Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 108, Nº. 1-2, pp 73-112, 2015
XVII Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

El largo y sinuoso camino a la Relatividad General

ALBERTO GALINDO TIXAIRE*

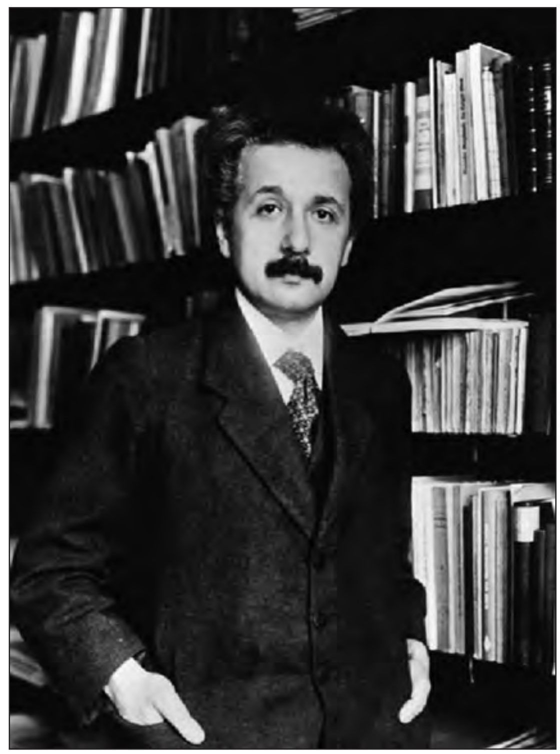
Departamento de Física Téorica. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense. 28040 MADRID. España.

I. INTRODUCCIÓN

Hace aproximadamente un siglo el físico Albert Einstein (1915) condensaba en concisa y hermosa fórmula una nueva teoría de la gravitación. Con ella ampliaba el dominio de validez de la magnífica ley de Newton (1687) que durante un cuarto de milenio venía describiendo con precisión admirable (10^{-8}) los movimientos de los astros en nuestro entorno. Solo había una nubecilla discordante: el perihelio del planeta Mercurio presentaba un avance secular anómalo, inexplicable con la teoría newtoniana de la gravitación universal a partir de la perturbación producida por los restantes planetas de nuestro sistema solar y el momento cuadrupolar del Sol. Aunque este avance era minúsculo (43”/siglo), invitaba insistentemente a buscar una generalización del esquema newtoniano.

Ocho años de arduo y penoso trabajo, cuajado de brillantes intuiciones y de crasos errores, llevaron por fin a Einstein a unas ecuaciones para el campo gravitatorio que generalizaban la ecuación de Poisson rectora de la gravitación newtoniana, eran conformes a un principio de relatividad general o invariancia bajo cualquier cambio de coordenadas, y explicaban la anomalía mercurial. Con ellas, Einstein nos entregaba la creación teórica más brillante de toda la historia de la ciencia.

De este proceso intelectual sin par tratará mi conferencia. Y dado que fue la luz un importante punto de apoyo en el discurso einsteiniano, cumpliremos de paso con una doble conmemoración: el centenario de la Relatividad General, y el Año Internacional de la Luz.



Albert Einstein (1879-1955).
Berlín 1916.

Tenemos el privilegio de vivir en una época apasionante, en la que todas las ciencias han experimentado avances prodigiosos. Limitándonos a la física, y en poco más de cien años:

- Hemos aprendido que la naturaleza es cuántica, rigiéndose por leyes probabilísticas; además la

* Este texto comenzó a escribirse en el segundo semestre de 2014, y se dio por terminado en el 2016.

realidad no preexiste, sino que es "actualizable" por la observación.

- Hemos pasado de suponer que los átomos eran indivisibles a saber que toda la materia ordinaria, la llamada materia bariónica, está formada y gobernada por excitaciones de 62 campos cuánticos fundamentales, integrantes del modelo estándar de partículas elementales; de ellos los leptones cargados y los quarks son de estructura puntual ($\lesssim$ 0.1-1 am) hasta las máximas energías (~ 10 TeV) hasta hoy alcanzadas en los laboratorios.
- Hemos observado que el universo es un inmenso ente dinámico, que hace 13.8 Ga tuvo una fase de extremadas compresión y temperatura, y que tras un brevísimo periodo de expansión titánica, provocada por una enorme energía de vacío que planchó sus posibles irregularidades y lo llenó de partículas y energía, ha ido creciendo hasta las dimensiones actuales. La relatividad general, la teoría einsteinana de la gravitación, nos ha enseñado a describir la geometría global de este universo, y junto con el modelo estándar, nos ha permitido escribir la cosmohistoria.

Voy a intentar resumir el tortuoso camino que el genio de Albert Einstein (AE) recorrió durante ocho duros años hasta dar con sus célebres ecuaciones para el campo gravitatorio, esas ecuaciones que simbolizan el apotegma de Kepler *ubi materia, ibi geometria:*

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \kappa\, T_{\mu\nu}, \quad \kappa := 8\pi G_{\mathrm{N}}/c^4. \qquad (1)$$

Personalmente, debo a AE los mejores momentos de mi profesión como docente; durante muchos años expliqué la teoría de la gravitación en 5º curso, y conseguí a menudo que fuera el simbólico 14 de marzo (cumpleaños de (AE) cuando llegaba a deducir la maravillosa fórmula (1). Me gusta escribirla y mostrarla, incluso ante auditorios no expertos, como una obra de arte (que lo es), para que nunca puedan decir que no han visto la más hermosa ley de la física de todos los tiempos:

geometría = materia.

II. ECHANDO A ANDAR

Un cierto día de octubre de 1907,[1] se hallaba AE en la Oficina de Patentes en Berna, cuando le asaltó un pensamiento que recordaría en Japón quince años más tarde con estas palabras:[2]

> *Estaba sentado en una silla en la oficina de patentes de Berna, cuando de pronto se me ocurrió un pensamiento: "Si una persona está en caída libre, no siente su propio peso." Me sobresalté. Este simple pensamiento produjo en mí una honda impresión. Me empujó hacia una nueva teoría de la gravitación*[3].

Invitado en 1907 por Johannes Stark, editor del *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, a escribir un artículo de revisión de la Relatividad Especial (RE), Einstein quiso decir algo sobre cómo acomodar la gravitación de Newton en ese esquema. Años más tarde (1920), a petición de la revista Nature, redactaba AE un largo manuscrito (conservado como *manuscrito de Morgan*), muy recortado en su publicación, en el que rememoraba aquellos inicios con estas otras palabras:

> *Entonces se me ocurrió el pensamiento más feliz de mi vida*[4] *en esta forma. El campo gravitatorio tiene solo una existencia relativa, de igual modo que el campo eléctrico generado por la inducción electromagnética. Porque para un observador que cae, en caída libre, desde el tejado de una casa, no existe campo gravitatorio, al menos en su entorno inmediato.*

Los historiadores han querido hacer también leyenda de estas primeras reflexiones de AE sobre la gravitación; igual que Arquímedes tuvo su bañera, Galileo su torre de Pisa, y Newton su manzana, ¿por qué no asociar AE con su silla en la Oficina de Patentes, imaginándonos que, sentado en ella con sus pies sobre la mesa, AE fuerza demasiado la inclinación de la silla y cae hacia atrás, experimentando unos instantes la ingravidez en caída libre mientras brotan en su cabeza dos ideas: la gravitación es indistinguible de la aceleración, y las masas gravitacional e inerte son proporcionales?[5]

[1] R.J. Heaston: *Why Did Einstein Put So Much Emphasis on the Equivalence Principle?,* April 2008 (15th NPA Conference).
[2] AE, Conferencia improvisada en Kyoto, 14 de diciembre de 1922, sobre *"How I Created the Theory of Relativity"*.
[3] *I was sitting in a chair in the patent office at Bern when all of a sudden a thought occurred to me: "If a person falls freely he will not feel his own weight." I was startled. This simple thought made a deep impression on me. It impelled me toward a theory of gravitation.*
[4] *Der glücklichste Gedanke meines Lebens.*
[5] R.J. Heaston: *loc. cit.*

III. AÑO 1907

A. El trabajo de 1907

En el mencionado trabajo[6] de AE en 1907, (Doc. 47, 4 de diciembre 1907, del volumen 2 de CPAE, las obras completas de AE), éste dedica su última sección al principio de relatividad y a la gravitación. El principio de relatividad es la hipótesis de que las leyes físicas son independientes del estado de movimiento relativo de los sistemas de referencia, siempre que estos movimientos sean uniformes, es decir, no acelerados. Y se pregunta AE: Àseguirá siendo cierto esto para cambios a sistemas acelerados?

Sabemos que los fenómenos mecánicos en un sistema uniformemente acelerado Σ_1 (con aceleración según *Oz* de módulo γ respecto de un inercial fijo Σ_0) son indistinguibles de los que observamos en el sistema Σ_0 en presencia de un campo gravitatorio uniforme en la dirección $-Oz$, siempre que admitamos que todos los cuerpos sufren en ese campo la misma aceleración gravitacional γ según $-Oz$. Admitamos con AE que esto es cierto para todos los fenómenos físicos, mecánicos o no.[7]

Esta hipótesis tiene consecuencias muy importantes. Por ejemplo, la dilatación gravitacional del tiempo. Dos relojes iguales, llevados a lugares donde el campo gravitatorio tiene valores distintos, baten con ritmos diferentes:

$$\frac{\triangle\tau_1}{\triangle\tau_2} = \frac{1+\phi_1/c^2}{1+\phi_2/c^2} \approx 1 + \frac{\phi_1-\phi_2}{c^2}, \tag{2}$$

suponiendo que $|\phi/c^2| << 1$. En particular, se desprende que las frecuencias espectrales que recibimos de la superficie solar están desplazadas al rojo en

$$\frac{\triangle\nu}{\nu} \approx \frac{\phi_\odot-\phi_\oplus}{c^2} \approx \frac{\phi_\odot}{c^2} = -2.12\times10^{-6}. \tag{3}$$

La velocidad (coordenada) de la luz en puntos con valores distintos del campo gravitatorio tampoco será la misma. Estudiando cómo afectan a las ecuaciones de Maxwell los cambios de coordenadas entre sistemas relativamente acelerados concluye AE que

$$c(P) \approx c_0\left(1+\frac{\phi(P)}{c^2}\right), \tag{4}$$

donde $c(P)$ es la velocidad de la luz en el punto P, $\phi(P)$ el potencial gravitatorio en el punto P relativo al del origen de coordenadas, c_0 la velocidad de la luz en este ultimo punto y c la velocidad de la luz en un inercial y en vacío. La fórmula anterior sería solo aceptable en pequeñas regiones; en general, debería reemplazarse por[8]

$$c(P_2) = c(P_1)\exp\left([\phi(P_2)-\phi(P_1)]/c^2\right). \tag{5}$$

Esta variación de la velocidad de la luz es muy pequeña en los campos gravitatorios del sistema solar, y su efecto en la optica resulta despreciable. No así a escalas astronómicas, pues la deflexión gravitacional de la luz de la que es responsable la fórmula anterior es calculable mediante

$$\mathrm{d}\psi \approx -\frac{1}{c^2}(\nabla\phi)\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{6}$$

con sentido de desviación correspondiente al de caída gravitacional. (AE no la escribe todavía así, sino que dice que si el campo es $\phi\,(x, y, z) = gz$, entonces la desviación por unidad de longitud que induce sobre un rayo de luz que forma un ángulo α con la dirección del campo es $(g/c^2)\sin\alpha$).

---

[6] AE: *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen,* Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **4,** 411-462 (1907). Título del trabajo en inglés: *On the Relativity Principle and the Conclusions Drawn from It.* Algunas correcciones y matizaciones aparecen en AE: *Berichtigungen zu der Arbeit: "Über das Relativitatsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen",* Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **5,** 98-99 (1908); en inglés: *Corrections to the Paper: "On the Relativity Principle and the Conclusions Drawn from It",* Doc. 49, 29 de febrero 1908, del vol. 2 de las CPAE.

[7] Dice AE a propósito de esto: *und wollen daher im folgenden die völlige physikalische Gleichwertigkeit von Gravitationsfeld und entsprechender Beschleunigung des Bezugssystems annehmen. Diese Annahme erweitert das Prinzip der Relativität auf den Fall der gleichförmig beschleunigten Translationsbewegung des Bezugssystems.* En inglés: *and in the discussion that follows, we shall therefore assume the complete physical equivalence of a gravitational field and a corresponding acceleration of the reference system. This assumption extends the principle of relativity to the uniformly accelerated translationa1 motion of the reference system.* Es la primer mención que hace de su famoso "principio de equivalencia".

[8] En cualquier caso, y como insistiremos luego con más detalle, estas primeras formulas einstenianas para la velocidad de la luz en presencia de gravitación son incorrectas; requieren para su validez el cambio $\phi \to 2\phi$.

AE soñaba ya en 1907 con la posibilidad de que su intento de unir el principio de relatividad con la gravitación le llevara a dar cuenta, entre otras cosas, del avance anómalo del perihelio de Mercurio.[9]

IV. AÑO 1911

AE se traslada a Praga, como catedrático de física teórica en su Universidad Alemana; aquí permanecerá durante 16 meses, desde abril de 1911, hasta finales de julio de 1912. Frutos de esa estancia fueron, entre otros, cinco trabajos sobre gravitación, uno del año 1911, y cuatro de 1912, que comentaremos a continuación. En ellos, puede encontrarse la primera aparición del principio de equivalencia, la posible observabilidad de la deflexión gravitacional de la luz, y el arrastre de inerciales.

A. El trabajo de 1911

Doc. 23, junio de 1911, del vol. 3 de los CPAE.[10] Escribe AE que no le satisfice su tratamiento del tema hecho en el trabajo anterior, y que además ahora (1911) las consecuencias parecen sometibles a confirmación experimental (deflexión gravitacional de la luz por el Sol, que produce un aumento de la distancia angular de una estrella relativa al Sol casi del orden de 1 s de arco).

La igualdad de caída de todos los graves en un campo gravitatorio es, para AE, una de las experiencias más universales que nos ha proporcionado la observación de la naturaleza; esta ley, sin embargo, no ha recibido, según él, su sitio merecido en los fundamentos de la física.

Esta ley empírica encuentra una interpretación satisfactoria, dice, si aceptamos que la física en un campo gravitatorio uniforme es indistinguible de la física en un sistema de referencia uniformemente acelerado y sin campo gravitatorio. Por tanto, si aceptamos que carece de sentido hablar de aceleración "absoluta", de igual modo que no cabe hablar de velocidad "absoluta" en la teoría ordinaria de la relatividad. La aceptación de esta hipótesis supone disponer de un principio que, de ser correcto, tendría una gran utilidad heurística, porque nos permite inferir propiedades de la física en campos gravitatorios uniformes simplemente a partir del comportamiento de sistemas libres en referenciales de aceleración constante.

Vemos, pues, cómo en este trabajo, ya en su sección 1, AE expone con su claridad habitual la hipótesis o suposición de equivalencia entre un campo gravitatorio uniforme y un campo de aceleración uniforme, refiriéndose también a ello, al final de la sección, como un principio de gran significado heurístico, si fuera cierto.[11]

Continúa AE con su exposición, y se pregunta si al aumentar la energía de un cuerpo en ΔE y por tanto, como nos asegura la RE, su masa inerte en $\Delta E/c^2$, ocurre lo mismo o no con su masa gravitacional. Tiene que ser así, si queremos que dos cuerpos arbitrarios sufran igual aceleración en un mismo campo gravitatorio. Y efectivamente, AE lo prueba acudiendo al principio de equivalencia: de forma breve, según este principio la masa inerte de un cuerpo en un sistema acelerado coincide con su masa gravitacional en un campo gravitatorio equivalente, y por tanto a toda variación de la primera debida a un cambio de su energía le corresponde idéntico cambio en su masa gravitacional. En otras palabra, una energía ΔE pesa como una masa $\Delta E/c^2$.

Para deducir el efecto de la gravedad sobre los relojes se basa en el efecto Doppler, y en la equivalencia aceleración-gravedad. Así infiere una vez más, ahora por otro camino, la relación

$$c(\mathbf{x}) \approx c_0(1 + \phi(\mathbf{x})/c^2) \tag{7}$$

---

[9] Carta a su amigo Habicht escrita a finales de diciembre de 1907. Ver, por ejemplo, A. Fölsing: ALBERT EINSTEIN: A BIOGRAPHY, translated from the German and abridged by E. Osers, Penguin Books, New York (1997).

[10] AE: *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes,* Ann. der Physik **35**, 898-908 (1911). Título en inglés: *On the influence of gravitation on the propagation of light.*

[11] Usa AE expresiones tales como *Hypothese von der Äquivalenz, Voraussetzung von der Äquivalenz, Annhame der Äquivalenz,* y se refiere al "principio" en estos términos: *Indem wir dies annehmen, erhalten wir ein Prinzip, das. falls es wirklich zutrifft, eine grosse heuristische Bedeutung besitzt.*

entre la velocidad de la luz en un punto **x** cualquiera del campo gravitatorio y la velocidad de la luz c_0 en el origen de coordenadas (donde se toma $\phi(0) = 0$), y deduce que la deflexión $\Delta\psi$ que sufre de la luz como consecuencia del campo gravitatorio, al moverse en este, viene dada por

$$\triangle\psi \approx -\frac{1}{c^2}\int(\partial_{\mathbf{n}}\phi)\mathrm{d}s = -\frac{1}{c^2}\int(\nabla\phi(\mathbf{x}))\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad (8)$$

en notación de Einstein (primera integral), y luego, actual (segunda integral). La integración tiene lugar sobre el camino recorrido. En el caso particular de un campo central, como por ejemplo, el producido por el Sol, $\phi = -G_{\mathrm{N}}M_{\odot}/r$, y por tanto la deflexión sufrida por un rayo de luz con parámetro de impacto Δ es

$$\begin{aligned}\triangle\psi &\approx \frac{G_{\mathrm{N}}M_{\odot}}{c^2}\int\frac{1}{r^2}\cos\theta\,\mathrm{d}s = \frac{G_{\mathrm{N}}M_{\odot}}{c^2\Delta^2}\int\cos^3\theta\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{G_{\mathrm{N}}M_{\odot}}{c^2\Delta}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\frac{G_{\mathrm{N}}M_{\odot}}{c^2\Delta}.\end{aligned} \qquad (9)$$

Con la masa del Sol, y paso rasante, resulta:

$$\triangle\psi \approx 2\frac{G_{\mathrm{N}}M_{\odot}}{c^2R_{\odot}} = 4.2434\times10^{-6} = 0.8753''. \qquad (10)$$

Este último resultado era ya conocido. Soldner lo había calculado en 1801, y publicado en 1804, con mecánica newtoniana; como todos los cuerpos caen igual en un campo gravitatorio, esta deflexión fue estimada por Soldner viendo cuánto se deflecta una partícula masiva arbitraria, a la velocidad de la luz pero con dinámica newtoniana, en incidencia rasante.[12]

De hecho, veremos que el valor anterior es justo la mitad del valor correcto obtenido con la teoría finalmente dada por AE para el campo gravitatorio en noviembre de 1915. El error se debe a que la forma de calcularlo por AE en 1907 incluye el retraso gravitacional de los relojes (distorsión gravitacional del tiempo), pero no la distorsión del espacio. Anima AE a los astrónomos a que intenten medir la deflexión anterior, aunque parezca aventurada la teoría subyacente; es importante saber, dice, si la tecnología es capaz de medir efectos tan pequeños de la influencia de la gravitación en la propagación de la luz.[13]

V. AÑO 1912

A. Trabajos de 1912. 1

Doc. 3, febrero 1912, del vol. 4 de los CPAE.[14] Por vez primera va a proponer AE una nueva ecuación para el campo gravitatorio, basándose en los resultados obtenidos en sus dos trabajos anteriores; al identificar, como hipótesis de trabajo, un campo gravitacional con un campo de aceleraciones, es decir, el principio de equivalencia,[15] AE ha tenido que renunciar, como hemos dicho, a la constancia de la velocidad de la luz. Se ha visto recompensado con una brillante deducción del efecto de la gravitación sobre la trayectoria de los rayos luminosos; y además le va a permitir ahora buscar nuevas ecuaciones para el campo gravitatorio. Es una época de duro esfuerzo; así se lo reconoce AE a un amigo: "trabajo como un caballo".[16]

En un campo gravitatorio uniforme, de intensidad γ según $-Oz$, la velocidad coordenada de la luz, en unidades en que la velocidad de la luz en un inercial y en vacío es c, satisface, como ya hemos visto antes,

$$c(x,y,z) = c_0\left(1+(\gamma/c^2)z\right), \qquad (11)$$

y por tanto es de laplaciano nulo:

$$\Delta c(\mathbf{x}) = 0. \qquad (12)$$

Cuando hay fuentes de materia a distancia finita, la ecuación de Poisson $\Delta\phi = 4\pi G_{\mathrm{N}}\rho$, junto con la relación que liga $c(\mathbf{x})$ con $\phi(\mathbf{x})$, conduce a

---

[12] J.G. von Soldner: *Ueber die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung, durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbei geht,* Berliner Astronomisches Jahrbuch 161-172 (1804). Título en inglés: *On the deflection of a light ray from its rectilinear motion, by the attraction of a celestial body at which it nearly passes by.*

[13] El original método usado por AE para este cálculo, basado en la dilatación gravitacional del tiempo, es completamente distinto al seguido por Soldner. Por eso las críticas de plagio lanzadas por el antisemita Lenard carecen de todo fundamento.

[14] AE: *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes,* Ann. der Physik **38**, 355-369 (1912). Título en inglés: *The Speed of Light and the Statics of the Gravitational Field.*

[15] *Äquivalenzhypothese,* o *Äquivalenzprinzip,* escribe por fin en este trabajo.

[16] *Ich arbeite wie ein Ross.*

$$\Delta c(\mathbf{x}) \approx (4\pi G_{\rm N}/c^2)\rho(\mathbf{x})c_0. \tag{13}$$

Siendo arbitrarias las unidades de medida del campo $c(\mathbf{x})$, que quedarán determinadas por la constitución del reloj que se elija para medir el tiempo en el origen, es de esperar que la ecuación para $c(\mathbf{x})$ sea homogénea, por lo que en el límite de campos débiles podemos adoptar con AE esta ecuación:

$$\Delta c(\mathbf{x}) = (4\pi G_{\rm N}/c^2)\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x}). \tag{14}$$

En nota a pie de página, sin embargo, se apresura a advertir que (12, 14) no pueden ser realmente válidas, y que serán corregidas en un próximo artículo.

Finaliza este trabajo AE hallando las ecuaciones de movimiento para una partícula en un campo gravitatorio estático. Para ello parte del movimiento libre (ausencia de gravedad) en el sistema acelerado en caída libre equivalente, y luego hace el cambio de coordenadas apropiado para pasar al sistema de referencia con campo gravitatorio estático. AE obtiene este resultado:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c^2(\mathbf{x})} = -\frac{1}{c(\mathbf{x})}\nabla c(\mathbf{x}), \tag{15}$$

de donde resulta esta constante del movimiento:

$$\frac{c(\mathbf{x})}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2(\mathbf{x})}}}, \tag{16}$$

con $v^2 := \dot{\mathrm{x}} \cdot \dot{\mathrm{x}}$.

B. Trabajos de 1912. 2

Doc. 4, 23 de marzo 1912, del vol. 4 de los CPAE.[17] Completa el anterior. Primero AE discute, en más profundidad que en el trabajo anterior, cómo su teoría del campo gravitatorio estático afecta a la ecuaciones de Maxwell. A continuación, analiza algunas cuestiones de termodinámica en esos campos gravitatorios, probando, por ejemplo, que en equilibrio termodinámico las temperaturas en dos puntos distintos son inversamente proporcionales a las velocidades de la luz en ellos:[18]

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{1+\phi_2/c^2}{1+\phi_1/c^2}. \tag{17}$$

Por último, modifica la ecuación en derivadas parciales que debe satisfacer $c(\mathbf{x})$ con el fin de que la fuerza gravitatoria, por unidad de volumen, sobre la propia materia fuente que crea el campo

$$\mathbf{f}_{\rm g}(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x}) = -(c^2/c_0)\rho(\mathbf{x})\nabla c(\mathbf{x}) \tag{18}$$

satisfaga

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{f}_{\rm g}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}^3x = 0, \tag{19}$$

y así salvar el principio de acción-reacción evitando que empiece a moverse espontáneamente en su campo gravitatorio un sistema estático de masas sujeto a una malla rígida sin masa.

Propone AE considerar, en lugar de (14), la ecuación

$$\Delta c(\mathbf{x}) - \frac{1}{2c(\mathbf{x})}|\nabla c(\mathbf{x})|^2 = 4\pi(G_{\rm N}/c^2)\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x}), \tag{20}$$

o equivalentemente,

$$\Delta\sqrt{c(\mathbf{x})} = \tfrac{1}{2}(4\pi(G_{\rm N}/c^2)\rho(\mathbf{x})\sqrt{c(\mathbf{x})}. \tag{21}$$

La inclusión del término no lineal en $c(\mathbf{x})$ es suficiente, pues entonces[19]

$$\mathbf{f}_{\rm g}(\mathbf{x}) = -c\rho(\mathbf{x})\nabla c(\mathbf{x}) \propto \left(\Delta\sqrt{c(\mathbf{x})}\right)\nabla\sqrt{c(\mathbf{x})}, \tag{22}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(\Delta\sqrt{c(\mathbf{x})}\right)\nabla\sqrt{c(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}^3x = 0, \tag{23}$$

suponiendo que el campo gravitatorio se anule en el infinito suficientemente deprisa.

La modificación no-lineal anterior equivale a tomar como fuente de gravitación la propia energía gravitacional.

---

[17] AE: *Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes,* Ann. der Physik **38**, 443-458 (1912). Título en inglés: *On the Theory of the Static Gravitational Field.*

[18] La relación que liga la temperatura con la gravedad se conoce como efecto Tolman-Ehrenfest, y se escribe como $T\sqrt{g_{00}}$ = const.

[19] Tomando como punto de referencia el infinito, donde se supone que los campos se anulan, podemos poner $c_0 = c$.

Al celebrarse el centenario de la publicación de este trabajo elaborado por AE durante sus años de estancia en la Universidad de Praga, se celebró en esta ciudad una conmemoración del mismo, en la que una de las conferencias versó sobre la comparación de este modelo con el posterior (y correcto) de AE de 1915.[20]

En una nota añadida en las pruebas de imprenta, AE vuelve a las ecuaciones (15) de una partícula en un campo gravitatorio descrito por $c(\mathbf{x})$, ya presentadas en el trabajo anterior, las reescribe en la forma equivalente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\dot{\mathbf{x}}/c(\mathbf{x})}{\sqrt{1-v^2/c^2(\mathbf{x})}}+\frac{m\nabla c(\mathbf{x})}{\sqrt{1-v^2/c^2(\mathbf{x})}}=0. \tag{24}$$

y señala que éstas (24) resultan de extremar la "acción"[21]

$$-m\int \mathrm{d}t\,\sqrt{c^2(\mathbf{x})-v^2},\quad v^2:=|\dot{\mathbf{x}}|^2, \tag{25}$$

con "lagrangiano" $L:=-m\sqrt{c^2(\mathbf{x})-v^2}$.

Cuando actúa además una fuerza exterior $\mathbf{F}(\mathrm{x})$, la ecuación anterior cambia a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\dot{\mathbf{x}}/c(\mathbf{x})}{\sqrt{1-v^2/c^2(\mathbf{x})}}+\frac{m\nabla c(\mathbf{x})}{\sqrt{1-v^2/c^2(\mathbf{x})}}=c^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{26}$$

admisible siempre que la fuerza sea conforme, como dice AE, al principio de energía, en el sentido de que la variación de la energía del móvil por unidad de tiempo sea igual a la potencia suministrada por la fuerza exterior:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mc\,c(\mathbf{x})}{\sqrt{1-v^2/c^2(\mathbf{x})}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}. \tag{27}$$

Resulta algo extraño que AE no comente las ecuaciones del movimiento, ni, por ejemplo, las aplique al problema de Kepler. Si lo hacemos, al aplicar las ecuaciones de movimiento anteriores al caso de una masa puntual en el campo gravitatorio central descrito por $c(r)$, producido por una masa M supuestamente puntual y situada en el origen, se obtienen orbitas planas (centralidad del campo) que, llevadas por simetría al plano ecuatorial, satisfacen

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}+u=\frac{e^2\partial_u(c(1/u))}{\ell^2u^2c^3(1/u)}, \tag{28}$$

donde $u = 1/r$, $e \approx c^2$ es la energía total del móvil por unidad de masa, y l el momento angular "relativista" de éste por unidad de masa. La elección pertinente $c(r) = c \exp(-1/2\ \bar{\kappa}/r)$, con $\bar{\kappa} := 2G_N M/c^2$, lleva a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}+u&=\frac{e^2\bar{\kappa}}{2(c\,\ell)^2}(1+\bar{\kappa}u)+O(\bar{\kappa}^3)\\&\approx\frac{\bar{\kappa}}{2(\ell/c)^2}(1+\bar{\kappa}u).\end{aligned} \tag{29}$$

Salvo las correcciones despreciadas, el sumando $\bar{\kappa}u$ del factor $(1 + \bar{\kappa}u)$ impide la ciclicidad en 2π de la orbita, produciendo un avance de perihelio que es 1/3 del propio de la RG. No es de extrañar esta diferencia, por cuanto las ecuaciones de campo (20, 21) solo afectan a la curvatura en el tiempo, sin alterar el espacio.

1. Nota sobre la deflexión gravitacional

Cabe preguntarse, ahora que ya se dispone de ecuaciones para el movimiento de partículas en un campo gravitatorio, si es posible deducir la deflexión de la luz a través del análisis del movimiento de la luz como un grave cualquiera.

Tenemos el lagrangiano (25); para fotones $e, l \to \infty$ de modo que $e^2/l^2 \to c^2/\rho^2$, donde ρ es el parámetro de impacto de la trayectoria de la luz en el campo gravitatorio en cuestión.

Un cálculo cuidadoso en campos centrales, como el del Sol, y lagrangiano (por unidad de masa) en coordenadas polares (y unidades $c = 1$)

$$L=-\sqrt{a(r)-b(r)\dot{r}^2-r^2\dot{\theta}^2-r^2(\sin\theta)^2\dot{\phi}^2}, \tag{30}$$

muestra que la deflexión viene dada, en orden dominante, por

$$\triangle\psi=\frac{\bar{\kappa}_\odot}{\rho}\,(\beta_1-\alpha_1), \tag{31}$$

[20] D. Giulini: *Einstein's "Prague field-equation" —another perspective—,* arXiv:1306.5966v1 [gr-qc].

[21] Nótese que dimensionalmente no es una acción. Como hará observar AE en el Doc. 7 del volumen 4, falta un factor constante con dimensiones de velocidad, que podríamos tomar como c (valor del campo $c(.)$ en el infinito).

donde α_1, β_1 son los coeficientes que miden las correcciones dominantes a grandes distancias en los comportamientos de $a(r)$, $b(r)$ respectivamente:

$$\begin{aligned} a(r) &= 1 + \alpha_1 \bar{\kappa}/r + \alpha_2 (\bar{\kappa}/r)^2 + ... \\ b(r) &= 1 + \beta_1 \bar{\kappa}/r + \beta_2 (\bar{\kappa}/r)^2 + ... \end{aligned} \tag{32}$$

En nuestro caso (25), $a(r) = \exp(-\bar{\kappa}/r)$ y $b(r) = 1$, con $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_\odot$, por lo que $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = 0$, y

$$\triangle \psi = \frac{\bar{\kappa}_\odot}{\rho}, \tag{33}$$

donde $\bar{\kappa}_\odot := 2G_N M_\odot/c^2$; coincide con el cálculo dado por aplicación del principio de Huygens.

2. *Nota sobre el avance de perihelios*

Del mismo modo, podemos analizar de modo general el avance de perihelios para una dinámica regida por un lagrangiano de tipo (30). Se llega a la siguiente ecuación básica para $u := 1/r$ en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, con energía total y momento angular, (relativista), ambos por unidad de masa, e, l, y en unidades $c = 1$:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \\ &u - Bu + \frac{1}{2}\bar{B} + \frac{\bar{B} - e^2 A\bar{B} - e^2 \bar{A} B}{2\ell^2 u^2}, \end{aligned} \tag{34}$$

donde $A(u) := 1/a(u^{-1})$, $B(u) := 1/b(u^{-1})$, $\bar{A}(u) := -a'(u^{-1})A^2(u)$, $\bar{B}(u) := -b'(u^{-1})B^2(u)$.

Introduciendo los desarrollos (32), tomando términos hasta $\bar{\kappa}^2$ inclusive, el análisis perturbativo usual con olvido de las frecuencias no resonantes conduce al siguiente avance del perihelio por órbita:

$$\triangle_{\text{órbita}} \phi \approx \frac{\bar{\kappa}_\odot^2}{(\ell/c)^2} \pi \left(\alpha_1^2 - \alpha_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_1\beta_1 \right). \tag{35}$$

En particular, en el caso de esta sección, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = 0$, y resulta

$$\triangle^{\text{escalar}}_{\text{órbita}} \phi \approx \frac{\bar{\kappa}_\odot^2}{(\ell/c)^2} 2\pi \frac{1}{4}, \tag{36}$$

mientras que, según veremos, para la RG de noviembre del 25 de noviembre de 1915, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 1$, y el resultado triplica el anterior:

$$\triangle^{\text{RG}}_{\text{órbita}} \phi \approx \frac{\bar{\kappa}_\odot^2}{(\ell/c)^2} 2\pi \frac{3}{4}. \tag{37}$$

C. Trabajos de 1912. 3, 4 y 5

Los restantes trabajos de AE en el año 1912 relativos a la gravitación son los siguientes:

- Doc. 7, julio 1912, del vol. 4 de los CPAE.[22]

  En esta nota AE considera un cuerpo P de masa m en el centro de una capa esférica C de radio R y masa M. Demuestra que la presencia de la capa esférica C produce un incremento de la masa inercial de P, y viceversa. Para AE, este importante resultado apoya la idea de Mach de que toda la inercia de un cuerpo es debida a la presencia de los demás cuerpos en el Universo, algo que la futura teoría dinámica de la gravitación deberá probar en toda su generalidad.

- Doc. 8, 4 de julio 1912, del vol. 4 de los CPAE.[23]
- Doc. 9, agosto 1912, del vol. 4 de los CPAE.[24]

VI. AÑO 1913

A. Trabajos de 1913. 1

Doc. 13, anterior al 28 de mayo 1912, del vol. 4 de los CPAE.[25]. Es conocido simplemente como el *Entwurf,*

[22] AE: *Gibt es eine Gravitationswirkung die der elektromagnetischen Induktionswirkung analog ist?,* Vierteljahrschrift für gerichtliche Medizin **44**, 37-40 (1912). Título en inglés: *Is There a Gravitational Effect Which Is Analogous to Electrodynamic Induction?*

[23] AE: *Relativität und Gravitation: Erwiderung auf eine Bemerkung von M. Abraham,* Ann. der Physik **38**, 1059-1064 (1912). Título en inglés: *Relativity and Gravitation. Reply to a Comment by M. Abraham.*

[24] AE: *Bemerkung zu Abraham's vorangehender Auseinandersetzung: Nochmals Relativität und Gravitation,* Ann. der Physik **39**, 704 (1912). Título en inglés: *Comment on Abraham's Preceding Discussion: Once Again, Relativity and Gravitation.*

[25] AE: *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und eine Theorie der Gravitation. I. Physikalischer Teil von A. Einstein II. Mathematischer Teil von M. Grossmann,* Zeitschrift für Mathematik und Physik **62**, 225-244, 245-261 (1913). Título en inglés: *Outline of a Generalized Theory of Relativity and of a Theory of Gravitation. I. Physical Part by A. Einstein II. Mathematical Part by M. Grossmann.*

"boceto", "diseño", "esbozo", o "ensayo". Marca el comienzo de una nueva forma de afrontar el problema de la gravitación, y que conducirá, tras sucesivos retoques, a las ecuaciones definitivas presentadas ante la Academia Prusiana de las Ciencias el 25 de noviembre de 1915.

Este trabajo consta de dos partes; una física, que escribe AE, y otra matemática, a cargo de su amigo Marcel Grossmann.

1. AE

Arranca AE la exposición del *Entwurf* proclamando su creencia, apoyada en la enorme precisión de los experimentos tipo Eötvös, en la proporcionalidad exacta entre las masas gravitacional e inercial, y su intento de reducirla a la equivalencia local[26] entre campos gravitatorios y campos de aceleraciones (hipótesis de equivalencia). A continuación, nos recuerda las ecuaciones para el movimiento de una partícula libre en la relatividad especial, que resultan de imponer

$$\delta \int \sqrt{\mathrm{d}s^2} = 0, \quad \mathrm{d}s^2 := c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{38}$$

o, si se prefiere,

$$\delta \int \mathrm{d}t\, L = 0, \quad L := -m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{39}$$

De aquí resultan como expresiones del momento y de la energía:[27]

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \partial_{\dot{\mathbf{x}}} L = m\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{c^2 - \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}}, \\ H &= \dot{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\dot{\mathbf{x}}} L - L = m\frac{c^2}{\sqrt{c^2 - \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Vimos en los trabajos anteriores de AE que en un campo gravitatorio la velocidad de la luz c depende de la posición a través del campo y que las ecuaciones para el movimiento siguen obteniéndose de (39), pero con $L = -m\sqrt{c(\mathbf{x})^2 - \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}$. El momento y energía siguen con las expresiones dadas arriba. Pero hemos perdido la invariancia bajo los cambios entre inerciales (diremos transformaciones de Lorentz, aunque AE no usa esa denominación).

Supongamos un cambio de coordenadas arbitrario $(t, x, y, z) \to (t', x', y', z')$. El elemento $\mathrm{d}s^2$, en las nuevas coordenadas, pasa a escribirse como

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= (\partial x^\alpha/\partial x'^\mu)(\partial x_\alpha/\partial x'^\nu)\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu \\ &=: g'_{\mu\nu}(x')\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu, \end{aligned} \tag{41}$$

donde $(x^0,x^1,x^2,x^3) := (ct, x, y, z)$, y $(x_0,x_1,x_2,x_3) := (ct, -x, -y, -z)$.

Las ecuaciones de movimiento en estas coordenadas generales (les quitaremos las primas y las escribiremos como (x^0,x^1,x^2,x^3)) se obtienen exigiendo que

$$\delta \int \mathrm{d}t\, L = 0,\ L := -m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}t)}; \tag{42}$$

el momento, la fuerza y la energía son

$$\begin{aligned} p_j &= \partial_{\dot{x}^j} L = -mg_{j\nu}(\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}s), \\ F_j &= \partial_{x^j} L = -\tfrac{1}{2}m(\partial g_{\mu\nu}/\partial x^j)(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s)(\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}t), \\ H &= p_0 := \dot{x}^j p_j - L = mg_{0\nu}(\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}s) \end{aligned} \tag{43}$$

con j =1, 2, 3. Con el punto indicamos derivada respecto de $t := x^0/c$.

AE pasa enseguida a advertir que las coordenadas ahora ya no tienen nada que ver con lo que miden reglas y relojes, y que en el *tensor métrico g* (él lo empieza llamando *tensor fundamental* y dice que es covariante de orden dos) tenemos ahora el campo gravitatorio, y en el momento y energía las componentes de un vector covariante. Conocidas las coordenadas y el tensor métrico, sí es posible calcular la distancia invariante entre dos puntos muy próximos del espacio-tiempo, en el sentido de que ds^2 no es sino el intervalo espacio-temporal de la relatividad especial que media entre los sucesos que tienen esas coordenadas muy próximas entre sí.

Continúa con la extensión de esa dinámica al caso de una distribución continua de masas. Introduce el tensor de energía-tensiones[28] (ignorando la presión)[29]

---

[26] Ignorando, por tanto, las fuerzas de marea, o términos no lineales en el desarrollo del campo gravitatorio.

[27] Recordemos que dimensionalmente haría falta un factor adicional c.

[28] AE la escribe con ds en lugar de dτ.

[29] Supone lo que hoy llamaríamos un fluido ideal sin presión. En notación moderna: $\Theta^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$, donde $u^\mu(x)$ es el campo de cuadrivelocidades del fluido que satisface $u^\mu u_\mu = c^2$, $\nabla_\mu u^\mu = 0$.

$$\Theta^{\mu\nu} := \rho_0 \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{44}$$

que hoy escribiríamos más explícitamente como

$$\Theta^{\mu\nu}(x) := \rho_0 \int \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\delta^4(x - x(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{45}$$

donde ρ_0 es la densidad propia (es decir, en un inercial local comóvil) de masa del fluido material, y escribe su ley de continuidad (que conduce a la de conservación de energía-momento)

$$\partial_\nu \left(\sqrt{|g|}g_{\mu\sigma}\Theta^{\sigma\nu}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma}\right)\Theta^{\sigma\nu} = 0. \tag{46}$$

En notación actual esta expresión adopta la forma equivalente y más concisa

$$\begin{gathered}\Theta_\mu{}^\nu{}_{;\nu} := \nabla_\nu \Theta_\mu{}^\nu = \\ \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\nu\left(\sqrt{|g|}g_{\mu\sigma}\Theta^{\sigma\nu}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma}\right)\Theta^{\sigma\nu} = 0,\end{gathered} \tag{47}$$

a través de la derivada covariante asociada a la métrica (conexión métrica o de Levi-Civita).

AE supondrá que esta ley de continuidad rige aunque el tensor del fluido material no sea necesariamente ideal.

La ecuación (47) contiene la influencia de la gravitación sobre los sistemas materiales; en particular, el segundo término en (46) muestra la acción explícita de la gravitación sobre el sistema material, que impide la conservación de la energía y momento de éste. La contribución que falta para equilibrar el balance la mostraremos luego.

En cuanto a las ecuaciones propias de la gravitación, AE supone que deben ser una generalización adecuada de la ecuación de Poissson $\Delta\phi = 4\pi G_N \rho$, algo del tipo

$$\Gamma_{\mu\nu} = \kappa\, \Theta_{\mu\nu}, \tag{48}$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}$ es una expresión diferencial de segundo orden en el campo g, que generalice $\Delta\phi$. Afirma sin embargo el autor que, desafortunadamente, no existe tal $\Gamma_{\mu\nu}$ que, además, sea covariante bajo cualquier cambio de coordenadas[30]. Por tanto, o bien hay que renunciar a que las ecuaciones sean de segundo orden, o bien a la covariancia general. Elige esta última vía como más oportuna, y guiado por la relatividad especial, limita el grupo de covariancia a ser el grupo lineal.

Bajo estas condiciones (covariancia exclusivamente bajo el grupo lineal), AE se da cuenta de que, si $A^{\mu_1 \dots \mu_n}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ es un campo tensorial contravariante arbitrario de orden n, entonces:

$$B^{\mu_1\cdots\mu_n\mu} := g^{\mu\nu}\partial_{x^\nu} A^{\mu_1\cdots\mu_n} \tag{49}$$

es un campo tensorial contravariante de orden n+1, llamado "gradiente" del campo $A^{\mu_1 \dots \mu_n}$, y

$$C^{\mu_1\cdots\mu_{n-1}} := \partial_{x^\mu} A^{\mu_1\cdots\mu_{n-1}\mu} \tag{50}$$

es un campo tensorial contravariante de orden $n-1$, llamado "divergencia" del campo $A^{\mu_1 \dots \mu_n}$.

La combinación de ambas operaciones permite definir el d'alembertiano (laplaciano en 4D con métrica tipo Lorentz) del campo $A^{\mu_1 \dots \mu_n}$.

$$(\Box A)^{\mu_1\cdots\mu_n} := \left(\partial_{x^\mu} g^{\mu\nu}\partial_{x^\nu}\right) A^{\mu_1\cdots\mu_n}, \tag{51}$$

que preserva la tensorialidad (bajo el grupo lineal). Estaría uno tentado de tomar

$$\Gamma_{\mu\nu} \propto \Box g_{\mu\nu},$$

pero sería un error (por lo que veremos enseguida); nótese que, sin necesidad de tocar las derivadas segundas, es posible añadir términos de la forma

$$\left(\partial_{x^\mu} g_{\alpha\beta}\right)\left(\partial_{x^\nu} g^{\alpha\beta}\right),$$

que originan tensores covariantes simétricos de orden 2, y además, cuando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(G_N)$ (con $\eta_{\mu\nu}$ el tensor métrico minkowskiano), son $O(G_N^2)$.

Con el fin de hallar $\Gamma_{\mu\nu}$, echamos mano de la ley de conservación; como $\Theta = \kappa^{-1}\Gamma$, (46) nos indica que

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma}\right)\Gamma^{\sigma\nu}$$

debe estar en el recorrido de la derivadas parciales (lo que AE llama *Differentialquotienten* o "cocientes diferenciales"). Como conocemos el término en $\Gamma_{\mu\nu}$ dominante en derivadas, a saber $\Box g_{\mu\nu}$, adecuadas integracio-

[30] Da el argumento para tal afirmación más adelante. Cree, erróneamente, que la covariancia general exige que las derivadas para formar el gradiente y luego la divergencia (y asi llegar a generalizar el operador laplaciano) han de ser necesariamente las derivadas covariantes, y se sabe que cualquier derivada covariante del tensor métrico es idénticamente nula.

nes por partes permiten llegar a la siguiente identidad (que halla Grossmann en la segunda parte del trabajo)

$$\begin{aligned}&\sqrt{|g|}g_{\mu\nu,\sigma}\,(\Delta^{\mu\nu}-\kappa\,\theta^{\mu\nu})=\\&\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g^{\tau\rho}{}_{,\beta}g_{\tau\rho,\sigma}\right)\\&-\tfrac{1}{2}\partial_\sigma\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g^{\tau\rho}{}_{,\alpha}g_{\tau\rho,\beta}\right),\end{aligned}\tag{52}$$

donde por $f_{,\alpha}$ indicamos $\partial_\alpha f := \partial_{x^\alpha} f$,

$$\begin{aligned}&\Delta^{\mu\nu}:=\\&\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}{}_{,\beta}\right)-g^{\alpha\beta}g_{\tau\rho}g^{\mu\tau}{}_{,\alpha}g^{\nu\rho}{}_{,\beta},\end{aligned}\tag{53}$$

y

$$\begin{aligned}&\theta^{\mu\nu}:=\\&-\frac{1}{2\kappa}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)g_{\tau\rho,\alpha}g^{\tau\rho}{}_{,\beta}.\end{aligned}\tag{54}$$

En consecuencia,

$$\Gamma^{\mu\nu}=\Delta^{\mu\nu}-\kappa\,\theta^{\mu\nu},\tag{55}$$

las ecuaciones del campo gravitatorio pueden escribirse como

$$\Delta^{\mu\nu}=\kappa\,(\Theta^{\mu\nu}+\theta^{\mu\nu}),\tag{56}$$

expresión esta ultima que indica, como remarca AE, que el propio campo gravitatorio es fuente de sí mismo a través de su tensor de energía-tensiones $\theta^{\mu\nu}$, tal como lo hace el resto de los agentes materiales a través de $\Theta^{\mu\nu}$, y la ley de continuidad queda en la forma global

$$\partial_\nu\left(\sqrt{|g|}g_{\sigma\mu}(\Theta^{\mu\nu}+\theta^{\mu\nu})\right)=0,\tag{57}$$

que indica la conservación de la energía y momento totales del sistema materia más gravitación.[31]

Pasa luego AE a hablar de la influencia del campo gravitatorio en los fenómenos físicos, sosteniendo que en las ecuaciones de todos, sin exclusión, debe intervenir $g_{\mu\nu}$, pues este influye y es influido por cualquier forma de momento-energía. Por ejemplo, el movimiento de cualquier punto material en un campo gravitatorio se determina por extremalidad de la distancia:

$$\delta\int \mathrm{d}s=0,\quad \mathrm{d}s^2:=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu,\tag{58}$$

y es invariante bajo cualquier cambio de coordenadas. Pero las ecuaciones hasta ahora obtenidas para el campo gravitatorio no lo son, y se desconoce bajo qué grupo de transformaciones son covariantes. Solo sabemos que lo son bajo cambios lineales. Para los campos de materia y radiación, AE propone formular sus ecuaciones de modo que sean totalmente covariantes bajo cualquier transformación, y como ilustración presenta las ecuaciones para el campo electromagnético, que escribe esencialmente como

$$\begin{aligned}&\Phi^{\mu\nu}{}_{;\nu}=j^\mu,\\&{}^*\Phi^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0,\end{aligned}\tag{59}$$

donde $\Phi^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico tal que $\sqrt{|g|}\Phi^{01} = E_x$, ..., $\sqrt{|g|}\Phi^{23} = B_x$, ..., y ${}^*\Phi^{\mu\nu}$ su dual, que Grossmann define en la segunda parte como

$${}^*\Phi^{\rho\sigma}:=\tfrac{1}{2}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\Phi^{\mu\nu},\tag{60}$$

y cuyas componentges son como las de $\Phi^{\mu\nu}$, pero con el intercambio $E_x \leftrightarrow -B_x$, $E_y \leftrightarrow -B_y$, $E_z \leftrightarrow -B_z$. El tensor $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ de Levi-Civita se define como

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}:=\sqrt{|g|}\delta_{\alpha\beta\mu\nu},\tag{61}$$

donde $\delta_{\alpha\beta\mu\nu}$ es ± 1 si $\alpha\beta\mu\nu$ se obtiene de 0123 por una permutación par (impar), y es 0 en los restantes casos[32].

Finaliza AE preguntándose si el paso de una teoría escalar a otra basada en el tensor métrico está justificada, dado sobre todo la complicación excesiva que el tratamiento ha experimentado con ello. Tras ciertos comentarios poco decisivos al respecto, concluye que la principal razón para abandonar una teoría escalar de la gravitación es que en ella el grupo de covariancia sería el de la relatividad especial, contra su firme convicción de que el grupo de covariancia debe ser mucho más grande; mas como no ha conseguido en este trabajo hallar cuál es, no está justificada su insistencia en este argumento.

---

[31] AE sostiene que la solución hallada para $\Gamma^{\mu\nu}$ y $\theta^{\mu\nu}$ es única. No es claro que así sea, pues no estipula claramente bajo qué condiciones rige esa unicidad, y se conocen otras identidades distintas de la de Grossmann, como señala J.D. Norton, *How Einstein Found his Field Equations: 1912-1915,* Historical Studies in the Physical Sciences **14**, 253-316 (1984). Tendría indudable interés científico-histórico saber qué predicción para el perihelio de Mercurio darían esas otras posibilidades abiertas en el espíritu del *Entwurf.*

[32] Realmente, solo en variedades orientables es definible globalmente tal campo tensorial de Levi-Civita.

2. Contribución de Marcel Grossmann

En esta parte matemática del trabajo conjunto *Entwurf,* Grossmann presenta a los físicos lectores los conceptos fundamentales de la geometría diferencial métrica, extraídos de los trabajos pioneros de Riemann, Christoffel, Ricci y Levi-Civita.[33] Presenta las derivaciones covariante y contravariante, las nociones de gradiente y divergencia y sus aplicaciones más inmediatas a la física (símbolos de Christoffel, tensor de Riemann, etc.), y demuestra algunas de las fórmula usadas por AE en la primera parte de este trabajo.

B. Trabajos de 1913. 2

Doc. 14, junio 1913, del vol. 4 de los CPAE.[34]

Importante documento de 52 páginas, hecho público en 1988 por la familia de Besso, y adquirido por un particular en subasta pública en 1996, en el que puede verse como Einstein y Besso analizaron si la teoría del campo gravitatorio que acabamos de exponer era capaz de explicar el avance del perihelio de Mercurio. Aunque el resultado fue poco satisfactorio, sirvió el esfuerzo entonces realizado para aplicarlo de nuevo más tarde a la teoría definitiva de la gravitación del año 1915.

Dada la dificultad de leer ese manuscrito, lleno de correcciones y de tachaduras, me he atrevido, llevado por la curiosidad, a rehacer personalmente los cálculos. Empieza todo con la obtención, por AE, del tensor métrico, en primer orden de aproximación, debido al campo gravitatorio del Sol:

$$(\partial_0^2 - \Delta) g^{\mu\nu} = \kappa \rho_0 \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{62}$$

que, en el caso estático, y teniendo en cuenta que

$$\kappa = 8\pi \frac{G_\mathrm{N}}{c^4}, \tag{63}$$

se reduce a la componente 00 con el resultado

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (2G_\mathrm{N} M_\odot / c^2 r)\, \delta_0^\mu \delta_0^\nu, \tag{64}$$

compatible (ver (7)) con el cambio de la velocidad de la luz ($c\,(x)= c\,\sqrt{g_{00}}$) de la teoría escalar.

Escribiendo un desarrollo en potencias de GN en la forma

$$g^{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} g^{\mu\nu}_{(n)}, \tag{65}$$

donde

$$g^{\mu\nu}_{(0)} = \eta^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu}_{(1)} = (2G_\mathrm{N} M_\odot / c^2 r =: \bar\kappa_\odot / r)\, \delta_0^\mu \delta_0^\nu, \tag{66}$$

y las correcciones de orden superior se suponen todas estáticas (independientes del tiempo), por serlo la fuente de la la ecuación (48), esta ultima permite ir calculando $g^{\mu\nu}_{(n)}$ sucesivamente, orden tras orden, resolviendo ecuaciones del tipo

$$\Gamma^{\mu\nu}_{(n)} = 0 \tag{67}$$

donde n =2, 3, ... En particular, para n = 2 se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} &- \Delta g^{00}_{(2)} + \frac{5}{4} \bar\kappa_\odot^2 \frac{1}{r^4} = 0, \\ &- \Delta g^{0j}_{(2)} = 0, \\ &- \Delta g^{ij}_{(2)} - \frac{1}{2} \bar\kappa_\odot^2 \frac{x^i x^j - \frac{1}{2} r^2 \delta^{ij}}{r^6} = 0, \end{aligned} \tag{68}$$

por lo que

$$\begin{aligned} g^{00}_{(2)} &= \bar\kappa_\odot^2 \frac{5}{8r^2}, \\ g^{0j}_{(2)} &= 0, \\ g^{ij}_{(2)} &= \bar\kappa_\odot^2 \frac{x^i x^j}{8r^4}. \end{aligned} \tag{69}$$

El cálculo de las correcciones de orden superior es bastante más pesado. Estos son mis resultados para los órdenes tercero y cuarto:[35]

---

[33] A diferencia de estos dos ultimos autores, y de lo que hoy habitual, usa Grossmann (y también AE) subíndices tanto para tensores covariantes como contravariantes, distinguiendo unos de otros por los tipos de letra con que denotan a los tensores (caracteres latinos para los covariantes, griegos para los contravariantes, góticos para los tensores mixtos).

[34] AE: *Das Einstein-Besso Manuskript.* Título en inglés: *Einstein and Besso: Manuscript on the Motion of the Perihelion of Mercury.*

[35] Me imagino que los términos logarítmicos no hubieran sido del agrado de AE.

$$\begin{aligned}
g^{00}_{(3)} &= \bar\kappa^3_\odot \frac{1}{3r^3},\\
g^{0j}_{(3)} &= 0,\\
g^{ij}_{(3)} &= \\
&\bar\kappa^3_\odot\left[\frac{1}{72r^3}\delta^{ij}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{1+5\log(r/\lambda)}{200r^5}(x^ix^j-\tfrac{1}{3}r^2\delta^{ij})\right].
\end{aligned}\tag{70}$$

$$\begin{aligned}
g^{00}_{(4)} &= \bar\kappa^4_\odot \frac{9233+240\log(r/\lambda)}{57600r^4},\\
g^{0j}_{(4)} &= 0,\\
g^{ij}_{(4)} &= \bar\kappa^4_\odot\left[\frac{1}{256r^4}\delta^{ij}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{-19+30\log(r/\lambda)}{4800r^6}\left(x^ix^j-\tfrac{1}{3}r^2\delta^{ij}\right)\right].
\end{aligned}\tag{71}$$

En las expresiones anteriores λ es una constante positiva, con dimensiones de longitud, indeterminada sin otra información adicional sobre la fuente, y cuya presencia se debe a la armonicidad, fuera del origen, de las funciones

$$r^{-5}(x^i)^2-\tfrac{1}{3}r^{-3} \;\text{ y }\; r^{-5}x^ix^j,\ i\neq j.$$

Con todo esto, ya sería posible escribir el lagrangiano para el movimiento de un cuerpo puntual hasta cuarto orden inclusive; mas no necesitaremos tanto, siéndonos suficiente conservar solo los términos hasta segundo orden inclusive. Teniendo en cuenta que por el teorema clásico del virial $(v/c)^2 \sim \bar\kappa_\odot/r$, se obtiene, para una partícula de masa unidad:

$$\begin{aligned}
L &:= -\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = -\sqrt{g_{00}+2g_{0i}\dot x^i+g_{ij}\dot x^i\dot x^j}\\
&= -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{\bar\kappa_\odot}{r}+\frac{3}{8}\frac{\bar\kappa^2_\odot}{r^2}}\ + O(\bar\kappa^3_\odot/r^3),
\end{aligned}\tag{72}$$

con $v^2 := |\dot{\mathbf{r}}|^2$.

1. *Avance de perihelios*

Con el fin de aligerar la notación, a partir de ahora tomaremos tácitamente a menudo unidades $c = 1$ en muchas fórmulas de desarrollo; sin embargo, reincorporaremos la constante c, también sin advertencia previa, en muchas expresiones finales, como por ejemplo, las candidatas a comprobación numérica. En cualquier caso, el lector siempre puede, por simples consideraciones dimensionales, restituir la c allí donde proceda.

El estudio del movimiento regido por L es ya rutinario. Trabajando en coordenadas esféricas, e introduciendo los momentos canónicos p_r, p_θ, p_ϕ, se ve enseguida que este ultimo es constante (la variable azimutal ϕ es cíclica); de las ecuaciones de Hamilton obtenemos expresiones para las derivadas segundas de las variables cinemáticas r, θ, ϕ, que nos permiten comprobar que la derivada temporal del momento angular $\mathbf{L}$, aunque no es nula, sí es proporcional a $\mathbf{L}$, por lo que el movimiento tiene lugar en un plano que pasa por el origen (el Sol). Lo tomaremos como plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) para simplificar el análisis posterior.

Para ese movimiento disponemos además de otra constante del movimiento, a saber la energía $H := p_r\dot r + p_\theta\dot\theta + p_\phi\dot\phi - L$ (pues el tiempo es variable cíclica). El movimiento en el plano ecuatorial obedece a este par de ecuaciones (ya de primer orden por la utilización de las leyes de conservación):

$$\begin{aligned}
p_\phi &:= \frac{r^2\dot\phi}{\sqrt{1-(\dot r^2+r^2\dot\phi^2)-\frac{\bar\kappa_\odot}{r}+\frac{3}{8}\frac{\bar\kappa^2_\odot}{r^2}}} = \ell,\\
H &:= \frac{\sqrt{1-\frac{\bar\kappa_\odot}{r}+\frac{3}{8}\frac{\bar\kappa^2_\odot}{r^2}}}{\sqrt{1-(\dot r^2+r^2\dot\phi^2)-\frac{\bar\kappa_\odot}{r}+\frac{3}{8}\frac{\bar\kappa^2_\odot}{r^2}}} = 1+\bar e,
\end{aligned}\tag{73}$$

donde l, $\bar e$ son el momento angular relativista por unidad de masa y la energía de ligadura (por unidad de (masa$\times c^2$)). De estas ecuaciones es inmediato obtener esta ecuación diferencial que relaciona r y ϕ:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{\ell^2}\left(\frac{(1+\bar e)^2}{1-\frac{\bar\kappa_\odot}{r}+\frac{3}{8}\frac{\bar\kappa^2_\odot}{r^2}}-1-\frac{\ell^2}{r^2}\right). \tag{74}$$

De aquí, haciendo $r = 1/u$, resulta

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \frac{1}{\ell^2}\left(\frac{(1+\bar e)^2}{1-\bar\kappa_\odot u+\frac{3}{8}\bar\kappa^2_\odot u^2}-1-\ell^2u^2\right), \tag{75}$$

y, tras derivación,

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}+u=\frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot}{2\ell^2}\frac{1-(3/4)\bar{\kappa}_\odot u}{\left(1-\bar{\kappa}_\odot u+(3/8)\bar{\kappa}_\odot^2u^2\right)^2}$$
$$=\frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot}{2\ell^2}\left(1+\frac{5}{4}\bar{\kappa}_\odot u+O((\bar{\kappa}_\odot u)^2\right). \qquad (76)$$

La integración con el primer término del segundo miembro es responsable de la elipse kepleriana

$$u=u_0(\phi):=\frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot}{2\ell^2}(1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0)), \qquad (77)$$

que coincide con la fórmula no relativista, salvo correcciones de orden v^2 y $\bar{\kappa}_\odot/a$ en la longitud de su semieje mayor a. La pequeñez frente a 1 del término correctivo (5/4) $\bar{\kappa}_\odot u$ da origen a un minúsculo avance del perihelio, que podemos estimar reemplazando ese término en la ecuación diferencial por su valor no perturbado (5/4) $\bar{\kappa}_\odot u_0$; tomando, para sencillez notacional, un origen de angulos de forma que $\phi_0 = 0$, tendremos

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}+u\approx$$
$$\frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot}{2\ell^2}\left(1+\frac{5}{4}\bar{\kappa}_\odot\frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot}{2\ell^2}(1+\epsilon\cos\phi)\right). \qquad (78)$$

La solución de esta ecuación es

$$u=\frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot}{2\ell^2}\times$$
$$\left(1+\epsilon\cos\phi+\frac{5\bar{\kappa}_\odot^2(1+\bar{e})^2}{16\ell^2}(2+\epsilon\,\phi\,\mathrm{sen}\,\phi)\right). \qquad (79)$$

De los dos sumandos proporcionales a $\bar{\kappa}_\odot^3$, el constante no afecta a la posición del perihelio y es ignorable; el que varía con ϕ crece secularmente aunque de forma muy lenta, y produce un avance del perihelio, pues

$$u\approx\frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot}{2\ell^2}\times$$
$$\left[\left(1+\epsilon\cos\phi+\frac{5\bar{\kappa}_\odot^2(1+\bar{e})^2}{16\ell^2}\epsilon\,\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\right)\approx \qquad (80)\right.$$
$$\left.\left(1+\epsilon\cos\left[\phi-\frac{5\bar{\kappa}_\odot^2(1+\bar{e})^2}{16\ell^2}\phi\right]\right)\right].$$

Luego el avance por órbita es

$$\triangle\phi=\frac{5}{16}\frac{\bar{\kappa}_\odot^2(1+\bar{e})^2}{(\ell/c)^2}2\pi=\frac{5}{2}\pi\frac{G_\mathrm{N}M_\odot/c^2}{a(1-\epsilon^2)}, \qquad (81)$$

y como el período del planeta es $T=2\pi\,(\bar{\kappa}_\odot/2)^{-1/2}a^{3/2}$ (suponemos en nuestro análisis que la masa del planeta es despreciable frente a la del Sol), el perihelio, en un siglo, avanzará

$$\triangle_{\mathrm{siglo}}\phi\approx\frac{5}{4}\left(\frac{G_\mathrm{N}M_\odot}{c^2a}\right)^{3/2}\frac{100\ \mathrm{al}}{a(1-\epsilon^2)}. \qquad (82)$$

En Relatividad General (RG) nos encontraremos con una fórmula similar, con la unica diferencia de que el factor primero 5/2 en (81) cambia a 6; esto, los valores numéricos del avance del perihelio en el modelo del *Entwurf* son un factor 5/12 menores que los que proporcionará la teoría definitiva de 1915. Concretamente, para Mercurio un avance por siglo de 17.9" frente a los 43" observados[36]. De esta tentativa frustrada nunca publicó nada AE; se lo mencionó a Sommerfeld en carta de noviembre 28, 1915, donde además le informa de que Droste (diciembre 1914) ya había también calculado y publicado esos 18" como consecuencia del *Entwurf*.

No es así como se calcula en el manuscrito de Besso-Einstein el avance del perihelio, sino integrando la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}=N(r)/D(r):=$$
$$\frac{\ell\sqrt{1-\bar{\kappa}_\odot/r+3\bar{\kappa}_\odot^2/8r^2}}{r^2\sqrt{(1+\bar{e})^2-(1+\ell^2/r^2)(1-\bar{\kappa}_\odot/r+3\bar{\kappa}_\odot^2/8r^2)}} \qquad (83)$$

consecuencia de (74). El denominador es la raíz cuadrada de un polinomio de cuarto grado en r, que en el caso de Mercurio tiene dos raíces reales grandes a_1, a_2 (las distancias al Sol del afelio y del perihelio, respectivamente), y dos raíces complejas conjugadas α_1, α_2 de módulo mucho más pequeño. Estas ultimas son, en excelente aproximación, solución de la ecuación de se-

[36] En el manuscrito en cuestión tanto Besso como Einstein se equivocan al alza en un factor 10 con la masa del Sol, lo cual produce un factor 100 de aumento en la estimación del avance del perihelio de Mercurio; luego se dan cuenta del error y lo corrigen, dando como predicción de la teoría el valor de 3.4×10^{-8} para el avance por semivuelta en fracciones de π. El valor de 17" aparece en el cuaderno de notas usado por AE en Zúrich; en él AE parte de la fórmula $\Delta\phi = 10\pi^3(a/cT)^2$ (en la que no considera la excentricidad) para el avance anómalo de Mercurio por orbita, que con sus datos $a = 57 \times 10^{11}$ cm, $T = 87$ días, $c = 3 \times 10^{10}$ cm/s, lleva a $\Delta\phi = 1.98 \times 10^{-7}$ rad. Multiplicando por $100 \times 365/87$ se tiene como avance por siglo 8.3×10^{-5} rad, es decir, los 17" antes mencionados. Teniendo en cuenta la excentricidad, $\Delta\phi = 10\pi^3(a/cT\sqrt{1-\varepsilon^2})^2$, y el resultado pasa a ser 18" por siglo.

gundo grado $r^2(1 - \bar{\kappa}_\odot/r + 3\bar{\kappa}_\odot^2/8r^2) = 0$. Por tanto podemos estimar fácilmente $a_1 + a_2 \approx -\bar{\kappa}_\odot/(2\bar{e}+\bar{e}^2) - (\alpha_1 + \alpha_2)$ y $a_1a_2 \approx -(l^2 + 3\bar{\kappa}_\odot^2/8)/(2\bar{e}+\bar{e}^2) - (a_1+a_2)(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2$. Calculando así a_1, a_2, y desarrollando $N(r)/\sqrt{(r-\alpha_1)(r-\alpha_2)}$ en potencias de $\bar{\kappa}_\odot$, se llega a una integral de la forma

$$\begin{aligned}\phi_{12} &:= \frac{2}{\sqrt{1-(1+\bar{e})^2}}\times \\ &\int_{a_1}^{a_2} \mathrm{d}r\, \frac{1}{r\sqrt{(a_2-r)(r-a_1)}} + O(\bar{\kappa}_\odot^3) \\ &= \frac{2\ell\pi}{\sqrt{(1-(1+\bar{e})^2)a_1a_2}} + O(\bar{\kappa}_\odot^3),\end{aligned} \tag{84}$$

para el incremento del angulo polar entre dos perihelios consecutivos. Desarrollando este resultado en potencias de $\bar{\kappa}_\odot$, y despreciando el resto $O(\bar{\kappa}_\odot^3)$, resulta finalmente

$$\phi_{12} = 2\pi + \left(\triangle\phi = \frac{5}{8}\pi\frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot^2}{(\ell/c)^2)}\right). \tag{85}$$

Si renunciamos a una fórmula analítica, la integración numérica de (83) lleva inmediatamente al resultado para Mercurio, teniendo cuidado con que la integral a calcular

$$\begin{aligned}\phi_{1,2} &= 2\int_{a_1}^{a_2} \frac{N(r)}{D(r)}\mathrm{d}r \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{2N(r)/\sqrt{1-(1+\bar{e})^2}}{\sqrt{(r-\alpha_1)(r-\alpha_2)(r-a_1)(a_2-r)}}\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{86}$$

presenta singularidades integrables en los extremos; la convergencia se mejora de forma radical mediante el cambio de variables $r \to \frac{1}{2}((a_1 + a_2) + (a_2 - a_1)\,\mathrm{sen}\,\rho)$, conduciendo inmediatamente en el caso de Mercurio al resultado

$$\Delta_{\text{siglo}}\phi = 17.91'', \tag{87}$$

tomando como datos numéricos los siguientes:[37]

$$\begin{aligned}&\bar{\kappa}_\odot = 2953.25008 \text{ m}, \\ &l^2 = 7.36080550 \times 10^{30}\,\text{m}^4\,\text{s}^{-2}, \\ &\bar{e} = -1.27494909 \times 10^{-8}, \\ &\#\,\text{rev/siglo} = 415.2019.\end{aligned} \tag{88}$$

2. *Efecto de la rotación solar*

Nuestro Sol gira lentamente en torno a un eje central prácticamente fijo (que tomaremos como eje *Oz*) con velocidad angular no homogénea; para estimar el efecto gravitacional de esta rotación simplificaremos a un Sol como esfera homogénea de radio R con giro uniforme de velocidad angular Ω constante.

Su tensor de energía-tensiones, aparte de la componente $\Theta^{00} \approx \rho_0 c^2$, tiene no nulas las componentes $\Theta^{0i} \approx \Theta^{i0} = \rho_0 c\dot{x}^i$. Ignoraremos las contribuciones en (velocidad)^2. Utilizando las ecuaciones del *Entwurf,* la determinación de $g^{0i}_{(1)}$ requiere la integración de

$$-\Delta g^{0i}_{(1)} = \kappa\Theta^{0i}. \tag{89}$$

Teniendo en cuenta que

$$(\Delta^{-1}f)(\mathbf{x}) = -(4\pi)^{-1}\int |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1} f(\mathbf{x}')\, d^3x', \tag{90}$$

escribiendo $\dot{\mathrm{x}} = \Omega \times \mathrm{x}$, y desarrollando $|\mathrm{x} - \mathrm{x}'|^{-1} = |\mathrm{x}|^{-1}(1 + |\mathrm{x}|^{-2}\,\mathrm{x}\cdot\mathrm{x}' + ...)$, resulta que, lejos del Sol,

$$g^{0i}_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa c I}{8\pi}|\mathbf{x}|^{-3}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x})^i = \frac{G_\mathrm{N}}{(c\,r)^3}(\mathbf{S}_\odot\times\mathbf{x})^i, \tag{91}$$

donde $I := \frac{2}{3}\int \rho_0(\mathrm{x}')|\mathrm{x}'|^2 \mathrm{d}x'^3$ es el momento de inercia del Sol (supuestamente esférico) respecto de su eje de rotación, $r := |\mathrm{x}|$, y $\mathbf{S}_\odot = I\,\Omega$ es el espín o momento angular intrínseco del Sol. Por otro lado, para la componente $g^{00}_{(1)}(\mathrm{x})$ tenemos el valor dado en (66).

Con esta información, podemos ya escribir como lagrangiano que determina el movimiento de un cuerpo puntual de masa unidad en el campo gravitatorio del Sol rotante

$$L = \sqrt{1 - v^2 - \frac{\bar{\kappa}_\odot}{r} - \frac{2A\,\Omega(y\dot{x} - x\dot{y})}{r^3}}, \tag{92}$$

donde $A := G_\mathrm{N} I/c^3$.

Puesto que despreciamos términos cuadráticos en $\bar{\kappa}_\odot$ y en A, podemos utilizar el lagrangiano simplificado

---

[37] G.V. Kraniotis, S.B. Whitehouse: *Compact calculation of the Perihelion Precession of Mercury in General Relativity, the Cosmological Constant and Jacobi's Inversion problem,* Class. Quantum Grav. **20**, 4817-4835 (2003), arXiv:astro-ph/0305181v4.

$$L \approx 1 - \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}\frac{\bar{\kappa}_\odot}{r} - \frac{A\,\Omega(y\dot{x} - x\dot{y})}{r^3}. \tag{93}$$

La simetría ecuatorial garantiza que las órbitas con posición y momento iniciales en el plano *Oxy* yacen totalmente en este plano, y su aceleración viene dada por

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{Ac}{\rho^3}\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\boldsymbol{\rho}} + \nabla \frac{\frac{1}{2}\bar{\kappa}_\odot c^2}{\rho}, \tag{94}$$

donde $\rho := (x, y, 0)$.

La simetría rotacional del campo invita a usar coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z. Las ecuaciones de Lagrange conducen a sus aceleraciones, y con ellas es fácil comprobar que tanto el momento $p_\chi := \partial L/\partial\dot{\phi}$ como el hamiltoniano $H := L - p_\rho \partial L/\partial\dot{\rho} - p_\phi \partial L/\partial\dot{\phi} - p_z \partial L/\partial\dot{z}$ son constantes del movimiento. En particular, y como antes, muestran que para una órbita que parte de un punto del plano ecuatorial, con velocidad inicial en ese plano, se tiene $\ddot{z} = 0$, y por tanto yace dicha orbita en ese plano. Limitándonos al estudio de los graves en el plano ecuatorial, la imposición $H = 1+\bar{e}, p_\phi = l$ nos permite obtener

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \\ &\frac{\rho^4}{(\ell + A\,\Omega/\rho)^2}\left(-\frac{(\ell + A\,\Omega/\rho)^2}{\rho^2} + 2\bar{e} + \frac{\bar{\kappa}_\odot}{\rho}\right).\end{aligned} \tag{95}$$

Cambiando $\rho \to 1/u$ y despreciando términos de segundo orden en $\bar{\kappa}_\odot, A, \bar{e}$ lleva a

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u \approx \frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot}{2\ell^2}\left(1 - 4\frac{A\,\Omega}{\ell}u\right). \tag{96}$$

La solución a esta ecuación próxima a la elipse kepleriana es, en la aproximación que estamos realizando,

$$u = \frac{(1+\bar{e})^2\bar{\kappa}_\odot}{2\ell^2}\Big(1 + \epsilon\cos\big(1 + (\bar{\kappa}_\odot A\,\Omega/\ell^3)\phi\big)\Big), \tag{97}$$

por lo que, en cada órbita, se produce un retroceso en el perihelio dado por

$$\triangle\phi \approx -2\pi\left(\bar{\kappa}_\odot A\,\Omega/l^3\right). \tag{98}$$

Reintroduciendo c,

$$\triangle\phi \approx -2\pi\frac{\bar{\kappa}_\odot A\,\Omega}{(l/c)^3} = -4\pi\frac{(G_\mathrm{N}M_\odot)(G_\mathrm{N}S_\odot)}{c^2l^3}. \tag{99}$$

Aplicado al caso de Mercurio, tomando como radio y velocidad angular del Sol sus valores ecuatoriales $R = 696\ 342 \times 10^3$ m, $\Omega = 2\pi/(24.47\text{día}) = 2.972 \times 10^{-6}$ rad/s, resulta este retroceso por órbita

$$\triangle\phi \approx -7.108 \times 10^{-11}\ \text{rad}, \tag{100}$$

que acumulado a lo largo de 1 siglo, alcanza el valor

$$\triangle\phi_\text{siglo} \approx -6.09\ \text{mas}. \tag{101}$$

Esta estimación peca de exceso, pues supone momento angular solar $\mathbf{S}_\odot$ de módulo $S_\odot = 1.15 \times 10^{42}$ kg m^2 s^{-1}, mientras que los datos heliosismológicos apoyan un valor notablemente inferior $S_\odot = 1.92 \times 10^{41}$ kg m^2 s^{-1}, para el cual[38]

$$\triangle\phi_\text{siglo} \approx -0.903\ \text{mas}. \tag{102}$$

La fórmula (91) difiere de lo que la RG predice; es justamente la mitad del valor correcto que puede verse en el libro clásico de Weinberg;[39] otro tanto ocurre con el resultado final (99). Por eso las estimaciones precedentes a través del *Entwurf* deben multiplicarse por 2 para igualar los obtenidos con las ecuaciones correctas de la RG.

C. Trabajos de 1913. 3

Doc. 15, 9 de septiembre 1913, del vol. 4 de los CPAE.[40]

Es una nota resumiendo las características de su modelo con Grossmann. Concluye señalando que su modelo implica que el concepto de inercia no es algo intrínseco de un cuerpo, sino de su interacción con los demás cuerpos, tal como habían mantenido antes Mach y otros por razones epistemológicas. (Posiblemente AE tenía aquí en mente sus resultados sobre efectos gravitacionales de masas rotantes).

---

[38] Este resultado es del orden de magnitud del que se obtiene en RG como consecuencia del achatamiento solar.

[39] S. Weinberg: Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley 1972.

[40] AE: *Gravitationstheorie,* Schweizerische Naturforschende Gesellschaft. Verhandlungen **96**, Teil 2, 137-138 (1913). Título en inglés: *Theory of Gravitation.*

D. Trabajos de 1913. 4

Doc. 16, 9 de septiembre 1913, del vol. 4 de los CPAE.[41]

Texto de una conferencia, donde se exponen las bases físicas de su teoría de la gravitación elaborada con el apoyo matemático de Grossmann. Empieza señalando la proporcionalidad entre masa inerte y masa gravitacional que el experimento de Eötvös sostiene con gran precisión (10^{-7} en aquella época), y que invita a formular una *hipótesis de equivalencia* entre campos gravitatorios y campos de aceleración con implicaciones muy notables sobre la influencia de la gravedad en los procesos físicos, tales como el desplazamiento gravitacional al rojo y la deflexión gravitacional de la luz, cuya verificación servirá para ver si esa hipótesis es mantenible o no.

Tras presentar su teoría según las líneas expuestas en el trabajo con Grossmann, AE termina haciendo hincapié en que la relatividad de la inercia, el hecho de que las masas inerciales dependan del movimiento acelerado en relación con las masas circundantes, es uno de los pilares básicos de su teoría.

E. Trabajos de 1913. 5

Doc. 17, 23 de septiembre 1913, del vol. 4 de los CPAE.[42]

Interesante conjunto de reflexiones de carácter histórico y científico de AE en torno a la relatividad y al fenómeno gravitatorio, presentadas en una célebre conferencia que pronunció en Viena.

El problema de la gravitación, dice AE, fue el primero en recibir con Newton una formulación teórica de éxito predictivo indiscutible. Pero los desarrollos posteriores de la física del electromagnetismo, con experimentos como los de Hertz sobre la finitud de la velocidad de propagación de los efectos eléctricos, y la unificación teórica de la electricidad y el magnetismo debida a Maxwell, influyeron tanto en la mentalidad de los físicos que difícilmente podían estos seguir aceptando una formulación de la gravitación en la que ésta actúa a distancia de forma instantánea. La teoría de la relatividad se basa en que no existe posibilidad alguna en la naturaleza de enviar señales a velocidad superior a la de la luz en vacío; pero con la gravitación newtoniana sería posible que un cuerpo experimentase de forma instantánea aceleraciones provocadas por la acción atractiva de masas muy lejanas.

La relatividad no solo nos obliga a cambiar la teoría newtoniana; también, y afortunadamente, sugiere restricciones a tal cambio, advirtiéndonos de que las nuevas leyes de la gravitación deben incorporar, en su formulación, la coordenada tiempo igual que las otras tres coordenadas espaciales, salvo cuestiones de signo, tal como Minkowski nos enseñó en su presentación del marco espacio-temporal.

Tras esto, pasa AE a enunciar varios postulados que en su opinión podrían ser adoptados, no necesariamente todos, por la correcta teoría de la gravitación:

1. Conservación de energía-momento.

2. Igualdad de masas inerte y gravitacional para sistemas aislados.

3. Validez de la teoría de la relatividad en un sentido restringido: covariancia de las leyes bajo cambios de coordenadas Lorentz.

4. Las leyes observables de la naturaleza no dependen del valor absoluto del potencial gravitatorio (o potenciales gravitatorios): las relaciones observables no cambian si muevo el laboratorio a otra región con un potencial uniforme y estático distinto.

Del primero cree AE que nadie dudará. El segundo está bien fundado en el experimento de Eötvös; las masas inerte y gravitacional de un sistema aislado son iguales y dependen solo de su contenido total de energía (incluída la gravitatoria). El último es para AE el más discutible, y se basa solo en la supuesta simplicidad de las leyes de la naturaleza.

[41] AE: *Physikalische Grundlagen einer Gravitationstheorie,* Naturforschende Gesellschaft in Zürich. Vierteljahrsschrift **58**, 284-290 (1914). Título en inglés: *Physical Foundations of a Theory of Gravitation.*

[42] AE: *Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems,* Physikalische Zeitschrift **14**, 1249-1262 (1913). Título en inglés: *On the Present State of the Problem of Gravitation.*

Pasa AE a exponer dos posibles teorías de la gravitación, las "más naturales" según él: la escalar de Nordström, y la suya con Grossmann (el ya comentado *Entwurf*).

1. Teoría de Nordström

En este modelo se mantiene la estructura Minkowski

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{103}$$

con c constante, y el movimiento de un grave de masa m en un campo gravitatorio se determina exigiendo que

$$\delta \int (-m\phi)\,d\tau = 0, \tag{104}$$

donde $\phi(\mathbf{x},t)$ es un potencial escalar, con dimensiones de (velocidad)^2, que describe el campo gravitatorio.[43]

Las ecuaciones resultantes son

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\gamma^{-2} c^2\,\nabla \log(\phi/c^2), \tag{105}$$

y como momento-energía del grave resulta

$$\mathbf{p} = (\gamma/c^2)\,m\phi\,\dot{\mathbf{x}}, \quad E = \gamma m\phi \tag{106}$$

donde $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

La expresión del momento indica que la masa inerte efectiva del grave es $m\phi/c^2$, y por tanto varía con el potencial ϕ, siendo mayor cuanto más alejadas están las masas que atraen a nuestro grave.

Como ecuación para el campo, AE escribe

$$\phi\,\Box\phi = 8\pi G_{\mathrm{N}} T^{\mu}_{\mu}, \tag{107}$$

con $\Box := \partial^{\mu}\,\partial_{\mu}$.

Se conserva la energía? En un trabajo anterior (Doc. 13), AE había afirmado que una teoría escalar relativista del campo gravitatorio era inaceptable porque violaba la ley de conservación de la energía. Sin embargo, AE encuentra para (107) un tensor de energía-tensiones con divergencia nula.[44,45] Cambia ahora de opinión, y se desdice de aquello, reconociendo que la consideración de mediciones de longitudes y tiempos con patrones físicos, "naturales", frente a mediciones "geométricas" basadas en la métrica de Minkowski, lleva a modificar su antigua conclusión, y a restaurar la conservación de la energía.

2. ¿Por qué hay que extender el principio de relatividad?

En un tren que se mueve uniformemente, con las ventanillas tapadas, no hay forma de saber si se mueve o no; de aquí el principio de relatividad del movimiento uniforme.

Pero si notamos sacudidas en el movimiento, sabemos que el movimiento no es uniforme. ¿Lo sabemos de verdad? Cuidado. Supongamos que estamos en una nave espacial sin vistas al exterior, y que al soltar objetos desde un punto, estos se mueven siempre en una misma dirección, llegando a la pared opuesta en el mismo tiempo. Podríamos concluir que hay un campo gravitatorio uniforme, producido por algún gran astro exterior, que origina esa caída. Pero también podríamos pensar que una fuerza exterior empuja aceleradamente la nave en dirección opuesta a la de la caída de los objetos. No podemos experimentalmente decidir entre ambas interpretaciones. El experimento de Eötvös soporta esa imposibilidad, al probar que las masas inertes y gravitacionales son proporcionales, de igual modo que el de Michelson garantiza la imposibilidad física de distinguir el reposo del movimiento uniforme. El no poder distinguir entre sistemas de referencia acelerados y sistemas no acelerados pero con campos gravitatorios nos lleva a dudar del carácter absoluto de la aceleración, del mismo modo que rechazamos el carácter absoluto de la velocidad. Por ello se propugna la extensión del principio de relatividad a los sistemas de referencia acelerados, es decir, a suponer la covariancia de las leyes físicas bajo cambios de coordenadas no lineales. ¿Cualesquiera que sean éstas? Dada la ignorancia sobre

[43] En realidad, tal ϕ debería ser $c^2 + \phi$, o $\phi - \phi_0$, con ϕ_0 un potencial en un punto de referencia, por ejemplo, en el infinito.

[44] Hoy nos parece casi evidente; pero pensemos que en 1913 aún no había visto la luz el teorema de Noether (demostrado en 1915, y publicado en 1918).

[45] Una discusión detallada de esta interesante cuestión puede verse en este trabajo de D. Giulini: *What is (not) wrong with scalar gravity?,* Studies in History and Philosophy of Modern Physics **39**, 154-180 (2008).

la física de la gravitación, lo más expedito es imponer la covariancia bajo cualquier cambio de coordenadas.

Termina AE esta subsección advirtiendo que al igual que no es posible cambiar un sistema de referencia a otro que se mueva uniformemente con respecto al anterior, y en el que un sistema de partículas con distintas velocidades pasen a tener velocidades nulas todas ellas, tampoco es posible siempre anular un campo gravitatorio arbitrario mediante un cambio arbitrario de sistema de referencia.[46]

3. *Defensa de su teoría*

Si aceptamos que cualesquiera coordenadas son admisibles, necesitaremos saber cómo se expresa en ellas el movimiento; en ausencia de gravitación, las partículas libres se mueven según geodésicas de la métrica de Minkowski $ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, y como esta pasa a tener la forma $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ en un sistema arbitrario de referencia, las ecuaciones del movimiento libre adoptan esta forma general

$$\delta \int \mathrm{d}s = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu} = 0. \tag{108}$$

Lo mismo ocurrirá en presencia de gravitación, si creemos que gravitación y aceleración son indistinguibles. Las 10 componentes $g_{\mu\nu}$ expresan la acción gravitatoria, y hacen el papel de *potenciales de gravitación.*

Dado un fluido incoherente de masas,[47] de densidad de masa en reposo ρ_0 constante, su tensor de energía-tensiones es (en notación actual)

$$\Theta^{\mu\nu}(x) = \rho_0 u^\mu(x) u^\nu(x), \tag{109}$$

donde $u^\mu(x)$ es el campo de cuadrivelocidades del fluido; en caída libre $u^\nu{}_{;\nu} = 0$, y por tanto la divergencia covariante del tensor se anula:

$$\Theta^{\mu\nu}{}_{;\nu}(x) = 0, \tag{110}$$

o, si se prefiere,

$$|g|^{-1/2}[|g|^{1/2}\Theta^{\mu\nu}]_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Theta^{\alpha\beta} = 0, \tag{111}$$

que equivale a la expresión (47).

F. Trabajos de 1913. 6

Doc. 18, 23 de septiembre 1913, del vol. 4 de los CPAE.[48] Es la discusión que siguió a la conferencia de AE cuyo texto recoge la publicación precedente. Mie expresa su sorpresa porque su modelo de teoría de gravitación no ha sido citado por AE en esa exposición, lo que este justifica diciendo que de partida ese modelo viola la proporcionalidad entre masas inerte y gravitacional magníficamente refrendada por el experimento de Eötvös y que le ha servido de base a AE para sus investigaciones sobre la gravitación. Mie insiste en que la teoría de AE también viola esa proporcionalidad, como demostrará Mie en un futuro trabajo; AE postpone sus comentarios a esta afirmación de Mie hasta leer dicho trabajo.

A la pregunta de otro sobre si está seguro de que la deflexión gravitacional de la luz que predice será detectable en la práctica, AE asegura que, en opinión de astrónomos expertos, así será muy probablemente, aunque, insiste, habrá que esperar a realizar la observación.

Born le pregunta si realmente los efectos gravitacionales se mueven a la velocidad de la luz. AE responde que sí, como muestra claramente un desarrollo perturbativo de su teoría.

Finalmente, Mie expresa sus dudas sobre la predicción einsteiniana del desplazamiento gravitacional al rojo; en su modelo no existe tal desplazamientro. AE le asegura que sí, tanto en su teoría como en la de Nordström, pues, dice, un oscilador que transportemos al Sol oscila más despacio en la superficie de éste que en la de la Tierra.[49]

---

[46] Las fuerzas de marea, como el tensor de Riemann, si no se anulan idénticamente en una carta de coordenadas, no pueden llevarse a cero, en regiones finitas, en otras coordenadas.

[47] Lo que hoy llamamos un fluido perfecto sin presión.

[48] AE: *Diskussion,* Physikalische Zeitschrift **14**, 1262-1266 (1913). Título en inglés: *Discussion*.

[49] En efecto, la expresión (2) para la dilatación gravitacional de los tiempos propios mide también la relación de frecuencias de los relojes patrón que miden esos lapsos de tiempo.

G. Trabajos de 1913. 7

Doc. 21, anterior al 21 de octubre 1913, del vol. 4 de los CPAE.[50]

1. Relatividad Especial

Empieza AE por describir los experimentos base de la relatividad especial. Al principio se creía que la luz era movimiento del éter; después se vió que era más bien un movimiento en el éter, con este como soporte de las ondas electromagnéticas (EM). El experimento interferométrico de Fizeau reveló que el éter no participaba del movimiento de la materia, pues ese movimiento no arrastraba totalmente a la luz con él, sino solo parcialmente. Sirvió esto para que Lorentz propusiera su teoría del éter estacionario, un éter que no afecta para nada a los movimientos de la materia, ni esta a la leyes del electromagnetismo, si no es como portadora de cargas eléctricas.

Ahora bien, el éter estacionario de Lorentz, que postula la existencia de sistema de referencia singulares K (sin movimiento relativo entre ellos) en que el éter está es reposo, y la luz se mueve en ellos con movimiento rectilíneo y uniforme a velocidad fija c, está en conflicto frontal con el *principio de relatividad,* según el cual existe una colección de sistemas de referencia privilegiados, los sistemas llamados inerciales, que son equivalentes para describir no solo las leyes de la mecánica, sino todas las leyes de la física. Parece que claro que esa constancia de la velocidad de la luz no puede darse en todos los inerciales.

Ahora bien, el éxito de la teoría de Lorentz era tal que los físicos hubieran dejado antes el principio de relatividad que el del éter estacionario, a no ser por el experimento de Michelson. La Tierra, en su movimiento en torno al Sol, no puede estar todo el tiempo en reposo respecto del éter estacionario; en algún momento del año debe moverse repecto de éste con una velocidad v de unos 30 km/s. Se propusieron multitud de experimentos encaminados a detectar tal velocidad. Lorentz demostró que ninguno de ellos hallaría señales del orden de v/c; Michelson propuso uno sensible a $(v/c)^2$. Pero el resultado fue sorprendentemente negativo. Lorentz y FitzGerald explicaron el resultado nulo sugiriendo que las distancias longitudinales (paralelas a la velocidad de la Tierra) sufrían una contracción que justo cancelaba el efecto esperado.

De este aparente callejón sin salida es posible salir (AE, 1905) cambiando la estructura del espacio/tiempo, lo que permite compatibilizar el principio de constancia de la velocidad de la luz en todos los inerciales con el principio de relatividad, así como salvar la teoría EM de Maxwell-Lorentz, y a la vez la nulidad del experimento de Michelson. Pago a cambio: arrojar de la física el éter, pues en el nuevo marco conceptual no hay ningún inercial distinguido.

AE continúa hablando del tiempo, y del espacio, en la relatividad especial, de los éxitos del nuevo esquema (Doppler, aberración, Fizeau,...), así como de la equivalencia masa/energía.

Concluye esta primera parte de la exposición mencionando un posible límite de su relatividad especial, que solo será válida, cree, en campos gravitatorios muy débiles, de influencia despreciables en la estructura de aquella.

2. Relatividad General

Los inerciales de la relatividad especial son aquellos referenciales para los que las leyes de inercia (de Galileo, esto es, movimientos uniformes de todos los cuerpos libres) y de constancia de la velocidad de la luz en vacío son válidas.

Pero hay ciertas consideraciones que nos llevan a extender la relatividad. En una región sin campo gravitatorio, pero con un sistema de referencia con aceleración $\mathbf{a}$ respecto de un inercial, los cuerpos libres se mueven como lo harían en un inercial en presencia de un campo gravitatorio de intensidad $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$. No hay forma de distinguir entre un campo gravitatorio uniforme y un cam-

[50] AE: *Die Relativitätstheorie*, Die Kultur der Gegenwart. Ihre Entwicklung und ihre Ziele. Hinneberg, Paul, ed. Part 3, sec. 3, **1**, Physik, Warburg, Emil, ed. Leipzig: Teubner, 703-713 (1915), la primera parte de este trabajo; 794-797 (1925), para la segunda parte. Título en inglés: *Theory of Relativity.*

po de aceleración uniforme. El experimento de Eötvös respalda esta afirmación. De aquí surge la intención de extender el principio de relatividad a cualquier sistema de referencia, en el sentido de que la expresión de las leyes físicas debe ser invariante bajo todo cambio de coordenadas. Y de paso, esto tal vez nos proporcione en particular una nueva teoría de la gravitación.

Pero no todo campo gravitatorio es simulable mediante un cambio de coordenadas adecuado. Solo en regiones infinitesimalmente pequeñas.[51] En cualquier punto, existe un pequeño entorno local y coordenadas tales que en ellas desaparece en primer orden la gravitación y es válida la relatividad especial. El paso a coordenadas cualesquiera nos proporciona información sobre las ecuaciones que regirán los campos gravitatorios generales.

En particular, las líneas rectas de la luz en ausencia de gravitación aparecen curvadas en coordenadas arbitrarias, lo que indica la deflexión gravitacional de los rayos luminosos, y que la velocidad de la luz puede cambiar localmente. Esto se vió confirmado en el eclipse de 1919.

La nueva teoría sugiere también que la gravitación es un fenómeno mucho más complejo de lo que revela la teoría de Newton, pues, si por ejemplo, pasamos a un sistema de referencia en rotación, las fuerzas que surgen (Coriolis) dependen no solo de las posiciones sino también de las velocidades.

Finalmente, la gravitación afecta a la estructura misma del espacio-tiempo (reglas y relojes), por lo que la relatividad general incide de manera más profunda en las propias bases de la física.

A pesar de esto, su influencia práctica es poco considerable, con efectos pequeños (como la deflexión de la luz y el avance del perihelio de Mercurio), y otros aún no observados, como el desplazamiento gravitacional hacia el rojo.

H. Trabajos de 1913. 8

Doc. 24, 11 de diciembre 1913, del vol. 4 de los CPAE.[52]

AE responde con gran detalle a una interesante pregunta del físico matemático Hans Jacob Reißner relativa a su famosa conferencia en Viena (Doc. 17), a saber, cómo afecta la gravitación a la propia autoenergía del campo gravitatorio escalar considerado por AE en sus primeros ensayos sobre una nueva teoría nolineal de la gravitación.

AE demuestra que, como consecuencia de la ley de continuidad satisfecha por el tensor de energía-tensiones total (campo gravitatorio y sistema material), la componente energética del campo gravitacional contribuye a la gravedad y a la inercia del mismo modo que lo hace la parte material.

VII. AÑO 1914

Trabajos de 1914. 1

Doc. 25, 24 de enero 1914, del vol. 4 de los CPAE.[53]

Aquí AE atiende las críticas de Mie sobre su trabajo con Grossmann (*Entwurf*), que encuentra justificadas porque, según él mismo admite, no aclaró lo suficiente ciertos conceptos, quizás no los tenía claros entonces. Presenta los puntos fundamentales de aquél trabajo, y pide que se acepte el actual como punto de partida para cualquier discusión sobre sus ideas acerca de la formulación relativista de la gravitación:

1. La teoría usual de la relatividad se basa en el principio de constancia de la velocidad de la luz, que privilegia unos sistemas de referencia, los inerciales, sobre todos los demás. Pero tal principio, aunque muy importante, no puede AE creer que sea *exacto,*[54] ya que no es posible que haya ningún fenómeno, en este caso la velocidad de la luz, insensible al resto de sucesos

---

[51] De modo equivalente, y en términos más técnicos, podemos eliminar los campos gravitatorios en primer orden de aproximación, pero los términos cuadráticos y superiores persistirán en general, dando lugar a las fuerzas intrínsecas de marea.

[52] AE: *Nachträgliche Antwort auf eine Frage von Herrn Reissner,* Physikalische Zeitschrift **15**, 108-110 (1914). Título en inglés: *Supplementary Response to a Question by Mr. Reissner.*

[53] AE: *Prinzipielles zur verallgemeinerten Relativitätstheorie und Gravitationstheorie,* Physikalische Zeitschrift **15**, 176-180 (1914). Título en inglés: *On the Foundations of the Generalized Theory of Relativity and the Theory of Gravitation.*

[54] *...und doch kann ich nicht an seine genaue Gültigkeit glauben.*

del universo. Se plantea entonces la cuestión de cómo hacer una teoría de relatividad sin constancia de la velocidad de la luz.

2. La expresión $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}$ para el elemento de arco es invariante bajo un cierto grupo de transformaciones pseudo-ortogonales, y la exigencia $\delta\int \mathrm{d}s = 0$ conduce a las trayectorias de los movimientos libres. En coordenadas cualesquiera, el elemento de arco pasa a ser $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$, y el movimiento libre sigue obteniéndose del mismo modo con $\delta\int \mathrm{d}s = 0$. El principio de equivalencia nos impele a suponer que esto último es cierto también en presencia de campos gravitatorios, cuya existencia afectará al elemento de arco.[55] El campo gravitatorio está representado por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

3. Falta por determinar las ecuaciones que rigen la evolución de g, dinamizada por el tensor de energía-tensiones (generalización de la densidad de materia). Hay que extender la ecuación de Poisson de forma totalmente covariante.

4. Mantiene AE que no han logrado encontrar tales ecuaciones, y que sus oponentes hallan en este hecho la trampa mortal para su teoría. Pero, sostiene, están equivocados.

5. Ellos han conseguido un sistema de ecuaciones que es válido solo en referenciales especiales. Puede ocurrir que, i/ o bien las ecuaciones encontradas son especialización de ecuaciones existentes que son covariantes, ii/ o bien no existe una generalización covariante. En el caso ii/ las ecuaciones no dicen nada sobre las cantidades físicas que relacionan, sino que solo restringen el sistema de coordenadas. Para que expresen relaciones válidas entre observables, es preciso que se dé i/. Por tanto, si no se sabe si i/ es cierto o no, lo único que puede decirse de las conclusiones obtenidas mediante ii/ es que a lo mejor carecen de validez física. Pero, dice AE, nadie puede seriamente pensar esto de nuestros resultados.

6. El hecho de que AE y MG no hayan sido capaces de hallar una expresión covariante no es razón suficiente para que se acepten sus ecuaciones válidas solo en un sistema especial de de coordenadas, podría uno decir. Pero hay dos razones de peso a considerar:

6.1/ Si el sistema de referencia puede ser cualquiera, entonces la fuente $T_{\mu\nu}$ no determina por completo al campo tensorial $g_{\mu\nu}$. Supongamos que conocemos un par $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ solución de las ecuaciones; y supongamos además que $T_{\mu\nu} = 0$ en un abierto Ω no vacío. Cambiemos de sistema de coordenadas, de modo que no se tocan para nada los puntos del exterior de Ω, y solo se cambia en el interior. Sean $g'_{\mu\nu}$, $T'_{\mu\nu}$ los campos transformados. Serán solución de las ecuaciones (por la supuesta covariancia de éstas); y evidentemente $T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} = 0$ en todos los puntos de Ω, mientras que $T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ fuera de Ω y generalmente $g'_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}$ en Ω. Por tanto la fuente no determina unívocamente al campo métrico.[56] Si queremos que lo haga, es preciso restringir la colección de sistemas de coordenadas admisibles.

6.2/ La ley de conservación de la energía y del momento de un sistema material aislado se expresa, en la relatividad especial, como $T_{\mu\ ,\nu}^{\ \nu} = 0$. La expresión covariante de esta ley de continuidad es, como sabemos, $T_{\mu\ ;\nu}^{\ \nu} = 0$, vista en (47), o equivalentemente (111):

$$0 = T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}T^{\mu\nu}\right)_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}, \qquad (112)$$

que no conduce a una ley de conservación por lo general. Era de esperar, pues en presencia de campos gravitatorios la energía y el momento de un sistema material no tiene por qué conservarse. Ahora bien, existe un tensor energía-tensiones $t_{\mu\nu}$ para el campo gravitatorio tal que, efectivamente,

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}g_{\mu\sigma}(T^{\sigma\nu} + t^{\sigma\nu})\right)_{,\nu} = 0. \qquad (113)$$

Esta ley de continuidad, sigue AE, no admite formulación totalmente covariante; solo presenta covariancia bajo transformaciones lineales. Por eso aunque existan ecuaciones totalmente covariantes, es necesario limitar

[55] Más claro sería argüir así: si tenemos campos gravitatorios, podemos eliminarlos localmente, salvo términos de orden 2 o mayor, dejándonos "caer". Una vez eliminados, en esos referenciales inerciales locales (RIL) los graves se mueven libremente; volvemos a la situación de origen mediante un cambio no lineal, que conduce al elemento $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$, y el movimiento libre sigue obteniéndose del mismo modo, manteniéndose la expresión variacional $\delta\int \mathrm{d}s = 0$ para el movimiento de caída.

[56] Este es el famoso argumento del "agujero" (*Das Lochbetrachtung*), que tan de cabeza llevó a AE hasta 1915.

los sistemas de referencia para asegurar la presencia de relaciones como la ley de continuidad asociada a la energía/momento, y de paso, obviar las dificultades antes expuestas en el punto 6.1.

7. Finalmente, AE afirma que el cuadrimomento

$$P_\mu := \int \mathrm{d}^3x \sqrt{|g|}\, g_{\mu\sigma}(T^{\sigma 0} + t^{\sigma 0}) \qquad (114)$$

de un sistema cualquiera aislado, evaluado en un referencial asintóticamente minkowskiano, es como el cuadrimomento de una partícula libre; en particular, se pueden elegir esos referenciales de modo que $P_{1,2,3} = 0$, y entonces tanto la masa inerte como la gravitacional del sistema vienen dadas por P_0/c^2, donde c es la velocidad de la luz en el infinito.

B. Trabajos de 1914. 2

Doc. 26, 30 de enero de 1914, del vol. 4 de los CPAE.[57]

Esta nota de dos páginas complementa su *Entwurf* con Grossmann, explicando cómo la covariancia total es incompatible con la exigencia de que el conocimiento total de la fuente $\Theta^{\mu\nu}$ determine completamente el tensor métrico g (argumento del "agujero" ya considerado), y llamando la atención sobre el hecho de que la simple ley de continuidad de la energía-tensiones se baste para sugerir cuáles son las rectas y planos de la geometría (ejes y planos coordenados de los sistemas de referencia en que esa ley es válida, y que están forzosamente relacionados entre sí de forma lineal), sin necesidad de recurrir a procesos o agentes, como los rayos de luz, para marcar las rectas.

También reescribe las ecuaciones (56) del campo gravitatorio de forma más simple y explícita:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha \left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu}{}_{,\beta}\right) = \kappa({\Theta_\mu}^\nu + {\theta_\mu}^\nu). \qquad (115)$$

Termina admitiendo su error al criticar cierto aspecto de la teoría escalar de Nordström, remitiendo al texto de su conferencia (antes citada) en Viena para más detalles.

C. Trabajos de 1914. 3

Doc. 27, 9 de febrero de 1914, del vol. 4 de los CPAE.[58]

Breve resumen de por qué AE cree necesaria una nueva teoría de la gravitación. A diferencia del electromagnetismo, que liberó en el siglo XIX a la ley de Coulomb de sus limitaciones, la teoría de la gravitación según Newton ha permanecido incontestada hasta principios del XX.

De Galileo aprendimos que todos los graves sufren igual aceleración gravitacional en un mismo punto del espacio, como si la inercia y la gravitación fuesen inseparables. El experimento de Eötvös respaldó, con precisión asombrosa, este hecho; por otro lado, la relatividad especial ha mostrado la conexión masa/energía. Por tanto, inercia, gravitación y energía están íntimamente vinculadas. Sabemos también que el tiempo y el espacio intervienen de igual modo en el marco relativista ordinario.

Hay un par de teorías que contemplan estos extremos: la escalar de Nordström, y la tensorial de Einstein-Grossmann. La primera es más simple, no altera el marco geométrico, y respeta el principio de constancia de la velocidad de la luz. La segunda teoría viola ambas cosas, pero elimina una dificultad epistemológica que aqueja a la mecánica newtoniana y preocupa a físicos destacados, como Ernst Mach: el carácter absoluto de la aceleración. La inercia, por contra, aparece en esta teoría como oposición a la aceleración relativa entre cuerpos.

Entre ambas teorías hay también diferencias observables; mientras en la de Nordström la luz se mueve

[57] AE: *Bemerkungen zu der Arbeit: Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und eine Theorie der Gravitation,* Zeitschrift für Mathematik und Physik **62**, 260-261 (1914). Título en inglés: *"Comments" on "Outline of a Generalized Theory of Relativity and of a Theory of Gravitation".*

[58] AE: *Zur Theorie der Gravitation,* Naturforschende Gesellschaft in Zürich. Vierteljahrsschrift **59**. Teil 2, Sitzungsberichte (1914): IV-VI. Título en inglés: *On the Theory of Gravitation.*

siempre en línea recta, la de Einstein-Grossmann predice su deflexión gravitacional; esta desviación de la luz podría ser observada, si existe, en un próximo eclipse solar que tendrá lugar en agosto de 1914.

D. Trabajos de 1914. 4

Doc. 28, 19 de febrero de 1914, del vol. 4 de los CPAE.[59]

Se propone probar en este trabajo que la teoría escalar de Nordström encaja también, como lo hace la presentada en el *Entwurf,* en el marco formal de la geometría diferencial (cálculo diferencial absoluto); este marco no limita, por tanto, las posibilidades de las ecuaciones fundamentales. Para llegar al modelo de Nordström, le bastará con imponer que existen sistemas de referencia especiales en que la velocidad de la luz es constante.

Parte del supuesto de que las partículas, en un campo gravitatorio, se mueven según geodésicas $\delta \int ds = 0$ de la geometría métrica dada por $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, en la que el campo gravitatorio está expresado a través de las diez componentes independientes del tensor métrico g.

Entre los observables importantes está la energía y el momento de los sistemas materiales, representados a través de un tensor $\Theta^{\mu\nu}$, cuyas distintas componentes en un referencial minkowskiano local representan lo siguiente: Θ^{ij} es la componente j del flujo de la componente i del momento; Θ^{0j} es la componente j del flujo de energía; Θ^{i0} es la densidad de la componente i del momento; y Θ^{00} es la densidad de energía.

La ley de conservación establece que

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\Theta_{\mu}{}^{\nu}\right)_{,\nu} = \tfrac{1}{2} g_{\sigma\nu,\mu}\Theta^{\sigma\nu}, \tag{116}$$

donde el segundo término expresa la transferencia de energía-momento del campo gravitatorio al sistema material. Nótese que depende del sistema material a través exclusivamente de su tensor de energía-tensiones, como era de esperar por la equivalencia entre las masas inercial y gravitacional, y que sugiere que dicho tensor sea responsable del campo gravitatorio producido por la fuente.

AE implementa el principio de constancia de la velocidad de la luz impuesto por Nordström exigiendo que haya coordenadas $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ en que $g_{\mu\nu} = \Phi^2(x)\eta_{\mu\nu}$, de modo que los rayos de luz yazcan en los conos habituales:

$$0 = ds^2 = \Phi^2\,(c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2). \tag{117}$$

En cuanto a las ecuaciones de campo, sugiere, en consonancia con el método seguido en el *Entwurf*, buscar un escalar Γ, formado con el tensor métrico, sus primeras y sus segundas derivadas (estas últimas apareciendo linealmente), y exigir que

$$\Gamma = \kappa\Theta, \tag{118}$$

donde Θ es un escalar sacado del tensor de energía-tensiones de la fuente material que crea el campo, y que naturalmente es la traza de éste: $\Theta = \Theta^{\mu}_{\mu}$.

Como escalar geométrico Γ el candidato natural es la curvatura escalar R, salvo factor constante, obtenida del tensor de Riemann por contracción de índices. Con la elección anterior para la métrica, resulta $R = -6\Phi^{-3}\,\Box\,\Phi$, y por tanto, la ecuación resultante es

$$\Phi\,\Box\Phi = k\hat{\Theta}, \tag{119}$$

donde $\hat{\Theta} := |g|^{1/2}\Theta$ es la densidad escalar de la traza Θ y k una constante de proporcionalidad. Un adecuado cambio de escala de las coordenadas permite llevar la anterior ecuación de campo a la forma dada por Nordström.

Concluye AE este trabajo expresando su preferencia por la teoría de Nordström frente a otras muchas otras teorías de la gravitación, pues, como la suya con Grossmann, sale de modo natural de premisas básicas

[59] AE y A.D. Fokker: *Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls,* Annalen der Physik **44**, 321-328 (1914). Título en inglés: *Nordströms Theory of Gravitation from the Point of View of the Absolute Differential Calculus.*

(en este caso escalar, de la supuesta constancia de la velocidad de la luz), sin hipótesis físicas adicionales; además satisface automáticamente la equivalencia entre masas inercial y gravitatoria.

En cuanto a su propia teoría con Marcel Grossmann, muestra su confianza de conseguir deducirla de modo similar a partir del cálculo diferencial de Riemann-Christoffel. Desecha como insostenible su previa afirmación en el *Entwurf* de que tal formulación no es posible, dejando abierta para futuras investigaciones esta importante cuestión.

E. Trabajos de 1914. 5

Doc. 31, marzo de 1914, del vol. 4 de los CPAE.[60]

Ante las críticas de distinguidos físicos (Abraham y Mie), vuelve AE a presentar sus argumentos para ampliar la relatividad especial (la llama relatividad en sentido restringido) a la general (relatividad en el sentido más amplio) suscitados por algunos aspectos de la gravitación.

1. Relatividad en sentido restringido

La mecánica clásica establecía la equivalencia de todos aquellos sistemas de referencia en que las únicas fuerzas existentes entre cuerpos eran centrales, satisfaciendo la igualdad de acción y reacción; estos sistemas están relacionados por rotaciones de los ejes, traslaciones y desplazamientos relativos uniformes, y su equivalencia es el principio de relatividad en sentido restringido. Así expuesto, nadie dudaba de su validez. El problema surge cuando se aplica a los fenómenos electromagnéticos, cuyas leyes tampoco distinguen entre esos sistemas de referencia, sistemas todos ellos en que la velocidad de la luz es la misma. Este principio de constancia de la velocidad de la luz, por otro lado, se da de bruces con la ley mecánica de adición de velocidades.

Sabemos, empero, que esta contradicción es solo aparente, y consecuencia de un par de suposiciones alegremente aceptadas: i/ La simultaneidad de dos sucesos no depende del sistema de referencia. ii/ La distancia espacial entre dos sucesos simultáneos tampoco depende del sistema de referencia. Son prejuicios provenientes del hecho de que la velocidad de la luz es mucho mayor que las velocidades cotidianas.

La mecánica y el EM pueden convivir ambos con el principio de relatividad, es decir, este y el de constancia de la velocidad de la luz en vacío son compatibles, si modificamos ligeramente las ecuaciones de la mecánica, y sustituimos las tradicionales leyes de transformación de coordenadas espaciotemporales entre sistemas de referencia inerciales aceptando las de Lorentz. Las leyes físicas adoptan una formulación covariante en el marco de Minkowski bajo este grupo de transformaciones; estas no fijan las ecuaciones, pero sí exigen de ellas que sean conformes al grupo de Lorentz como grupo de covariancia. El principio de relatividad es, en este sentido, análogo al principio de conservación de energía o el segundo de la termodinámica; no restringen ecuaciones, pero sí limitan sus posibilidades exigiendo de ellas que respeten estos principios.

Existe una clase de fenómenos tan poco conocidos, que lo que se sabe de ellos es insuficiente, aun ayudados del principio de relatividad, para llevarnos a una única teoría. Son los fenómenos relacionados con la gravitación. Para mejorar su conocimiento, necesitamos hipótesis físicas nuevas.

Sabemos que hay una masa inercial que mide la resistencia de un cuerpo a ser acelerado, y una masa gravitacional relacionada con la fuerza que experimenta en un campo gravitatorio. Estamos acostumbrados a no diferenciarlas, a tomarlas como idénticas; pero no es evidente esa identidad. Se observa que cuerpos de distinta naturaleza sufren igual aceleración en un campo gravitatorio. El experimento de Eötvös muestra esta igualdad de ambos tipos de masa con gran precisión (10^{-8}).

La relación energía/masa de la relatividad especial sugiere que toda energía, incluso la gravitacional, es fuente del campo gravitatorio.

La teoría de Abraham contradice al principio de relatividad; la de Mie viola la igualdad de las masas

[60] AE: *Zum Relativitäts-Problem,* Scientia **15**, 337-348 (1914). Título en inglés: *On the Relativity Problem.*

inerte y gravitatoria, pues afirma que, por ejemplo, al calentar un cuerpo la masa inerte crece (correcto) pero no la gravitacional que incluso en el caso de un gas puede disminuir al aumentar su temperatura.

Por contra, la teoria de Nordström respeta ambas exigencias: el principio de relatividad restringido, y la igualdad de masas inerte y gravitacional (aunque esta última, en sentido estadístico, pues en esa teoría la masa gravitatoria de un sistema cerrado, globalmente en reposo, es oscilante, y su promedio temporal coincide con la energía total del sistema). Estas oscilaciones hacen que los sistemas, aun aislados, emitan ondas gravitatorias longitudinales, mas de tan baja energía que resultan imperceptibles.

En consecuencia, la teoría de Nordtröm es, desde el punto de vista empírico, aceptable. Vamos a ver, no obstante, que hay razones epistemológicas que nos obligan a no conformarnos con ella.

2. *Relatividad en sentido amplio*

Esas razones se remontan a Mach. AE va a exponerlas con un ejemplo muy sencillo. Dos masas próximas *X, Y* flotan el el espacio interestelar, muy alejadas del resto de los astros; solo interaccionan entre sí. Un observador exterior verá que la línea que las une corta a la esfera celeste en un punto que describe una trayectoria cerrada, inmóvil sobre esa esfera. Si ese observador *A* es inteligente, pero no sabe geometría ni mecánica, dirá: “El movimiento de mis masas es debido a la influencia del sistema de estrellas fijas.” Otro observador *B*, conocedor de la ciencia, le dirá: “No. Las estrellas fijas no determinan lo que hacen esas dos masas. Las leyes de la mecánica dicen que igual lo harían si no exisitieran esas estrellas; hay un espacio *R*, vacío, en el que se mueven de acuerdo con las leyes de la mecánica. Según estas, las dos masas yacen siempre en un mismo plano de ese *R*. El conjunto de las estrellas lejanas no gira en *R*; de hacerlo, su aceleración centrífuga sería tan enorme, que la bóveda se desgarraría. De ahí que la orientación del plano con respecto a las estrellas se mantenga constante.” Pero *A* replicará: “Sabrás mucho, pero al igual que yo no creo en fantasmas, tú no te puedes creer que exista ese gigantesco espacio *R*, que nadie puede ver ni imaginar. ¿O acaso crees que ese *R* es como una sutil red de pequeños cuerpos, en reposo mutuo, con respecto a los cuales se mueven los demás, como *X* e *Y*? Si asi es, y R' fuera otra red similar, que se mueve respecto de *R* de modo arbitrario (por ejemplo girando), serían tus leyes las mismas también en el nuevo espacio R'?” Ante el gesto negativo de *B*, pregunta *A*: “¿Cómo saben entonces las masas qué espacio elegir para orientarse, y por tanto, qué leyes seguir?” *B* no sabe qué contestar, por lo que *A* exclama: “Pues mientras tus espacios privilegiados sean un mero invento, seguiré pensando que la bóveda estelar determina la mecánica de mi sistema de masas.”

Otro ejemplo, este debido a su amigo Besso. La mecánica afirma que la fuerza es responsable de la aceleración. Pero, ¿qué es la aceleración? Podemos entender lo que es una aceleración relativa, pero no qué es una aceleración absoluta. Cuando la Tierra se suponía plana, había una dirección privilegiada, la vertical, a lo largo de la cual caían los cuerpos. Pero era la Tierra la causa de esa dirección especial. Suponer la dirección privilegiada sin una causa clara (en este ejemplo, la existencia de la Tierra), es lo mismo que suponer que ese espacio de la mecánica existe porque sí, sin causa suficiente. Este defecto epistemológico lo presenta también la relatividad especial. Es para evitarlo por lo que se introduce la relatividad general. También por eso la gravitación debe jugar un papel distinguido; pues los cuerpos presentan energía, y la energía causa gravedad. Y en los campos gravitatorios todos los cuerpos presentan igual aceleración, tal como ocurre en sistemas de referencia acelerados. Con esta idea como base (hipótesis de equivalencia), se llega a que la velocidad de la luz depende del campo gravitatorio; no es ya constante. Su constancia es incompatible con la hipótesis de equivalencia; y por ello el principio de relatividad también es incompatible con dicha hipótesis, y solo puede mantenerse en regiones pequeñas, donde el potencial gravitatorio es prácticamente constante. La relatividad restringida debe dejar paso a una relatividad ampliada.

El movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio, de acuerdo con la hipótesis de equivalencia, puede expresarse del mismo modo cualquiera que sea el sistema de coordenadas; no necesitamos ya los sistemas de referencia privilegiados, por lo que las objeciones epistemológicas mencionadas desaparecen. Hay un elemento de distancia $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$ invariante bajo cambio de coordenadas, donde g representa el campo gravitatorio. Mediante el cálculo diferencial asociado, desarrollado por Ricci y Levi-Civita a partir de las investigaciones de Christoffel, es posible escribir ecuaciones válidas en cualquier sistema de coordenadas. En todas ellas aparece g, y por tanto la influencia de la gravitación en los fenómenos físicos. Por otro lado, la conservación de la energía/momento para el sistema global (materia y gravitación) conduce a las ecuaciones que vinculan la energía con el campo gravitatorio; este último, es decir g, queda determinado por el contenido energético del resto del universo.

En este enfoque de la relatividad en sentido amplio no hay aceleraciones absolutas (respecto del "espacio") sino aceleraciones relativas a otros cuerpos.

F. Trabajos de 1914. 6

Este es el primer trabajo que sale de la pluma de AE desde su nuevo puesto en Berlin, ciudad esta en la que va a culminar su gran obra.

Doc. 1, 26 de abril de 1914, del vol. 6 de los CPAE.[61]

Atendiendo una petición del consejo editorial del *Vossische Zeitung,* AE pasa a hablar a sus lectores de su teoría de la relatividad.

Empieza con su ejemplo del tren en movimiento uniforme; es imposible saber, con las ventanas tapadas, si se mueve o no de forma absoluta. Solo el movimiento relativo es discernible. Esta es la base del principio de relatividad: "las leyes de la naturaleza son independientes del estado de movimiento (uniforme) del observador".

Esto es claro para cualquiera, salvo que cuando se considera la luz o los fenómenos EM nos topamos con su aparente incompatibilidad con dicho principio. Pues esperaríamos que la velocidad de la luz no fuese la misma en todos los sistemas de referencias que se mueven uniformemente entre sí. Sin embargo, paradójicamente ambos principios (relatividad y constancia de la velocidad de la luz) son reconciliables si revisamos cuidadosamente las relaciones espacio-temporales entre los distintos sucesos.

Nos parecía evidente que el concepto de simultaneidad no dependía del estado de movimiento de los observadores. No es así. Tampoco es invariante la distancia entre dos sucesos simultáneos. El éter ha tenido que ser necesariamente abandonado. La inercia resulta dependiente del movimiento; crece con la energía cinética.

Pero esta teoría de la relatividad resulta insuficiente. ¿Puede extenderse la equivalencia entre sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme a toda clase de sistemas de referencia? ¿Pueden ser las leyes de la naturaleza iguales en todos los referenciales? Parece ser que la respuesta es afirmativa, y esta generalización conduce a una nueva teoría de la gravitación que extiende a la de Newton. En esta nueva teoría, la luz se curva en campos gravitatorios; el efecto es generalmente pequeño, pero detectable. El futuro nos dirá si esta nueva teoría de la relatividad, tan atractiva desde un punto de vista epistemológico, está de acuerdo con la realidad.

G. Trabajos de 1914. 7

Doc. 2, 29 de mayo de 1914, del vol. 6 de los CPAE.[62]

Es una prolongación del famoso *Entwurf*. Recordemos que mientras en aquella ocasión AE y MG lograron escribir de manera formalmente covariante las ecuaciones que gobernaban a los sistemas materiales (incluido el EM) en presencia de campos gravitatorios dados, sin embargo no pudieron establecer si el grupo de covariancia de las ecuaciones para el propio campo gravitatorio era más amplio o no que el de las simples transformaciones lineales.

Esta dificultad empaña el mérito de aquella propuesta. Recordemos que toda la teoría allí presentada partía de la "hipótesis de equivalencia": la presencia de

---

[61] AE: *Vom Relativitäts-Prinzip,* Vossische Zeitung, 26 April 1914, edición de la mañana. Título en inglés: *On the Principle of Relativity.*

[62] AE y M. Grossmann: *Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie,* Zeitschrift für Mathematik und Physik **63**, 215-225 (1914). Título en inglés: *Covariance Properties of the Field Equations of the Theory of Gravitation Based on the Generalized Theory of Relativity.*

un campo gravitacional en un cierto referencial es indistinguible de su inexistencia en un sistema de coordenadas adecuadamente acelerado respecto del anterior. Esta hipótesis se sustentaba en la igualdad experimental entre masa inerte y masa gravitacional.

Parece deseable, por tanto, que las ecuaciones para el campo gravitatorio sean covariantes bajo cualquier cambio de coordenadas. Sin embargo, probarán aquí los autores que si tales ecuaciones existieran, el campo gravitatorio no quedaría completamente determinado por ellas.

Afirman que van a demostrar que las ecuaciones para el campo gravitatorio son covariantes solo hasta el punto de no impedir que el campo $g_{\mu\nu}$ quede determinado totalmente por ellas. Esto permite, sostienen, la covariancia bajo transformaciones con aceleración muy variada.

1. Ecuaciones básicas de la teoría

En los procesos físicos aparece el tensor de energía $T_{\mu\nu}$ de los sistemas materiales que, como consecuencia de $\nabla_\nu T_\mu{}^\nu = 0$ satisface la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}T_\mu{}^\nu\right)_{,\nu} = \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta}, \tag{120}$$

o, si se prefiere, consecuencia de la equivalente $\nabla_\nu T^\nu{}_\mu = 0$ es esta otra

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}T^\nu{}_\mu\right)_{,\nu} = -\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}T_{\alpha\beta}, \tag{121}$$

fórmulas todas ellas que expresan las ecuaciones de energía-momento.

En términos de la densidad tensorial

$$\hat{T}_\mu{}^\nu := \sqrt{|g|}g_{\mu\alpha}T^{\alpha\nu} = \sqrt{|g|}g^{\nu\alpha}T_{\mu\alpha}, \tag{122}$$

podemos reescribir las ecuaciones de energía-momento como

$$\left(\hat{T}_\mu{}^\nu\right)_{,\nu} = \tfrac{1}{2}g_{\alpha\nu,\mu}g^{\alpha\beta}\hat{T}_\beta{}^\nu. \tag{123}$$

De igual modo se introduce la densidad $\hat{t}^{\mu\nu}$ del tensor $t^{\mu\nu}$ de energías del campo gravitatorio; con todo esto quedan como ecuaciones para el campo gravitatorio

$$\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu}{}_{,\beta}\right) = \kappa(\hat{T}_\mu{}^\nu + \hat{t}_\mu{}^\nu), \tag{124}$$

y la ley de conservación

$$\left(\hat{T}_\mu{}^\nu + \hat{t}_\mu{}^\nu\right)_{,\nu} = 0. \tag{125}$$

2. Sobre la elección del referencial

AE y Grossmann pasan a discutir el argumento ya conocido de imposibilidad de que ecuaciones totalmente covariantes determinen por completo al campo gravitatorio. Esto conduce a la necesidad de especificar los sistemas referenciales particulares en que tal determinación es posible.

El uso de (125) permite deducir de (124) estas cuatro condiciones diferenciales

$$B_\mu := \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\alpha}\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu}{}_{,\beta}\right) = 0 \tag{126}$$

que todo campo gravitatorio debe satisfacer. No son covariantes generales, como se argumentará luego, por lo que solo se cumplen en referenciales distinguidos.

3. Formulación lagrangiana

Sea

$$L := \sqrt{|g|}\left(\tfrac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu,\alpha}g^{\mu\nu}{}_{,\beta} - \kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right) \tag{127}$$

la densidad lagrangiana.

Anulando su variación infinitesimal de la acción aso ciada

$$S = \int L\,\mathrm{d}^4x \tag{128}$$

bajo $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$, donde $\delta g^{\mu\nu}$ se anula en la frontera, conduce a las ecuaciones ya conocidas

$$(\Delta_{\mu\nu} - \kappa t_{\mu\nu}) - \kappa T_{\mu\nu} = 0, \tag{129}$$

donde las formas covariantes $\Delta_{\mu\nu}$, $\kappa t_{\mu\nu}$ se obtienen de las contravariantes (53) y (54) bajando los índices, como es de esperar, de la forma habitual con ayuda de g.

4. Covariancia de las ecuaciones de campo en coordenadas adaptadas

Demuestran luego los autores que las anteriores ecuaciones para el campo gravitatorio son covariantes bajo cambios de sistemas de referencia admisibles, entendiendo por tales aquellos sistemas de coordenadas en las que se cumplen las cuatro ecuaciones $B_\mu = 0$. Que no pueden serlo todos, es decir, que las ecuaciones de campo del *Entwurf* no presentan covariancia general, lo argumentan diciendo que, de lo contrario, $\Gamma_{\mu\nu}\,(= \Delta_{\mu\nu} - \kappa t_{\mu\nu})$ sería un tensor covariante general, y por tanto su traza $\Gamma_\mu^{\ \mu}$ sería un escalar bajo cualquier cambio de coordenadas. Se sabe, sin embargo, que el único escalar covariante general de segundo orden en las derivadas de g es, salvo constante de proporcionalidad, lo que hoy se conoce como escalar de curvatura R. Y esto no lo cumple $\Gamma_\mu^{\ \mu}$.[63]

H. Trabajos de 1914. 8

Doc. 3, 2 de julio de 1914, del vol. 6 de los CPAE.[64]

Breve conferencia inaugural de AE pronunciada con motivo de su ingreso en la Academia Prusiana de Ciencias, y que fue contestada por Max Planck. Señala AE que el principio de relatividad conocido privilegia los movimientos uniformes y no es por tanto satisfactorio, si es que realmente desde un punto de vista físico el movimiento uniforme carece de significado absoluto. Los intentos de extender dicho principio a movimientos no uniformes producen una ampliación de la relatividad que en particular sugiere una nueva teoría general de la gravitación. Sin embargo, por el momento, no hay soporte experimental necesario que avale la introducción de ese principio de relatividad extendido.

I. Trabajos de 1914. 9

Doc. 9, 29 de octubre de 1914, del vol. 6 de los CPAE.[65]

En esta publicación AE quiere presentar la teoría general de la relatividad como un esquema formal, basado en la covariancia bajo cambios arbitrarios de coordenadas, sin acudir a razones físicas. Estas las explorará luego, una vez obtenidas las ecuaciones básicas de su teoría. Ofrece una redacción autocontenida y personal del cálculo diferencial absoluto, con algún que otro elemento original, como la introducción que hace de la derivación covariante. En la parte física muestra cómo la teoría newtoniana de la gravitación se desprende de su relatividad general cuando los campos son débiles, y termina hablando del desplazamiento gravitatorio al rojo y de la deflexión gravitacional de la luz.

Resumiremos lo esencial.

1. Sobre la teoría de covariantes

Presentación de las definiciones de tensores covariantes, contravariantes y mixtos, y las operaciones algebraicas elementales entre ellos que preservan la tensorialidad. La geometría métrica, y el tensor métrico. Noción de geodésica y ecuación de ésta. Las derivadas parciales no preservan el carácter tensorial, y hay que modificarlas para que lo preserven.[66]

AE llega a esa modificación necesaria para pasar de la derivada parcial a la covariante, sin acudir a esta última (aunque la menciona), por un argumento sencillo y original, recurriendo a la ecuación diferencial de las geodésicas. Obtiene todas las ecuaciones básicas (divergencia, operador laplaciano generalizado,...) que luego usará en las aplicaciones físicas.

---

[63] En R entran las segundas derivadas en la combinación $g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}(\partial_\beta \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta})$, mientras que en $\Gamma_\mu^{\ \mu}$ aparecen solo como $-g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}$.
[64] AE: *Antrittsrede,* Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte 739-742 (1914). Título en inglés: *Inaugural Lecture.*
[65] AE: *Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitäts–theorie,* Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte 1030-1085 (1914). Título en inglés: *The Formal Foundations of the General Theory of Relativity.*
[66] La noción de derivación covariante ya había sido introducida en espacios riemannianos por Levi-Civita y Ricci-Curbastro en 1900, y es usada por Grossmann en la parte matemática del *Entwurf.*

2. Sistemas físicos en campos gravitatorios

Trata de escribir en forma totalmente covariante las ecuaciones que rigen los sistemas físicos y sus leyes en un campo gravitatorio dado por un tensor métrico arbitrario $g_{\mu\nu}$.

Una de esas leyes concierne al tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$ (mejor fuera decir energía-tensiones) de un sistema material: $\partial_\nu T^{\mu\nu} = \phi^\mu$, en el marco de la relatividad especial. En esa expresión, ϕ^μ es la cuadrifuerza que sobre el sistema se ejerce externamente, por unidad de volumen (ϕ^j es el vector fuerza por unidad de volumen, y ϕ^0 es la energía/c suministrada al sistema por unidad de volumen y de tiempo). Se supone la métrica minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$. La ley anterior es covariante bajo el grupo de Lorentz.

Su extensión covariante general es $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \phi^\mu$.

Recordemos de nuevo el significado físico de las distintas componentes del tensor T : $T^{\mu 0}(\xi)$ es la densidad de la componente μ del (cuadrimomento×c), y en particular, $T^{00}(\xi)$ es la densidad de energía; $T^{0j}(\xi)$ (= $T^{j0}(\xi)$) es el flujo de energía/c a través de la superficie $x^j = \xi^j$; $T^{ij}(\xi) = T^{ji}(\xi)$ es el flujo de la componente i (o j) del momento a través de la superficie $x^j = \xi^j$ (o $x^i = \xi^i$). Cuando los dos índices son iguales, $T^{ii}(\xi)$ es una tensión normal; si son distintos, $T^{ij}(\xi)$ es una tensión de cizalla.

a. Polvo Para un fluido incoherente o tipo polvo (perfecto, sin presión), de partículas de masa en reposo m y densidad de número propia n_0, el tensor de energía-tensiones es $T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$, donde $\rho_0 := n_0 m$,y $u := \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau = c\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}s$. Por otro lado, su densidad de cuadri-corriente de número es $j^\mu = n_0 u^\mu$. La conservación del número de partículas se expresa a través de la ley de continuidad $\nabla_\mu j^\mu = 0$, es decir, $u^\mu{}_{;\mu} = 0$. La ley de conservación de energía-momento $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, junto con la anterior, implica $u^\mu{}_{;\nu} u^\nu = 0$, que indica que las partículas del fluido se mueven según geodésicas de la geometría. Pero cuando la ley de continuidad de T falla, existe la cuadrifuerza ϕ por unidad de volumen antes mencionada sobre el sistema material, y

$$\rho_0 u^\mu{}_{;\nu}(\xi) u^\nu(\xi) = \phi^\mu(\xi). \tag{130}$$

Expresemos la cuadricorriente de número j^μ y el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ a través de las partículas que integran el fluido, limitándonos a una pequeña región, en la que elegimos un sistema de referencia inercial local, es decir, un marco minkowskiano local. Tendremos

$$j^\mu(x) = \sum_n \int \mathrm{d}\tau \, \frac{\mathrm{d}x_n^\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)), \tag{131}$$

y

$$T^{\mu\nu}(x) = \\ m \sum_n \int \mathrm{d}\tau \, \frac{\mathrm{d}x_n^\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x_n^\nu(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)). \tag{132}$$

De esta última resulta[67]

$$\phi^\mu(x) = \partial_\nu T^{\mu\nu}(x) = \\ \sum_n \int \mathrm{d}\tau \, \frac{\mathrm{d}p_n^\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)) = \\ \sum_n \int \mathrm{d}\tau \, f_n^\mu(\tau) \delta^4(x - x_n(\tau)), \tag{133}$$

como era de esperar de la dinámica relativista, donde $f^\mu_n(\tau)$ es la cuadrifuerza que actúa sobre la partícula n en el instante τ de su tiempo propio.

b. Electromagnetismo en vacío Las ecuaciones de Maxwell en vacío, con fuente una cuadricorriente eléctrica $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$, en unidades Gauss racionalizadas, son, en relatividad especial,

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -j^\mu, \quad *F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{134}$$

donde

$$(F_{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{135}$$

es el tensor de Faraday, y

$$*F_{\mu\nu} := \tfrac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{136}$$

su dual. Por $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ se entiende el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} := \sqrt{|g|}[\mu\nu\alpha\beta], \tag{137}$$

[67] Ver, p.e., S. Weinberg, *loc. cit.*

donde $[\mu\nu\alpha\beta] := (1, -1)$ si $\{\mu, \nu, \alpha, \beta\}$ se deduce de $\{0, 1, 2, 3\}$ por una permutación (par, impar), y 0 en caso contrario. Las ecuaciones homogéneas implican que localmente existe un cuadripotencial vector A_μ tal que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Nótese que el carácter antisimétrico del tensor de Faraday, junto con las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas, exigen la ley de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{138}$$

y en particular la ley de conservación de la carga eléctrica.

El tensor de energía-tensiones del campo EM en vacío es el tensor de Maxwell

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{M}} = \tfrac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + F^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu}, \tag{139}$$

y cuando hay fuentes

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -\mathcal{L}\eta^{\mu\nu} + F^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\beta}F^{\beta\nu}, \\ \mathcal{L} &:= -\left(\tfrac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + A_\alpha j^\alpha\right). \end{aligned} \tag{140}$$

Con gravitación la ley de continuidad de la cuadricorriente y las ecuaciones de Maxwell adoptan la forma totalmente covariante

$$\begin{aligned} &{j^\mu}_{;\nu} = 0, \\ &{F^{\mu\nu}}_{;\nu} = -j^\mu, \quad *{F^{\mu\nu}}_{;\nu} (= *{F^{\mu\nu}}_{,\nu}) = 0. \end{aligned} \tag{141}$$

En el caso libre (ausencia de cargas) la energía-momento del campo EM se conserva, pues

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}_{\mathrm{M}} = 0, \tag{142}$$

como se desprende de las ecuaciones de Maxwell. Cuando hay corriente,

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}_{\mathrm{M}} = F^{\mu\nu} j_\nu. \tag{143}$$

Procediendo de igual modo a como se esbozó antes, puede verse que de esta última expresión puede deducirse que el movimiento de una partícula de carga eléctrica q y masa m, puntual, en un campo EM y gravitatorio, viene dada por

$$m\frac{\mathrm{D}p^\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = qF^{\mu\nu}(x(\tau))u_\nu(\tau), \tag{144}$$

donde $u_\nu := g_{\nu\alpha}\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\tau$, y $\mathrm{D}/\mathrm{d}\tau$ es la derivada covariante a lo largo de la trayectoria $x(\tau)$ del móvil, definida para un campo tensorial genérico como

$$\mathrm{D}T^{\cdots}_{\cdots}/\mathrm{d}\tau := T^{\cdots}_{\cdots;\alpha}u^\alpha. \tag{145}$$

3. *Leyes diferenciales para el campo gravitatorio*

Llega el momento crucial en este trabajo de AE, que es el de obtener las ecuaciones para el campo gravitatorio a partir de consideraciones generales. Advierte de inmediato AE que, aunque lo lógico sería imponer la covariancia general, no está indicado el hacerlo si no queremos violar la ley de causa-efecto.

Vuelve a presentar el argumento del agujero que ya citamos anteriormente: si hay una región acotada Ω del espacio-tiempo libre de materia, y un campo métrico g solución de las ecuaciones que rijan la respuesta de la geometría al contenido material T, si esas ecuaciones son covariantes generales es siempre posible hallar otro campo g' solución de dichas ecuaciones con el mismo T tal que $g' \neq g$ en Ω. Por tanto el conocimiento de T no basta para que unas ecuaciones covariantes generales determinen g unívocamente en las zonas sin materia.

Si no renunciamos, continúa AE, a la causalidad (deberíamos decir al determinismo), tenemos que renunciar a la covariancia sin restricciones, y limitar los sistemas de referencia admisibles.

La primera idea que se le ocurre es aceptar solo cambios de referencia lineales; desgraciadamente con ello quedan fuera los referenciales acelerados y los referenciales rotantes, y por tanto se verá obligado a no poder considerar como gravitacional un "campo centrífugo". Pero aún así le merecen una consideración las transformaciones lineales.

La covariancia solo bajo cualquier tipo invertible de transformaciones lineales permite obtener nuevos campos tensoriales por simple derivación parcial respecto de las coordenadas.

Sea L una función arbitraria de $g^{\mu\nu}$ y de sus primeras derivadas ${g^{\mu\nu}}_{,\sigma}$; AE considera la integral

$$S_R = \int_R L\,\sqrt{|g|}\mathrm{d}^4x \tag{146}$$

extendida a una región finita R. Bajo un cambio infinitesimal $x \to \bar{x}$ de sistema de referencia, la forma de volumen $\sqrt{|g|}\mathrm{d}^4x$ es un escalar (no cambia), mientras que L varía en

$$\Delta g^{\mu\nu}(x) = \bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) - g^{\mu\nu}(x), \tag{147}$$

Como $\Delta g^{\mu\nu}(x)=\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) - g^{\mu\nu}(x)$, es fácil ver que

$$\begin{aligned}\Delta g^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha}(\partial\Delta x^\nu/\partial x^\alpha) + g^{\nu\alpha}(\partial\Delta x^\mu/\partial x^\alpha),\\ \Delta g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} &= \partial(\Delta g^{\mu\nu})/\partial x^\sigma\\ &\quad - (\partial g^{\mu\nu}/\partial x^\alpha)(\partial\Delta x^\alpha/\partial x^\sigma).\end{aligned} \tag{148}$$

Supongamos ahora que L sea covariante bajo cambios lineales, y por tanto que ΔL no dependa de las primeras derivadas de Δx. Entonces, como $\sqrt{|g|}$ no depende de las derivadas del tensor métrico, resulta:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\Delta L = g^{\nu\alpha}(\partial L/\partial g^{\mu\nu}{}_{,\sigma})(\partial^2\Delta x^\mu/\partial x^\sigma\partial x^\alpha),\\ &\tfrac{1}{2}\Delta S_R =\\ &\int_R g^{\nu\alpha}(\partial(L\sqrt{|g|})/\partial g^{\mu\nu}{}_{,\beta})(\partial^2\Delta x^\mu/\partial x^\beta\partial x^\alpha)\,\mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{149}$$

Integrando por partes podemos reescribir la última expresión como

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\Delta S_R = \int_R A_\mu\Delta x^\mu\,\mathrm{d}^4x + B,\\ &A_\mu := \partial_\alpha\partial_\beta\Big(g^{\nu\alpha}\big(\partial(L\sqrt{|g|})/\partial g^{\mu\nu}{}_{,\beta}\big)\Big),\\ &B :=\\ &\int_R \mathrm{d}x^4\,\partial_\alpha\Big(g^{\nu\alpha}\big(\partial(L\sqrt{|g|})/\partial g^{\mu\nu}{}_{,\beta}\big)(\partial_\beta\Delta x^\mu) -\\ &\qquad \partial_\beta\big(g^{\nu\beta}\big(\partial(L\sqrt{|g|})/\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\big)\Delta x^\nu\Big).\end{aligned} \tag{150}$$

Es claro que B puede escribirse como una integral sobre la frontera de R, por lo que $B = 0$ si Δx y sus derivadas parciales se anulan en dicha frontera. Suponiendo que, efectivamente, elegimos Δx cumpliendo estas anulaciones, la variación ΔS_R se reducirá a

$$\tfrac{1}{2}\Delta S_R = \int_R A_\mu\Delta x^\mu\,\mathrm{d}^4x. \tag{151}$$

Restrinjámonos, de momento, a aquellos referenciales que se deducen del inicial mediante cambios infinitesimales tales que las variaciones Δx y sus primeras derivadas se anulan en la frontera de la región R. De entre ellos, los habrá que extremen el valor de S_R, y por tanto tales que en torno a ellos $\Delta S_R = 0$ para cualesquiera valores Δx en el interior de R. A tales referenciales AE los llama "referenciales adaptados al campo gravitatorio". Satisfacen, obviamente, las ecuaciones $A_\mu = 0$ para μ =0, 1, 2, 3. Obligando a que los campos tengan que satisfacer siempre estas condiciones $A_\mu = 0$, desaparece, para AE, el problema del "agujero", pues al hacer obligatorio el uso de referenciales adaptados, perdemos la libertad de poder extender arbitrariamente, al interior de R, un sistema de referencia dado en su exterior.

AE continúa el trabajo demostrando que la variación δS_R bajo un cambio infinitesimal $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$, donde $\delta g^{\mu\nu}$ son cualesquiera, aunque nulas en una franja abierta entorno de la frontera de R, es invariante bajo cambio a sistemas de referencia infinitamente próximos adaptados al campo gravitacional inicial; es decir,

$$\Delta(\delta S_R) = 0. \tag{152}$$

Es fácil obtener, tras integrar por partes y hacer uso de que $\delta g^{\mu\nu} = 0$ se anula en la frontera,

$$\begin{aligned}\delta S_R &= \int_R \mathrm{d}^4x\left(\frac{\partial L\sqrt{|g|}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Big(\frac{\partial L\sqrt{|g|}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}}\Big)\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &=: \int_R \mathrm{d}^4x\,\mathfrak{E}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{153}$$

Como $\sqrt{|g|}\mathrm{d}^4x$ es un escalar, la invariancia de δS_R bajo cambios entre sistemas de referencia adaptados indica que $|g|^{-1/2}\,\mathfrak{E}_{\mu\nu}$ es un campo tensorial simétrico covariante (bajo cambios entre sistemas de referencia adaptados). En otras palabras, $\mathfrak{E}_{\mu\nu}$ es una densidad tensorial covariante simétrica (para AE, un V-tensor o tensor de volumen).[68]

a. Ecuaciones del campo Es de esperar que el tensor $\mathfrak{E}_{\mu\nu}/\sqrt{|g|}$ esté relacionado con el tensor de energía-tensiones $T_{\mu\nu}$, y que esa relación generalice la ecuación de Poisson. Usando las densidades asociadas, buscaremos ecuaciones de la forma

[68] La relación entre un campo tensorial $T_{:::}$ y su densidad $\mathfrak{T}_{:::}$ viene fijada por la exigencia de esta igualdad: $\int\sqrt{|g|}\mathrm{d}^4x\; T_{:::} = \int \mathrm{d}^4x\;\mathfrak{T}_{:::}$, es decir: $\mathfrak{T}_{:::} = \sqrt{|g|}T_{:::}$.

$$\mathfrak{E}_{\mu\nu} = \kappa \mathfrak{T}_{\mu\nu}. \tag{154}$$

Como $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, echando mano de (116) podemos escribir

$$\left(\mathfrak{E}_{\mu}{}^{\nu}\right)_{,\nu} = \tfrac{1}{2} g_{\sigma\nu,\mu} \mathfrak{E}^{\sigma\nu}; \tag{155}$$

equivalentemente

$$\left(\mathfrak{E}_{\mu}{}^{\nu}\right)_{,\nu} = -\tfrac{1}{2} g^{\sigma\nu}{}_{,\mu} \mathfrak{E}_{\sigma\nu}. \tag{156}$$

Sustituyendo $\mathfrak{E}$ por su expresión dada en (153), de la relación anterior resulta

$$\begin{aligned} &\partial_\nu S^\nu_\sigma - A_\sigma = 0, \\ &S^\nu_\sigma := g^{\nu\tau} \frac{\partial L\sqrt{|g|}}{\partial g^{\sigma\tau}} + g^{\nu\tau}{}_{,\mu} \frac{\partial L\sqrt{|g|}}{\partial g^{\sigma\tau}{}_{,\mu}} + \\ &\qquad \tfrac{1}{2} g^\nu_\sigma L\sqrt{|g|} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} \frac{\partial L\sqrt{|g|}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}}. \end{aligned} \tag{157}$$

Luego aparte de las 10 ecuaciones (154), que permiten obtener las 10 componentes del tensor métrico g si se conoce el tensor fuente T, tenemos que imponer las 4 condiciones $A_\mu = 0$ que exigen los sistemas adaptados de coordenadas; por tanto un sistema sobredeterminado, con más ecuaciones que incógnitas, a no ser que estas 14 ecuaciones no sean independientes. Por ejemplo, si las ecuaciones (154) tienen la virtud de implicar automáticamente $A_\mu = 0$, cual será el caso si (154) lleva a que idénticamente $S^\nu_\sigma \equiv 0$.

Para seguir, hay que especificar L. AE reduce su atención a casos en que L es función cuadrática homogénea de las derivadas parciales del tensor métrico; esto obliga a que L sea combinación lineal de estas cinco expresiones:

$$\begin{aligned} &g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} g^{\sigma\tau}{}_{,\tau}, \quad g^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}{}_{,\rho} g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} \\ &g_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu}{}_{,\mu} g^{\beta\nu}{}_{,\nu}, \quad g_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu}{}_{,\nu} g^{\beta\nu}{}_{,\mu}, \\ &g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}{}_{,\rho} g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}. \end{aligned} \tag{158}$$

Afirma AE en este punto que la exigencia $S^\nu_\sigma \equiv 0$ se cumple solo con la última de estas expresiones, lo que le lleva a adoptarla en la forma equivalente (salvo factor constante)

$$L = \tfrac{1}{4} g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}{}_{,\rho} g_{\mu\nu,\sigma} \tag{159}$$

que conduce variacionalmente a las ecuaciones de campo presentadas en el *Entwurf.*

Esta afirmación del gran físico es incorrecta;[69] todas las otras opciones hubieran sido válidas desde este punto de vista, ya que todas satisfacen $S^\nu_\sigma \equiv 0$: en efecto, esta condición se cumple siempre que L sea escalar bajo transformaciones lineales cualesquiera, como se ve a partir de la relación

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta L = &|g|^{-1/2} S^\alpha_\mu (\partial_\mu \Delta x / \partial x^\alpha) + \\ &g^{\nu\alpha} (\partial L / \partial g^{\mu\nu}{}_{,\sigma})(\partial^2 \Delta x^\mu / \partial x^\sigma \partial x^\alpha) \end{aligned} \tag{160}$$

que generaliza a la primera de (149) cuando L es arbitrario, y en particular, no necesariamente invariante bajo transformaciones lineales. Nótese que si L es escalar bajo transformaciones lineales, ΔL debe anularse cualesquiera que sean los valores de $\partial\Delta x^\mu/\partial x^\alpha$ constantes, y por tanto nulas las segundas derivadas ($\partial^2\Delta x^\mu/\partial x^\sigma\partial x^\alpha$). De aquí que para tales L se satisfagan $S^\nu_\sigma \equiv 0$ automáticamente.

b. Algunas observaciones críticas AE pasa a reflexionar sobre algunos temas, por ejemplo, el concerniente a las curvas de género tiempo: ¿pueden ser cerradas? Se muestra incapaz de dar una respuesta, y dice que su existencia iría contra su intuición física más profunda,[70] pero que no encuentra razones para excluir su posibilidad.

4. *Sobre el contenido físico de las ecuaciones de campo obtenidas*

Para concluir esta notable publicación, AE analiza el caso de campos débiles, en que g es prácticamente constante, con el fin de extraer algunas consecuencias físicas de interés. Escribiendo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con $|h| \ll 1$, sus ecuaciones de campo y de energía-tensiones, en primer orden de aproximación, y despreciando términos de orden v^2 y superiores, llevan a

$$\begin{aligned} &\Box h_{\mu\nu} \approx \kappa\rho_0 c^2 \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}, \\ &\mathrm{d}^2 x^j / \mathrm{d}t^2 \approx -\tfrac{1}{2} c^2 \partial_j h_{00}, \end{aligned} \tag{161}$$

[69] J. Norton: *How Einstein Found His Field Equations: 1912-1915,* Historical Studies in the Physical Sciences **14**, 253-315 (1984).
[70] *Dies widerstrebt meinem physikalischen Gefühl aufs lebhafteste.*

cuando la fuente material es de tipo polvo y sus velocidades pequeñas. Suponiendo campos estáticos, las ecuaciones anteriores nos llevan a identificar $\kappa = 8\pi G_N/c^4$, y $h^{00} \approx 2\phi/c^2$, donde ϕ es el potencial gravitatorio newtoniano. De este modo recuperamos las ecuaciones conocidas del movimiento de los graves, y la ecuación de Poisson.

Finalmente, para un reloj en reposo dentro de un campo gravitatorio débil se tiene $(\sqrt{1 + 2\phi/c^2})\,\Delta t \approx \Delta s$, es decir, $(1 + \phi/c^2)\,\Delta t \approx \Delta s$, de donde se desprende tanto el retraso gravitacional de los relojes (la frecuencia de sus "tic-tacs" es proporcional a $(1 + \phi/c^2)$), como el desplazamiento gravitacional al rojo $\Delta\lambda/\lambda \approx \Delta\phi/c^2$, que para la luz que nos llega de la superficie solar vale $\approx 2 \times 10^{-6}$.

Asimismo la velocidad local de la luz depende del campo gravitatorio local: $c(x) \propto (1 + \phi/c^2)$, y experimenta, en consecuencia, una deflexión.

VIII. AÑO 1915

A. Trabajos de 1915. 1

Doc. 21, 4 de noviembre de 1915, del vol. 6 de los CPAE.[71]

Tras varios meses de silencio en torno a la gravitación, nos plantamos en el mítico mes de noviembre de 1915. Durante ese tiempo, AE se ha dado cuenta, primero, de su error en el trabajo que acabamos de discutir y que no le permite concluir el haber hallado la ecuación para el campo gravitatorio, es decir, la forma concreta de L. Con el fin de poder fijar la forma de L, vuelve a acariciar la idea de la covariancia general, que había abandonado tres años atrás cuando estaba trabajando con Grossmann. Sus reparos basados en el argumento del agujero se han disipado finalmente, tras aceptar que las coordenadas del espacio-tiempo carecen de objetividad física, y que solo los encuentros, las coincidencias entre líneas de universo, entre trayectorias de objetos o partículas, definen sucesos físicos reales, marcando de este modo sitios e instantes que los cambios de coordenadas evidentemente preservan.

En segundo lugar, AE escribe a Freundlich una carta[72] el 30 de septiembre de 2015 en la que le confiesa, "electrificado", que se ha percatado de un desafortunado error de cálculo que le había llevado a mantener que sus ecuaciones de campo dadas en el *Entwurf* no solo eran covariantes bajo cambios lineales sino también bajo cambio a sistemas de coordenadas rotantes, lo que parecía imprescindible para poder asimilar fuerzas inerciales de rotación con fuerzas de gravitación. No, no son covariantes bajo dichos cambios; *dies ist ein flagranter Widerspruch,* exclama. Tal constatación le supuso a AE un rudo golpe anímico que le impulsó de inmediato a abandonar el *Entwurf*.[73]

Y, tercera razón, le dolía el fracaso de sus intentos por explicar el avance anómalo del perihelio de Mercurio.[74]

Por todo ello, en este primer trabajo del año 1915 sobre gravitación va a proponer una importante extensión de la covariancia bajo todas las transformaciones de matriz jacobiana de determinante unidad. De nuevo el poderoso cálculo diferencial de Riemann, Christffel, Ricci y Levi-Civita vuelve al escenario.

1. Formación de nuevos covariantes

La premisa

$$\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)/\partial(x^0, x^1, x^2, x^3) := \det(\partial x'^\mu/\partial x^\nu) = 1$$

implica $d^4x' = d^4x$, y como $\sqrt{|g'|}d^4x' = \sqrt{|g|}d^4x$, también $\sqrt{|g'|} = \sqrt{|g|}$. Por tanto $\sqrt{|g|}$ es un campo escalar bajo el conjunto de difeomorfismos unimodulares.

---

[71] AE: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie,* Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte 778-786 (1915). Título en inglés: *On the General Theory of Relativity.*

[72] Doc. 123 del vol. 8 de los CPAE.

[73] M. Janssen: *Rotation as the Nemesis of Einstein's Entwurf Theory,* pp. 127-157 in: H. Goenner et al. (eds.), Einstein Studies. Vol. 7. The Expanding Worlds of General Relativity, Birkhäuser. Boston.

[74] Estos tres argumentos justificativos ofrecía el propio AE a su colega Sommerfeld en carta del 28 de noviembre de 1915. Ver Doc. 153 del vol. 8 de los CPAE.

Esta propiedad permite reconocer como covariantes nuevas expresiones; por ejemplo, la divergencia ordinaria. En efecto, la expresión covariante general.

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}A^\mu\right)_{,\mu} \tag{162}$$

puede reescribirse como

$$A^\mu{}_{;\mu} = A^\mu{}_{,\mu} + A^\mu \partial_\mu \log\sqrt{|g|}, \tag{163}$$

y por tanto, al ser $\log\sqrt{|g|}$ un escalar bajo los difeomorfismos unimodulares, $\partial_\mu \log\sqrt{|g|}$ es un vector covariante bajo ellos, el segundo sumando del miembro derecho de la fórmula anterior es otro escalar, y en consecuencia, la divergencia ordinaria A^μ lo es también. Otro tanto puede, decirse de $F^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ cuando $F^{\mu\nu}$ es antisimétrico.

Consideremos ahora el tensor de Riemann-Christoffel[75]

$$R^\mu_{\nu\lambda\rho} := \Gamma^\mu_{\rho\nu,\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu,\rho} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}, \tag{164}$$

del que se extrae por contracción el tensor de Ricci

$$R_{\nu\rho} := R^\mu_{\nu\mu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu,\mu} - \Gamma^\mu_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}. \tag{165}$$

Descompongamos este en las siguientes dos partes:

$$\begin{aligned} R_{\nu\rho} &= N_{\nu\rho} - P_{\nu\rho}, \\ N_{\nu\rho} &:= \Gamma^\mu_{\rho\nu,\mu} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}, \\ P_{\nu\rho} &:= \Gamma^\mu_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu}. \end{aligned} \tag{166}$$

Echando mano de las expresiones de los símbolos de Christoffel a través del tensor métrico, se ve que

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \partial_\nu \log\sqrt{|g|}, \tag{167}$$

lo que implica que $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ es un campo vectorial covariante bajo difeomorfismos unimodulares, y que $P_{\nu\rho} = 0$ en cartas unimodulares (esto es, cartas en las que $|g| = 1$). Por otro lado, la derivada covariante (que en particular lo es naturalmente bajo esta clase especial de difeomorfismos) del campo vectorial $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ en la dirección ρ es simplemente $P_{\nu\rho}$, por lo que este es un tensor covariante de orden dos bajo difeomorfismos modulares, y como Ricci $R_{\nu\rho}$ es covariante general, la diferencia $N_{\nu\rho}$ será asimismo un campo covariante de orden dos bajo tales difeormorfismos de determinante 1. Además, es fácil comprobar usando (167) que $P_{\nu\rho} = P_{\nu\rho}$, por lo que también $N_{\nu\rho}$ es simétrico. Según afirma AE, este tensor $N_{\nu\rho}$ es de suma importancia para la teoría de la gravitación.

2. *Nuevas ecuaciones de campo*

Propone AE como nuevas ecuaciones de campo

$$N_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{168}$$

Son covariantes bajo cambios de coordenadas arbitrarios de determinante jacobiano unidad.

Admiten formulación lagrangiana, con

$$L := g^{\mu\nu}\left[\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \kappa T_{\mu\nu}\right]. \tag{169}$$

Es, en efecto, fácil, aunque aburridamente largo, probar que

$$\begin{aligned} \partial L/\partial g^{\mu\nu} &= -\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \kappa T_{\mu\nu}, \\ \partial L/\partial g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} &= -\Gamma^\sigma_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{170}$$

por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange (¡si ignoramos el factor $\sqrt{|g|}$ necesario para que el elemento de volumen sea escalar bajo cambios generales de coordenadas!) conducen a (168). De no imponerse esta condición, este lagrangiano de AE no conduce a las ecuaciones (168), sino a otras más complejas.[76] Como justificación del "olvido" de $\sqrt{|g|}$ está el he-

---

[75] En el antiguo cálculo diferencial absoluto, la notación era muy distinta. Se manejaban los símbolos de Christoffel de primera y de segunda especie, que a su vez se escribían primero en vertical y más tarde en horizontal:

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = \begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix} = [\mu\nu,\alpha] := \tfrac{1}{2}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}),$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} = \{\mu\nu,\alpha\} &:= g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\mu\nu\sigma} \\ &= \tfrac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}).\end{aligned}$$

[76] M. Janssen, J. Renn: *Untying the knot: how Einstein found his way back to field equations discarded in the Zurich notebook,* in THE GENESIS OF GENERAL RELATIVITY, volume 250 of Boston Studies in the Philosophy of Science, Springer Netherlands, (2007).

cho de la restricción inicial a la covariancia solo bajo difeomorfismos unimodulares, para los cuales la densidad $\sqrt{|g|}$ se comporta como un escalar.

3. *Tensor de energía-tensiones*

De las ecuaciones anteriores (168-170) se desprende, tras multiplicar (168) por $g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}$ que

$$\partial L/\partial x^\sigma - \partial_\alpha(g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}\partial L/\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}) = \kappa g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}T_{\mu\nu}. \quad (171)$$

Por otro lado, el tensor de energía-tensiones de la parte material satisface (ver 121, y suponer que $\sqrt{|g|}$ es constante, lo que es cierto, por ejemplo, para cartas unimodulares)

$$\left(T_\mu{}^\nu\right)_{,\nu} = -\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}T_{\alpha\beta}. \quad (172)$$

De ambas resulta

$$\left(T_\mu{}^\nu + t_\mu{}^\nu\right)_{,\nu} = 0, \quad (173)$$

donde

$$\begin{aligned} t_\mu{}^\nu &:= (2\kappa)^{-1}\left(L\delta_\mu^\nu - g^{\alpha\beta}_{,\mu}\partial L/\partial g^{\alpha\beta}_{,\nu}\right) \\ &= \kappa^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\delta_\mu^\nu g^{\lambda\rho}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\Gamma^\beta_{\rho\alpha} - g^{\lambda\rho}\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\Gamma^\nu_{\rho\alpha}\right) \end{aligned} \quad (174)$$

es el "tensor" de energía-tensiones del campo gravitatorio (solo es tensorial bajo transformaciones lineales).

De (168, 173) se obtiene, directamente,

$$\begin{aligned} &\kappa T_\rho{}^\rho = \\ &-g^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\beta} - (g^{\alpha\beta}\partial_\beta \log\sqrt{|g|})_{,\alpha}, \\ &\partial_\mu\left(g^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\beta}\right) = 0. \end{aligned} \quad (175)$$

La última indica que el interior de su paréntisis tiene valor constante; es natural exigir la nulidad de dicho valor, es decir, reemplazarla por

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\beta} = 0. \quad (176)$$

Esta ecuación limita los sistemas de referencia a usar: aquellos que cumplen (176). En particular, la ecuación anterior, unida a la primera de (175), lleva a

$$-(g^{\alpha\beta}\partial_\beta \log\sqrt{|g|})_{,\alpha} = \kappa T_\rho{}^\rho, \quad (177)$$

relación que impide por lo general elegir sistemas de coordenadas unimodulares, esto es, satisfaciendo $|g| = 1$, ya que solo sería posible si la traza del tensor de materia fuese idénticamente nula.

Concluye AE este trabajo indicando que en una primera aproximación (176) se reduce a $g^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} = 0$; esta ecuación por sí sola no logra determinar el sistema de referencia (exigencia que requeriría cuatro condiciones), y tentativamente sugiere, de modo totalmente arbitrario, reforzarla cambiándola por $g^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$, $\alpha = 0, ..., 3$. Y termina señalando que en esta teoría, que admite cambios arbitrarios de coordenadas de tipo unimodular, tienen cabida los cambios a sistemas rotantes con cualquier velocidad angular y a sistemas con origen trasladándose de modo arbitrario, como por ejemplo

$$\begin{aligned} &x \mapsto x' = x\cos\phi(t) + y\sin\phi(t), \\ &y \mapsto y' = -x\sin\phi(t) + y\cos\phi(t), \\ &z \mapsto z' = z, \quad t' = t \end{aligned} \quad (178)$$

y

$$\begin{aligned} &x \mapsto x' = x - a_1(t), \\ &y \mapsto y' = y - a_2(t), \\ &z \mapsto z' = z - a_3(t), \\ &t' = t. \end{aligned} \quad (179)$$

Estos cambios son claramente unimodulares.

B. Trabajos de 1915. 2

Doc. 22, 11 de noviembre de 1915, del vol. 6 de los CPAE.[77]

Interesante nota ésta. La imaginación de AE es sorprendente. Para dar cobijo a los sistemas de coordenadas con $|g| = 1$, propone abandonar la materia como sustancia primitiva y pensar que quizá, tal como proponen muchos físicos, su origen sea puramente electromagnético, de modo que la traza $T := T_\rho{}^\rho$ bien pudiera ser idénticamente nula; y como quiera que su expresión

[77] AE: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag),* Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte 799-801 (1915). Título en inglés: *On the General Theory of Relativity (Addendum).*

habitual para la materia es $T_\rho^{\ \rho} = \rho_0 c^2$ y por ende con valor no nulo, AE sugiere que tal vez sea el propio campo gravitatorio el que, a través de su contribución $t_\rho^{\ \sigma}$ al tensorde energía-tensiones, sea el responsable del valor positivo de la traza para sistemas materiales. Propone en consecuencia que se acepte $T_\rho^{\ \rho} = 0$ como hipótesis admisible, junto a la idea de que el campo gravitatorio va a jugar paper esencial en la estructura de la materia.

De este modo, además, puede sugerir como posibles ecuaciones de campo unas que por fin son covariantes generales, a saber, mediante el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{180}$$

En efecto, si elegimos coordenadas unimodulares, en estas $R_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}$ y (180) equivale a la ecuación (168) propuesta en el trabajo anterior, y que admite a los cambios unmodulares como transformaciones de covariancia. Allí, las cartas coordenadas solo podían ser unimodulares si la traza del tensor de energía era nula (recuérdese (177)); ahora, cuando siempre elegiremos $\sqrt{|g|} = 1$, se encargarán las propias ecuaciones de campo (180) de ser inconsistentes excepto si $T = 0$.[78]

C. Trabajos de 1915. 3

Doc. 24, 18 de noviembre de 1915, del vol. 6 de los CPAE.[79]

Histórico trabajo de 4 páginas. En él consigue AE su sueño de explicar el avance anómalo del perihelio de Mercurio. Se basa en las ecuaciones (168) introducidas dos semanas antes. Considera el campo producido por el Sol, situado, en reposo, en el origen de coordenadas. Fuera de él, $N_{\mu\nu} = 0$. Escribamos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con $|h_{..}| \ll 1$. AE se limita a dar la métrica solo hasta orden 1 inclusive; y propone esta:

$$\begin{aligned} &g_{00} \approx 1 - \bar\kappa_\odot/r, \quad g_{0j} = g_{j0} \approx 0 \\ &g_{ij} \approx -\delta_{ij} - \bar\kappa_\odot x^i x^j/r^3, \end{aligned} \tag{181}$$

en coordenadas $x0$, x^i, i =1, 2, 3, con $r := ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2}$. Los ordenes superiores pueden ser calculados iterativamente, aunque cada vez el cálculo es más penoso.[80]

El cálculo con la aproximación (181) lleva a $N_{\mu\nu} = 0 + O(\bar\kappa_\odot^2)$.

AE se las ingenia, sin embargo, para obtener a través de la ecuación $N_{00} = 0$ la componente de segundo orden del coeficiente de Christoffel Γ^i_{00} que necesita para estudiar las geodésicas, y en particular, estimar el avance del perihelio de Mercurio.

Antes de pasar a Mercurio, AE se autocorrige en cuanto a la deflexión de la luz; no presenta los cálculos (son bien conocidos a través de las geodésicas tipo luz) y afirma por fin que el angulo de deflexión en incidencia rasante al Sol es 1.7 arcosegundos, justo el doble de lo que había estimado en tiempos pasados. La modificación de la métrica espacial en primer orden, que hasta entonces había evitado "curvando" solo el tiempo sin tocar el espacio, es reponsable de este reforzamiento de la deflexión. No cambia, sin embargo, su estimación para el desplazamiento gravitatorio hacia el rojo, pues solo depende de g_{00}.

Vayamos ahora con el perihelio de los planetas. Tomamos como lagrangiano (por unidad de masa y en unidades $c = 1$) el que proporciona la métrica exacta

$$\begin{aligned} L &:= -\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t \\ &= -\sqrt{\frac{1 - v^2 - \frac{2\bar\kappa_\odot}{r} - \frac{\bar\kappa_\odot \dot r^2}{r} + \frac{\bar\kappa_\odot v^2}{r} + \frac{\bar\kappa_\odot^2}{r^2}}{1 - \frac{\bar\kappa_\odot}{r}}}. \end{aligned} \tag{182}$$

---

[78] Este podría ser el argumento: sabemos que ha de ser $(T_\mu^{\ \nu})_{;\nu} = 0$, y que además, por la segunda identidad de Bianchi, $(R_\mu^{\ \nu})_{;\nu} = \frac{1}{2} R_{,\mu}$. Por tanto (180) exige que $R_{,\mu} = 0$, y por ello R = const. Es natural que tal constante sea nula, y en consecuencia también T.

[79] AE: *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie,* Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte 831-839 (1915). Título en inglés: *Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity.*

[80] He conseguido hallar la expresión general, muy simple, y esencialmente única, que supongo debe ser conocida, pero que no he visto en ningún lugar:

$$\begin{aligned} &g_{00} = 1 - \bar\kappa_\odot/r, \quad g_{0j} = g_{j0} = 0 \\ &g_{ij} = -\delta_{ij} - \bar\kappa_\odot x^i x^j/(r^2(r - \bar\kappa_\odot)). \end{aligned}$$

Es un sistema de referencia exactamente unimodular, en el que $R_{\mu\nu} = N_{\mu\nu} = 0$, para todo $r > 0$.

El análisis en polares de las ecuaciones del movimiento, reducidas mediante la invariancia rotacional al plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, y en las variables r, ϕ, lleva a

$$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}r = \frac{\ell/r}{\sqrt{-\ell^2(1-\frac{\bar{\kappa}_\odot}{r}) + r^2(\frac{\bar{\kappa}_\odot}{r} - (1-e^2))}}, \quad (183)$$

donde l es el momento angular por unidad de masa, y e la energía total (en reposo más la de enlace) por unidad de masa. Coincide con el resultado obtenible con la métrica de Schwarzschild.[81]

Pasando a la variable $u := 1/r$, es fácil ver que

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}u/\mathrm{d}\phi)^2 &= u^4(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\phi)^2 \\ &= -\frac{1-e^2}{\ell^2} + \frac{\bar{\kappa}_\odot}{\ell^2}u - u^2 + \bar{\kappa}_\odot u^3.\end{aligned} \quad (184)$$

El cambio $u \to (4/\bar{\kappa}_\odot)\bar{u} + 1/(3\bar{\kappa}_\odot)$ lleva el miembro de la derecha de la anterior expresión a la forma normal de Weierstrass

$$(\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}\phi)^2 = 4\bar{u}^3 - g_2\bar{u} - g_3, \quad (185)$$

donde, tras reintroducir c,

$$\begin{aligned}g_2 &:= \frac{1}{12} - \frac{\bar{\kappa}_\odot^2}{4(\ell/c)^2}, \\ g_3 &:= \frac{2(\ell/c)^2 + 9(2-3e^2)\bar{\kappa}_\odot^2}{432(\ell/c)^2}.\end{aligned} \quad (186)$$

En consecuencia, la solución de la anterior ecuación diferencial viene dada por la función $\wp$ de Weierstrass, y por ello también $r(\phi)$. Concretamente,

$$r = \frac{\bar{\kappa}_\odot/4}{\frac{1}{12} + \wp(\phi + \psi_0; g_2, g_3)}, \quad (187)$$

donde ψ_0 es una constante compleja a fijar por las condiciones inciales, es la fórmula exacta para la trayectoria del planeta como geodésica bajo la métrica unimodular escogida.[82]

La función $\wp(\phi+\psi_0; g_2, g_3)$ tiene dos semiperiodos: uno real, de valor $\omega_1 = 3.141592904505435$, otro imaginario puro, de valor $\omega_2 = 20.41023155083412$ i. Por tanto el avance del perihelio de Mercurio por órbita es

$$\triangle_{\text{órbita}}\phi = 2\omega_1 - 2\pi = 5.018313 \times 10^{-7} \text{ rad} \quad (188)$$

y en un siglo

$$\triangle_{\text{siglo}}\phi = \triangle_{\text{órbita}}\phi \times \frac{\text{siglo}}{T_{\text{Merc}}} = 42.9776'', \quad (189)$$

a comparar con el valor 42.98 ± 0.04 deducido de la observación (tras tener en cuenta todas las contribuciones debidas a los planetas y al achatamiento solar); para el cálculo hemos usado los siguientes datos (ver(88)):

$$\begin{aligned}&\bar{\kappa}_\odot = 2953.25008 \text{ m}, \\ &\ell_{\text{Merc}} = 271308044.5 \times 10^7 \text{ m}^2\,\text{s}^{-1}, \\ &e_{\text{Merc}} = 1 - 1.27494909 \times 10^{-8}, \\ &T_{\text{Merc}} = \text{siglo}/415.2019.\end{aligned} \quad (190)$$

Este espectacular éxito es compartido aparentemente por otros planetas, como Marte y la Tierra, para los que AE obtiene unos avances de 1″ y 4″ por siglo, a comparar con los datos astronómicos de entonces (9″ y 11″). Con los datos actuales, sin embargo, las predicciones (3.8385″) y la observación (3.8387 ± 0.0004″) para la Tierra son claramente compatibles; asimismo para Marte (AE, 1.3509″, observación 1.35″).[83]

D. Trabajos de 1915. 4

Doc. 25, 25 de noviembre de 1915, del vol. 6 de los CPAE.[84]

Llegamos por último al día clave. Sesión de la Academia Prusiana de Ciencias celebrada el 25 de noviembre de 1915. AE presenta por fin sus ecuaciones de campo para la gravitación, unas ecuaciones que ya había considerado, y desechado, tres años antes. Empieza recordando que en sus dos trabajos anteriores había propuesto unas ecuaciones covariantes bajo cambios unimodulares de coordenadas, y que su covariancia es general si el tensor de energía es de traza nula, caso

---

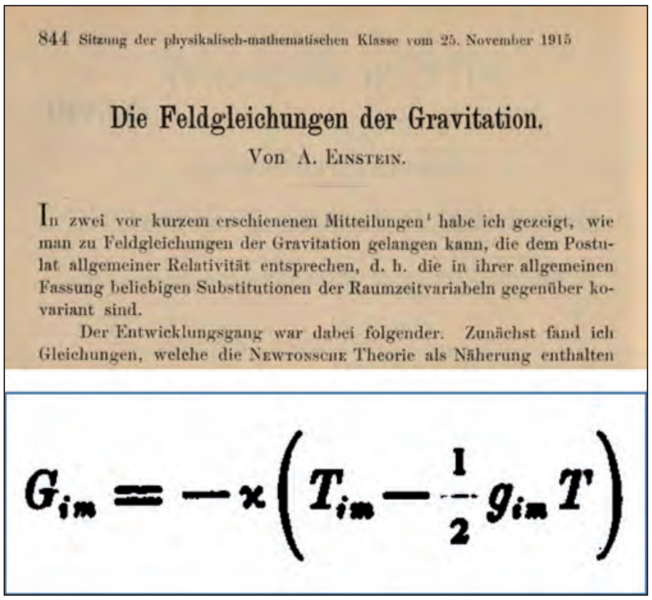
[81] G. V. Kraniotis, S. B. Whitehouse: loc. cit. En nuestro análisis numérico del problema seguiremos los pasos de estos autores.

[82] Para que (187) represente la órbita de Mercurio, con el perihelio en el origen de ángulos polares, debemos tomar $\psi_0 = \omega_2$ módulo la red engendrada por los periodos $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ correspondientes al par $\{g_2, g_3\}$.

[83] K. Wilhelm, B.N. Dwivedi: *Secular perihelion advances of the inner planets and asteroid Icarus,* New Astronomy **31**, 51-55 (2014).

[84] AE: Die *Feldgleichungen der Gravitation,* Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte 844-847 (1915). Título en inglés: *The Field Equations of Gravitation.*

este en que se pueden escoger sistemas de referencia unimodulares en los que las ecuaciones se simplifican enormemente. Continúa diciendo que en los últimos días ha conseguido deshacerse de la condición $T = 0$ con un simple cambio en las ecuaciones, cambio que no afecta para nada al cálculo del perihelio, que solo utiliza las ecuaciones en el vacío exterior a la fuente, y estas no se ven perturbadas por la introducción explícita de dicha traza.



844 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen[1] habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariabeln gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die Newtonsche Theorie als Näherung enthalten

$$G_{im} = -\varkappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right)$$

Figura 2. Ecuaciones de campo de la gravitación, 25 de noviembre de 1915.

Estas son las ecuaciones propuestas:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_{\rm N}}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \quad T := T^{\alpha}_{\alpha}. \tag{191}$$

En coordenadas unimodulares,

$$N_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_{\rm N}}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \tag{192}$$

Un sencillo cálculo conduce a

$$\partial^2_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G_{\rm N}}{c^4}(T + t), \quad t := t^{\sigma}_{\sigma}, \tag{193}$$

en lugar de (176). Ahora ya no hay limitación alguna al uso de sistemas de referencia. Además el tensor de energía-tensiones puede ser completamente general; solo debe cumplir que su divergencia covariante sea nula, o, como dice AE, el teorema de conservación de energía-momento.

Concluye AE este histórico trabajo diciendo que culmina con él la teoría general de la relatividad como estructura lógica. El postulado de relatividad en su formulación más general (que hace de las coordenadas espaciotemporales parámetros sin significado físico) lleva de modo irresistible a una teoría de la gravitación que explica la anomalía del perihelio de Mercurio. No obstante, el postulado de la relatividad general no puede revelarnos nada nuevo sobre la esencia de los procesos físicos que no nos haya enseñado ya la relatividad especial. Confiesa AE que sus opiniones al respecto allí expresadas con anterioridad estaban equivocadas. Cualquier teoría física compatible con la relatividad especial puede integrarse en el marco de la relatividad general con ayuda del cálculo diferencial absoluto, sin que la RG ponga limitación propia alguna.

IX. EPILOGO

Terminamos este largo relato de un viaje agotador hacia un mundo por descubrir, sin sendas transitadas ni mapas orientadores; solo disponía nuestro viajero del recurso de una mente prodigiosa y de una voluntad inquebrantable para correr en pos de un sueño emanado de una idea feliz habida en un día cualquiera de aquel otoño bernés de 1907.