ESPACIOS DE FUNCIONES DIFERENCIABLES CON LA PROPIEDAD DE APROXIMACION

F. Bombal Gordón

Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense

Recibido: 3-XI-1976

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

R. M. Aron and M. Schottenloher prove in [1] that a complex Banach space E verifies the Grothendieck's approximation property if and only if the space $\mathcal{H}$ (E), of analytic mappings on E with the compact-open topology, verifies it. In the real case, we prove in [2] that a real Banach space E verifies the approximation property if and only if the space C^n_c (E), of n times continuously differentiable real functions in the sense of Hadamard on E, endowed with the topology which has as a base of neighborhoods of 0 the sets:

$$T(K, r) = \{ f \in C^n_c(E) : D^p f(K)(K^p) \subset [-r, r], \quad 0 \leqslant p \leqslant n \}$$

where K runs over the compact sets of E and $r > 0$, verifies the approximation property for some (and hence for every) $n \geqslant 1$. In this note, we prove this result when considering instead of C^n_c (E), the space of n times continuously differentiable functions with respect to any other notion of differentiation which satisfies some reasonables conditions (verified in particular by the Fréchet differential).

Introducción

En [1] se prueba que un espacio de Banach complejo E verifica la propiedad de aproximación de Grothendieck si y sólo si el espacio $\mathcal{H}$ (E) de las funciones holomorfas sobre E con la topología compacto-abierta, la verifica.

Si se trata de extender este resultado para espacios de funciones diferenciables reales, aparecen dificultades que parecen indicar que la topología usual en los espacios C^n (E, F), de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas sobre los compactos de E, no es la más adecuada. Asimismo, esta topología no permite obtener buenos resultados relativos a propiedades de densidad y aproximación en espacios de funciones diferenciables, como muestra un contraejemplo de Lesmes (véase [4]). En relación con estos problemas, G. Llavona consideró en [3] otras topologías en $C^n(E, F)$, que permiten obtener resultados satisfactorios en esta dirección.

Por otro lado, la diferencial de Frechet presenta dificultades al estudiar propiedades de completitud del espacio $C^n(E, F)$ con estas nuevas topologías. Por estas razones, en [2] se considera el espacio $C^n_c(E, F)$ de las funciones de clase n de E en F, en el sentido de Hadamard, dotado de la topología que tiene como base de entornos de 0 los conjuntos

$$T(K, V) = \{f \in C^n_c(E, F) : D^p f(K)(K^p) \subset V, \quad 0 \leqslant p \leqslant n\},$$

cuando K recorre los compactos de E y V recorre una base de entornos de 0 en F, probándose que un espacio de Banach real E verifica la propiedad de aproximación si y sólo si

$$C^n_c(E) = C^n_c(E, R)$$

la verifica para algún (y, en consecuencia, para todo) $n \geqslant 1$.

El objeto de esta nota es probar este resultado cuando se considera, en lugar de $C^n_c(E)$, el espacio de funciones de clase n con respecto a cualquier otra noción de diferenciación que satisfaga algunas condiciones razonables (que, en particular, satisface la noción de diferencial de Frechet).

* * *

Sea E un espacio de Banach real y X un espacio localmente convexo separado real. Designaremos por $\mathcal{L}(E, X)$ el espacio de las aplicaciones lineales continuas de E en X, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotadosde E, y por $\mathcal{L}^n(E, X)$ el espacio

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{n-1}(E, X)) \ (n > 1).$$

Denotaremos por $P_f(E, X)$ el espacio de los polinomios de tipo finito de E en X, es decir, el espacio vectorial engendrado por las aplicaciones

$$x \longmapsto \langle x, x \rangle^n v$$

cuando $x' \in E'$, $v \in X$ y $n \in N$. Está claro que

$$P_f(E, X) \subset C^n_c(E, X)$$

para cada $n \in N$ (véase [2] para notaciones y terminología).

1. PROPOSICIÓN.—*Si E verifica la propiedad de aproximación, entonces* $P_f(E) = P_f(E, R)$ *es denso en* $C^n_c(E)$.

DEMOSTRACIÓN [1].—Sea $T(K, [-r, r])$ un entorno de **0** en $C^n_c(E)$ y $f \in C^n_c(E)$. Por el lema 5 de [2], existe $u \in E' \otimes E$ tal que

$$f - f \cdot u \in T(K, [-r/2, r/2]).$$

Si $E_0 = u(E)$ y $f_0 = f_{|E_0}$, por el teorema de Nachbin ([5]), existe $g_0 \in P_f(E_0)$ tal que

$$f_0 - g_0 \in T(u(K), [-r/2, r/2]) \subset C^n_c(E_0).$$

Entonces $g_0 \circ u \in P_f(E)$ y

$$f - g_0 \circ u \in T(K, [-r, r]).$$

2. COROLARIO.—*Si E verifica la propiedad de aproximación, entonces* $P_f(E, X)$ *es denso en* $C^n_c(E, X)$ *para cada* $n \geqslant 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Por el teorema 6 de [2], $C^n_c(E) \otimes X$ es denso en $C^n_c(E, X)$, y la proposición 1 prueba que

$$P_f(E) \otimes X = P_f(E, X)$$

es denso en $C^n_c(E) \otimes X$.

---

[1] Esta demostración es análoga a la del teorema 3.6 de [3], usando el lema 5 de [2] en vez del teorema 1.6 de [3].

Sea ahora $C^n(E, X)$ el espacio de las funciones de clase n de E en X, con respecto a una noción de deferenciabilidad que satisfaga [2]:

a) Si E es de dimensión finita, esta noción coincide con la usual.

b) Si f es diferenciable, es también diferenciable en sentido de Hadamard.

c) Se verifica la regla de la cadena para funciones diferenciables.

d) Si $u \in \mathcal{L}(E, X)$, entonces $u \in C^n(E, X)$ y $D\,u(x) = u$ para todo $x \in E$, $D^p u(x) = 0$ si $p > 1$.

e) Si $f \in C^n(E, X)$, entonces para cada p, $0 \leqslant p \leqslant n$, $D^p f$ es una aplicación continua de E en $\mathcal{L}^p(E, X)$, y $D^p f(x)$ es simétrica.

f) La composición de una función de clase n y una aplicación lineal continua, es una función de clase n.

Entonces se tiene

$$P_f(E, X) \subset C^n(E, X) \subset C^n_c(E, X),$$

para cada $n \in N$. Consideraremos en $C^n(E, X)$ la topología inducida por la de $C^n_c(E, X)$.

3. Proposición.—*Si E verifica la propiedad de aproximación y X es completo, entonces* $C^n_c(E, X)$ *es el completado de* $C^n(E, X)$ *para cada* $n \geqslant 1$.

Demostración.—$C^n_c(E, X)$ es completo por el teorema 7 de [2], y $C^n(E, X)$ es denso en $C^n_c(E, X)$ por el corolario 2.

4. Teorema [3].—*Sea E un espacio de Banach y* $n \geqslant 1$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

4.1. *E tiene la propiedad de aproximación.*

4.2. $C^n_c(E)$ *tiene la propiedad de aproximación.*

4.3. $C^n_c(E, X)$ *tiene la propiedad de aproximación, para todo espacio localmente convexo completo, X, que tenga la propiedad de aproximación.*

---

[2] Las nociones usuales de diferenciabilidad cumplen estas condiciones, en particular la diferencial de Fréchet las cumple. Véase [7].

[3] Recientemente el profesor R. M. Aron nos ha comunicado que ha obtenido la equivalencia de 4.1 con 4.5 para la diferencial de Fréchet, utilizando técnicas enteramente diferentes a las empleadas en esta nota.

4.4. *$C^n(E, X)$ tiene la propiedad de aproximación, para todo espacio localmente convexo completo, X, que tenga la propiedad de aproximación.*

4.5. *$C^n(E) = C^n(E, R)$ tiene la propiedad de aproximación.*

DEMOSTRACIÓN.—Las equivalencias de 4.1 con 4.2 y 4.3 se han probado en [2], teorema 11. 4.3 $\Longrightarrow$ 4.4 resulta de la proposición 3 y el resultado general siguiente: Si el completado de un espacio localmente convexo X tiene la propiedad de aproximación, entonces X también tiene la propiedad de aproximación ([6], exp. 15, th. 7). 4.4 $\Longrightarrow$ 4.5 es evidente.

Para ver que 4.5 $\Longrightarrow$ 4.1, notemos que, razonando como en el teorema 10 de [2], se prueba que la aplicación

$$\varphi: C^n(E, X) \longrightarrow \mathcal{L}_\varepsilon(X'_c, C^n(E)) = C^n(E) \,\varepsilon\, X \text{ (4)}$$

definida por $\varphi(f)(y') = y' \circ f$, es un isomorfismo topológico de $C^n(E, X)$ sobre su imagen; de este modo podemos identificar $C^n(E, X)$ con un subespacio de $C^n(E) \,\varepsilon\, X$. Si 4.5 es cierto, por un resultado general ([6], exp. 14, th. 2) $C^n(E) \otimes X$ es denso en $C^n(E) \,\varepsilon\, X$ y entonces, a «fortiori», en $C^n(E, X)$, para todo espacio localmente convexo X. Por tanto, E tiene la propiedad de aproximación por [3], teorema 2.6.

5. OBSERVACIONES.

a) Del corolario 2 resulta también que $C^n_c(E, X)$ es el completado de $P_f(E, X)$, para todo espacio localmente convexo completo X. Por tanto, si E verifica la propiedad de aproximación, razonando como en 4.3 $\Longrightarrow$ 4.4 resulta que $P_f(E, X)$ también la verifica (con la topología inducida por la de $C^n_c(E, X)$), para todo espacio localmente convexo completo, X, que tenga la propiedad de aproximación.

b) Sea $\mathfrak{S}$ una familia de conjuntos acotados de E que contenga a los compactos. Si cambiamos la noción de función de clase n, imponiendo que $D^p f$ sea diferenciable para $0 \leqslant p < n$, y continua para $0 \leqslant p \leqslant n$ como función de E en $\mathcal{L}^p(E, X)$ con la correspondiente $\mathfrak{S}$-topología, conservando todas las demás propiedades, resulta fácilmente que la proposición 3 y el teorema 4 siguen siendo válidos.

(4) $X \,\varepsilon\, Y$ denota el ε-producto de X e Y. Véase, por ejemplo, [6].

Bibliografía

[1] Aron, R. M. y Schottenloher, M. 1974. Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, vol. 80, núm. 6.

[2] Bombal, F. y LLAVONA, J. L. G. La propiedad de aproximación en espacios de funciones diferenciables. *Rev. Real Acad. Ciencias de Madrid*, t. 70, 337-346 (1976).

[3] González Llavona, J. L. 1975. Aproximación de funciones diferenciables. Tesis doctoral. Publicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense.

[4] Lesmes, J. 1974. On the approximation of continuously differentiable functions in Hilbert spaces. *Rev. Colombiana de Matemáticas*, vol. VIII, 217-223.

[5] Nachbin, L. 1949. Sur les algebres denses de fonctions différentiables sur une variété. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **288**, 1549-1551.

[6] Schwartz, L.: 1953/54. Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Séminaire Schwartz.

[7] Yamamuro, S. 1974. Differential calculus in topological linear spaces. *Lect. Notes. in Math.*, núm. 374. Springer, Berlín.