SOBRE EL ESPACIO $L^p(\mu, X)$ (*)

F. Bombal Gordón

Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense

The basic questions in the study of the structure of the spaces $L^p(\mu, X)$ of Bochner-integrable functions with values in the Banach space X, are what properties of $L^p(\mu, X)$ are inherited from $L^p(\mu)$ and X and what properties of X and $L^p(\mu)$ are consequences of properties of $L^p(\mu, X)$. Converning the weak topology, one of the fundamental difficulties is the complexity of the dual space. However, $L^q(\mu, X')$ is always (isometric to) a closed, norming subspace of $L^p(\mu, X)'$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, which separates points. In this note, we study some properties of the dual pair $\langle L^p(\mu, X), L^q(\mu, X')\rangle$ for $1 < p < \infty$. In particular, we characterize the weakly sequentially compact sets and the weak sequential completeness.

En lo que sigue, (S, μ, Σ) designará un espacio de medida finito y X un espacio de Banach. Para las notaciones y terminología usual respecto a los espacios $L^p(\mu, X) = L^p(X)$ y, en general, para las nociones que no se definan a continuación, nos remitimos a [2] o [4]. Designaremos por $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ el espacio de las funciones simples Σ-medibles de S en X, y por $V_p(\mu, X) = V_p(X)$ el espacio de Banach de las medidas finitamente aditivas de Σ en X, de p-variación finita, con la norma de la p-variación ([3], § 13). La aplicación que asocia a cada $m \in V_p(X')$ el elemento T_m de $L^q(X)'$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, definido por

$$T_m(f) = \int f\, dm,$$

es una biyección isométrica. Por otro lado, cada $f \in L^p(X)$ se puede identificar con el elemento μ_f de $V_p(X)$ definido por

$$\mu_f(A) = \int_A f\, d\mu,$$

(*) Presentada en la sesión celebrada el 5 de marzo de 1980.

para cada $A \in \Sigma$. Es fácil ver que si $f \in L^1(X)$ y $\mu_f \in V_p(X)$, entonces $f \in L^p(X)$ y $\| f \|_p = | \mu_f |_p$.

Es bien conocido (véase, p. ej., [2], IV.1.1) que X′ posee la propiedad de Radon-Nikodym (P. R. N.) si y sólo si

$$L^p(\mu, X)' = L^q(\mu, X') \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

para toda medida finita μ (o simplemente para la medida de Lebesgue en $[0, 1]$) y algún p (y como consecuencia, para todos), con $1 \leqslant p < \infty$. En cualquier caso, $L^q(\mu, X')$ (resp. $L^p(\mu, X)$ siempre es (isométrico a) un subespacio cerrado, normante y que distingue puntos de $L^p(\mu, X')$ (resp. $L^q(\mu, X')'$). En particular, $\langle L^p(\mu, X), L^q(\mu, X')\rangle$ forman un par dual, siendo la aplicación de dualidad la

$$(f, g) \longmapsto \int \langle f, g\rangle \, d\mu .$$

El objeto de esta nota es estudiar algunas propiedades de esta dualidad, especialmente las relativas a la completitud y compacidad en la topología débil.

Para cada $A \in \Sigma$, la aplicación lineal Π_A^X (resp. I_A^X) de $L^p(X)$ en X (resp. de X en $L^p(X)$), definida por

$$\pi_A^X(f) = \int_A f \, d\mu \qquad (\text{resp.,} \quad I_A^X(x) = x\chi_A)$$

es continua, y un morfismo estricto si $\mu(A) > 0$. Se verifica entonces:

1. Lema.—*Sea*

$$1 \leq p \leq \infty \quad y \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Con las notaciones anteriores, se tiene:

1.1. *Si* $\mu(A) > 0$, I_A^X *(resp.* $I_A^{X'}$*) es un morfismo estricto para las topologías* $\sigma(X, X')$ *y* $\sigma(L^p(X), L^q(X'))$ *(resp.* $\sigma(X', X)$ *y* $\sigma(L^q(X'), L^p(X))$*).*

1.2. *Respecto a las dualidades* $\langle X, X'\rangle$ *y* $\langle L^p(X), L^q(X')\rangle$, *la* *transpuesta de* I_X^A *es* $\Pi_A^{X'}$ *y la de* $I_A^{X'}$ *es* Π_A^X. *En particular,* Π_A^X *y* $\Pi_A^{X'}$ *son continuas para las topologías débiles respectivas.*

1.3. $I_A^{X'}(X')$ *(resp.* $I_A^X(X)$*) es* $\sigma(L^q(X'), L^p(X))$*-cerrado (resp.* $\sigma(L^p(X), L^q(X'))$*-cerrado) y también* $\sigma(L^p(X)', L^p(X))$*-cerrado.*

2. TEOREMA.—*Sea* $1 < p < \infty$. *Si* $K \subset L^p(X)$ *es* $\sigma(L^p(X), L^q(X'))$*-relativamente secuencialmente compacto, entonces*

2.1. *Sup* $\{\| f \|_p : f \in K\} = M < \infty$.

2.2. *Para todo* $A \in \Sigma$,

$$K(A) = \left\{ \int_A f \, d\mu : f \in K \right\}$$

es débilmente relativamente compacto.

El recíproco se verifica si X tiene la P. R. N.

DEMOSTRACIÓN.—Procediendo como en [1] se prueba que si K es relativamente secuencialmente compacto para $\sigma(L^p(X), L^q(X'))$ se cumple 2.1. El lema 1.2 prueba que también se cumple 2.2.

Recíprocamente, si K verifica 2.1 y 2.2 y (f_n) es una sucesión en K, se prueba como consecuencia de [4], III.8.5 y IV.8.8 y de 2.2, que existe una σ-álgebra $\Sigma_1 \subset \Sigma$ generada por una familia contable de conjuntos, y una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n), de modo que existe

$$(*) \qquad m(A) = \lim \int_A f_{n_k} \, d\mu \quad \text{en} \quad \sigma(X, X'), \quad \forall A \in \Sigma_1,$$

y m es numerable aditiva y μ_1-continua, siendo $\mu_1 = \mu_{|\Sigma_1}$. Es fácil ver que $m \in V_p(\mu_1, X)$, luego si X tiene la P. R. N., existe $f \in L^p(\mu_1, X)$ tal que $m = \mu_f$ y $\| f \|_p \leq M$. De 2.1 y la densidad de $\mathcal{S}(\Sigma_1, X')$ en $L^q(\mu_1, X')$, resulta entonces que

$$\int \langle f_{n_k}, g \rangle \, d\mu \longrightarrow \int \langle f, g \rangle \, d\mu, \qquad \forall g \in L^q(\mu_1, X').$$

Si $E_1 : L^q(\mu, X') \longrightarrow L^q(\mu_1, X')$ es la esperanza condicional relativa a la σ-álgebra Σ_1 ([2], V.1.4), entonces $\forall g \in L^q(\mu, X')$,

$$\int \langle f_{n_k} - f, g \rangle \, d\mu = \int \langle f_{n_k} - f, E_1(g) \rangle \, d\mu \xrightarrow[k \to \infty]{} 0,$$

lo que prueba que (f_{n_k}) converge a f para $\sigma(L^p(X), L^q(X'))$.

En [1] se estudian los conjuntos secuencialmente compactos de $L^1(X)$ para la topología $\sigma(L^1(X), L^\infty(X'))$, pero, a nuestro entender, hay una seria objeción a la demostración del resultado principal (Th. 1), pues parece admitirse como evidente que el límite (*) existe para todo $A \in \Sigma$. El método anterior no se puede aplicar, pues para $q = \infty$ no se puede asegurar la existencia de la esperanza condicional, a menos que X′ tenga la P. R. N.

3. Corolario.—*Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

3.1. *Para cada espacio de medida finito* (S, μ, Σ) *y cada* p, $1 < p < \infty$, *se verifica que* $K \subset L^p(\mu, X)$ *es* $\sigma(L^p(\mu, X), L^q(\mu, X'))$-*relativamente secuencialmente compacto si y sólo si cumple las condiciones 2.1 y 2.2.*

3.2. *Si* λ *es la medida de Lebesgue en* $[0, 1]$, *existe* p, $1 < p < \infty$ *tal que* $K \subset L^p(\lambda, X)$ *es* $\sigma(L^p(\lambda, X), L^q(\lambda, X'))$-*relativamente secuencialmente compacto si y sólo si cumple las condiciones 2.1 y 2.2.*

3. *X tiene la P. R. N.*

La demostración es consecuencia inmediata del teorema 2 y una ligera modificación del razonamiento seguido en [2], IV.2.3. Por otro lado, C. Fierro ha demostrado en [5] que las condiciones 2.1 y 2.2 caracterizan los conjuntos débilmente relativamente compactos de $L^p(X)$ si y sólo si X y X′ poseen la P. R. N.

No se conoce una caracterización de los espacios X para los que $L^p(\mu, X)$ es débilmente secuencialmente completo para toda medida finita μ. (Véase, no obstante, [5]). El siguiente teorema da una respuesta completa al problema en el marco de la dualidad $\langle L^p(X), L^q(X') \rangle$:

4. Teorema.—*Sea X un espacio de Banach y* $1 < p < \infty$. *Son equivalentes:*

4.1. *Para toda medida finita* μ, $L^p(\mu, X)$ *es* $\sigma(L^p(\mu, X), L^q(\mu, X'))$-*secuencialmente completo.*

4.2. *Si* λ *es la medida de Lebesgue en* $[0, 1]$, $L^p(\lambda, X)$ *es secuencialmente completo para la topología* $\sigma(L^p(\lambda, X), L^q(\lambda, X'))$.

4.3. *X es débilmente secuencialmente completo y posee la P. R. N.*

La demostración sigue las líneas del teorema 2, utilizando la caracterización de la P. R. N. obtenida en el corolario 3.

Bibliografía

[1] Batt, J. 1974. *On weak compactness in spaces of vector-valued measures and Bochner-integrable functions in connection with the Radon-Nikodým property of Banach spaces.* «Rev. Roum. Math. Pures et Appl.», XIX, 285-304.

[2] Diestel, J. and Uhl, J. J. 1977. *Vector Measures.* «Math. Surveys», n.° 15. «Amer. Math. Soc.», Providence, R. I.

[3] Dinculeanu, N. 1967. *Vector Measures.* Pergamon Press.

[4] Dunford, N. and Schwartz, J. T. 1966. *Linear Operators, Part I.* Interscience Pub. New York.

[5] Fierro, C. Tesis doctoral. En elaboración.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

FLUORESCENCIA INDUCIDA POR LASER. TRANSICIONES NO RADIATIVAS EN MOLECULAS PEQUEÑAS (*)

J. A. Dueñas Fañanás (1), A. Cabello (1) y D. Meziat (2)

Experiments on molecular energy transfer are described. Time resolved laser flucrescence studies are able to give us evidences and rate constants for such processes. Collisional energy transfer in formaldehyde is shown as an example. Intramolecular energy transfer in CS_2 is reported for the first time.

Introducción

El estudio de transiciones sin radiación y el papel que las colisiones juegan en ellas están siendo objeto de una extensa investigación desde los puntos de vista teórico y experimental. En este trabajo se

(*) Presentada en la sesión celebrada el 12 de marzo de 1980.

(1) Departamento de Química Física. Facultad de Química. Universidad Complutense.

(2) Universidad Laboral de Alcalá de Henares, Madrid.