, a pesar de que se dedica un capítulo entero a la representación de las funciones, los conceptos de centro y radio de curvatura no aparecen, siendo así que se necesitan para entender la aceleración centrípeta en mecánica. Tampoco forma parte del programa el cálculo de longitudes de curvas. Sin estos elementos no se puede estudiar la cinemática del punto material.

[32] Recuerdo haber oído comentarios sobre este divorcio entre las matemáticas y las ciencias a D. Carlos Sánchez del Río (1924-2013). Ingresó en esta Academia en 1975 y la presidió entre 2002 y 2005.

aritmetizadores posteriores. Los defensores más ardientes de esa ideología llegaban a afirmar que ¡Euler no entendía lo que era una serie[33]!

Algebra. Si los contenidos de análisis, aunque a mi juicio mal escogidos, ciertamente responden a un plan bien definido e internamente armónico, es muy difícil entender las razones que han llevado a adoptar este programa de álgebra (lineal), yuxtaposición peregrina sin ninguna coherencia.

Hay cuatro lecciones. La primera y la cuarta se dedican a la resolución de sistemas lineales y difieren entre sí en el método empleado: la eliminación gaussiana en la primera, determinantes en la cuarta; evidentemente la lección cuarta se presenta en el programa como un avance sobre la primera. En verdad, la eliminación gaussiana del capítulo inicial, muy fácil de entender para cualquier alumno, constituye uno de los diez algoritmos más importantes de toda la matemática (junto con el simplex, transformada rápida de Fourier, Montecarlo, etc.), pues se usa cada día en todo tipo de aplicaciones (los ordenadores dedicados al cálculo científico pasan gran parte del tiempo resolviendo por eliminación gaussiana sistemas lineales). Por el contrario, los contenidos del capítulo cuarto no sólo no se presentan al alumno de manera inteligible (por ejemplo no se explica por qué si un determinante es nulo entonces sus filas son dependientes) sino que están desprovistos de toda utilidad práctica, ya que su complejidad aumenta exponencialmente con el número de ecuaciones/incógnitas, quedando pues limitados a pequeños sistemas tres por tres o cuatro por cuatro (en la práctica los sistemas suelen ser *muchos órdenes de magnitud* mayores). Por su completa falta de valor, los contenidos del capítulo cuarto hace muchas décadas que desaparecieron de las obras universitarias de álgebra lineal. ¿Por qué se incorporan aquí? ¿Por qué se presentan como una mejora sobre la eliminación gaussiana cuando son infinitamente inferiores a ella? No tengo respuesta a estas preguntas. Sólo notaré que, una vez más, los contenidos de la lección cuarta, sin valor conceptual o instrumental alguno, sí se prestan bien a lo que en verdad parece perseguirse: proponer ejercicios que puedan resolverse rutinariamente.

La lección dos (álgebra de matrices) se limita a presentar las operaciones entre las mismas; de nuevo una serie de reglas que hay que seguir de modo ciego[34]. Tal vez esta lección sea el muñón restante de un tratamiento más ambicioso del álgebra lineal de épocas anteriores

---

[33] Y esto cuando la fama internacional de Euler había comenzado cuando en 1734 a los 28 años de edad había sumado la serie de término general $1/n^2$, resolviendo así el llamado problema de Basilea propuesto en 1644. La finura con que Euler manejaba el concepto de velocidad de convergencia puede verse por ejemplo en su tratamiento de la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias truncando la serie de Taylor (J. M. Sanz-Serna, "El método de Euler de integración numérica". En: La Obra de Euler, Tricentenario del Nacimiento de Leonhard Euler (1707-1783), Alberto Galindo Tixaire y Manuel López Pellicer, coordinadores. Instituto de España, Madrid 2009, 105-114). En el mismo orden de cosas, recuerdo haber oído decir en público, con entera seriedad, que Hamilton (1808-1865) no entendió la mecánica que él creó ¡por no disponer del concepto de fibrado cotangente de una variedad diferenciable!

[34] Por ejemplo la definición del producto (ordinario) entre matrices no aparece suficientemente motivada, el alumno debe limitarse a saber aplicarla. Tal motivación requeriría hablar de la transformación definida por una matriz, pero eso no forma parte del programa. La multiplicación de matrices se usa sólo para proponer cuestiones artificiosas como la primera del anterior apéndice.

hoy amputado del programa. En las actuales circunstancias no se ve razón para mantenerla, cuando las matrices no desempeñan ningún papel efectivo en lecciones posteriores.

La lección tres (determinantes) es importante en el programa, por ser la base tanto de la nefasta lección cuatro como de muchas recetas usadas en el bloque de geometría. Sin embargo, la relevancia otorgada en el curso al uso de los determinantes no se aviene en modo alguno con el papel muy secundario que ellos poseen en el álgebra lineal moderna.

Geometría. Para este grupo de tres lecciones se ha elegido sencillamente el tipo de tratamiento que estos temas tenían en España en el bachillerato (para el caso del plano) y universidad (caso del espacio) de los años sesenta, sin tratar de ligarlos a las asignaturas de álgebra lineal que muchos seguirán en su primer año de universidad.

Conclusión. En resumen, las fuentes de las que bebe el programa parecen ser dos. De un lado, se parte del enfoque formalista que era común en la universidad hace cincuenta años, diluyéndolo hasta hacerlo asequible al alumnado (es el caso del análisis). Donde tal dilución no se ha juzgado posible o deseable (álgebra lineal y geometría), se ha vuelto directamente a otra fuente: las concepciones vigentes en la universidad y bachillerato españoles de 1960, aunque ellas no respondan en absoluto al panorama actual de la matemática[35]. ¡Es significativo en este sentido que se impartan matemáticas en nuestro siglo fingiendo que no hay ni ordenadores ni calculadoras!

[35] Este anclaje de los contenidos en textos españoles de otras épocas se echa de ver en muchos pequeños detalles. Así en la enseñanza preuniversitaria española se siguen llamando funciones cóncavas a las que en el resto del mundo y en nuestras universidades se denominan convexas y viceversa. Incluso hay personas que defienden que la elección de convexo en el bachillerato español es la correcta y el resto del mundo está equivocado. Me recuerdan a la madre que al ver orgullosa desfilar a su hijo notaba que además era el único que lo hacía bien, pues todos los demás de la compañía llevaban el paso cambiado.